Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

WS 2010/11
18.11.2010

Topologie I
5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X bezeichne $[S^1, X]$ die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $S^1 \to X$. Sei $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt und $\phi : \pi_1(X, x_0) \to [S^1, X]$, $[\gamma]_{x_0} \mapsto [\gamma]$ die natürliche Abbildung (der Basispunkt x_0 wird "vergessen").

(a) Zeigen Sie, dass ϕ surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\phi([\gamma]_{x_0}) = \phi([\gamma']_{x_0})$ genau dann gilt, wenn $[\gamma]_{x_0}$ und $[\gamma']_{x_0}$ in $\pi_1(X, x_0)$ zueinander konjugiert sind.

(c) Leiten Sie daraus her, dass eine bijektive Abbildung zwischen $[S^1, X]$ und der Menge der Konjugationsklassen in $\pi_1(X)$ existiert.

Aufgabe 2

Man betrachte eine Standardeinbettung von S^1 in den $\mathbb{R}^3$, z.B. $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 0)$. Deren Bild wird ebenfalls mit S^1 bezeichnet. Ziel die Aufgabe ist es, die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ zu berechnen.

(a) Sei $A := S_2^2(0) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in [-2, 2] \right\}$, wobei $S_2^2(0)$ die euklidische Abstandssphäre vom Radius 2 um $0 \in \mathbb{R}^3$ ist. Zeigen Sie, dass A ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ ist. *(Es werden keine expliziten Formeln verlangt! Beschreiben Sie Ihr Verfahren — Bilder sind dabei hilfreich.)*

(b) Zeigen Sie, dass $A = S^2 \cup_f D^1$ für eine geeignete Abbildung f gilt.

(c) Zeigen Sie, dass A ein CW-Komplex ist.

(d) Zeigen Sie, dass A homotopieäquivalent zu $S^2 \vee S^1$ ist.

(e) Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ die freie Gruppe von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}$. Wir notieren die 1 im ersten Faktor mit a und die 1 im zweiten Faktor mit b. Sei G der Quotient von $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ durch den Normalteiler der von aba^2b^2 und ba^5 erzeugt wird.

(a) Zeigen Sie, dass $ba^{-2}b \equiv 1_G \in G$.

(b) Konstruieren Sie einen CW-Komplex X, so dass für alle $p \in X$, $\pi_1 X \cong G$. (Hinweis: Mehrere Wahlen sind möglich, aber es gibt ein schönes Beispiel mit einer 1-Zelle, zwei 1-Zellen, und zwei 2-Zellen.)

Aufgabe 4

Sei X der topologische Raum, den wir aus S^2 erhalten, wenn wir $e_1 \in S^2$ mit $-e_1 \in S^2$ verkleben. Zerlegen Sie X in 0-, 1- und 2-Zellen, so dass X die Struktur eines CW-Komplexes hat. Berechnen Sie damit $\pi_1(X)$.
Tipp: Es geht mit je einer 0-, 1- *und* 2-*Zelle. Dann ist die Berechnung von* π_1 *ganz einfach.)*

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 25.11.2010*** *vor der Vorlesung.*