Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

WS 2010/11
9.11.2010

Topologie I
4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Es bezeichne $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ den 2-dimensionalen Torus.

(a) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X_1 := \mathbb{T}^2 \setminus \{p\}$, wobei $p \in \mathbb{T}^2$ ein beliebiger Punkt ist. *Tipp: Zeigen Sie, dass X_1 homotopieäquivalent zu zwei in einem Punkt zusammengeklebten Kreisen ist.*

(b) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $X_2 := \mathbb{T}^2 \setminus \{p, q\}$, wobei $p, q \in \mathbb{T}^2$ beliebige verschiedene Punkte sind. *Tipp: Zeigen Sie, dass X_2 homotopieäquivalent zu drei in einem Punkt zusammengeklebten Kreisen ist.*

Aufgabe 2

Für Gruppen G_1 und G_2 bezeichne $G_1 * G_2$ das freie Produkt von G_1 und G_2.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $G_1 * G_2 \to G_1 \times G_2$, $G_1 \ni g \mapsto (g, 1)$, $G_2 \ni h \mapsto (1, h)$, einen Gruppenhomomorphismus definiert.

(b) Bestimmen Sie den Kern dieses Gruppenhomomorphismus falls $G_1 \cong G_2 \cong \mathbb{Z}_2$.

(c) (Zusatzaufgabe) Sei wieder $G_1 \cong G_2 \cong \mathbb{Z}_2$, und seien a bzw. b die nichttrivialen Elemente in G_1 bzw. G_2. Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & \mathbb{Z} & \to & G_1 * G_2 & \to & G_1 & \to & 1 \\ & & k & \mapsto & (ab)^k & & & & \\ & & & & a & \mapsto & a & & \\ & & & & b & \mapsto & a & & \end{array}$$

eine kurze exakte Sequenz von Gruppen ist. Schließen Sie daraus, dass $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ isomorph zu einem semi-direkten Produkt von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}_2$ ist. Dieses semi-direkte Produkt ist das einzige semi-direkte Produkt von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}_2$, das nicht das direkte Produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ ist.

Aufgabe 3

Sei G eine topologische Gruppe (siehe Aufgabe 4 auf Blatt 3 für die Definition). Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von G abelsch ist.
(Hinweis: konstruieren Sie für $\alpha, \beta \in \mathcal{L}(G, 1)$ Homotopien zwischen den Schleifen $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ und $t \mapsto \alpha(t) \cdot \beta(t)$, wobei "$\cdot$" die Multiplikation in G bezeichnet.)

Aufgabe 4
Seien X und Y wegzusammenhängende topologische Räume. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Es gebe stetige, offene und injektive Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to X$ und $g : \mathbb{R}^n \to Y$.

Auf $P := (X \setminus f(B_1^n(0)) \cup (Y \setminus g(B_1^n(0))$ definieren wir $x \sim y$ gdw ($x = y$ oder $\exists z \in S_1^{n-1}(0)$ mit $x = f(z) \in X$ und $y = g(z) \in Y$). Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\tilde{P}$. Wir versehen $\tilde{P}$ mit der Quotiententopologie der surjektiven Abbildung $P \to \tilde{P}$, $x \mapsto [x]$. Man nennt den topologischen Raum $\tilde{P}$ die zusammenhängende Summe von X und Y und schreibt zumeist $X\#Y$ für $\tilde{P}$.

Zeigen Sie

(a) f und g sind Homöomorphismen auf ihr Bild.

(b) $\pi_1(X) = \pi_1(X \setminus \{f(0)\})$, $\pi_1(Y) = \pi_1(Y \setminus \{g(0)\})$

(c) $\pi_1(X\#Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$

Aufgabe 5
Ein Graph T wird Baum genannt, wenn er zusammenziehbar ist. Sei nun X ein Graph. Ein zusammenziehbarer Teilgraph T von X heißt maximaler Baum in X, falls es keinen zusammenziehbaren Teilgraphen T' in X mit $T \subsetneq T'$ gibt.

Zeigen Sie:

(a) Ein zusammenhängender Graph ist genau dann ein Baum, wenn er einfach zusammenhängend ist.

(b) Jeder Graph enthält einen maximalen Baum. *Tipp: Konzentrieren Sie sich zunächst auf endliche Graphen. Für unendliche Graphen ist das Lemma von Zorn zu verwenden.*

(c) Jeder zusammenhängende Graph ist homotopieäquivalent zu einem Graphen mit nur einer Ecke.

(d) Sei X ein Graph und sei x ein Punkt in X (nicht unbedingt ein Vertex). Zeigen Sie, dass $\pi_1(X, x)$ eine freie Gruppe ist.

Abgabe der Lösungen: Die Teilnehmer der Gruppe von D. Gepner geben die Lösungen von Aufgaben 1–3 bitte am ***Dienstag, den 16.11.*** *ab. Abgabetermin für die restlichen Lösungen ist* ***Donnerstag 18.11.2010*** *vor der Vorlesung.*