Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

WS 2010/11
25.11.2010

Topologie I
6. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei $E \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung. Zeigen Sie: ist X wegzusammenhängend, so haben alle Fasern, d.h. alle Mengen der Form $p^{-1}(\{x\})$, $x \in X$ dieselbe Kardinalität.
(Bem.: die Behauptung ist auch wahr, wenn wir wegzusammenhängend durch zusammenhängend ersetzen.)

Aufgabe 2
Sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Ist $\pi_1(X)$ endlich, so ist jede stetige Abbildung $X \longrightarrow S^1$ nullhomotop.

(b) Ist die Abeliansierung von $\pi_1(X)$ eine Torsionsgruppe, so ist jede stetige Abbildung $X \longrightarrow S^1$ nullhomotop.

Aufgabe 3
Es bezeichnen **Möb** das kompakte Möbiusband, $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ die projektive Ebene und K die Kleinsche Flasche (zur Erinnerung ist K definiert als der Quotient $[0,1]^2/\sim$, wobei $(0,t) \sim (1, 1-t)$ und $(t,0) \sim (t,1)$ für alle $t \in [0,1]$).

(a) Zeigen Sie, dass $K = \mathbf{M\ddot{o}b} \cup_{S^1} \mathbf{M\ddot{o}b}$ gilt.
(Hinweis: Betrachten Sie $\{[(t, \frac{1}{2})] \mid t \in [0,1]\} \subset K$.)

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \mathbf{M\ddot{o}b} \cup_{S^1} D^2$ gilt, wobei $D^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$.
(Hinweis: Fassen Sie $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ als $S^2/\{\pm\mathrm{Id}\}$ auf und identifizieren Sie das Komplement der Kreisscheibe $\{[x] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid |x_3| > \frac{1}{2}\}$ in $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.)

(c) Leiten Sie daraus her, dass K als zusammenhängende Summe $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \sharp \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 4
Sei G eine Gruppe, X ein wegzusammenhängender, einfach zusammenhängender topologischer Raum, und $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto gx$ eine Gruppen-Operation, derart dass für jedes g die Abbildung $x \mapsto gx$ ein Homöomorphismus ist. Angenommen, G operiere frei und eigentlich diskontinuierlich auf X. Hierbei bedeutet "‘frei"’: für alle $g \in G \setminus \{1\}$ und alle $x \in X$ gilt $gx \neq x$. Eine freie Operation ist "‘eigentlich diskontinuierlich"’ falls jedes x in X eine Umgebung U besitzt, so dass für alle $g \in G \setminus \{1\}$ gilt $U \cap gU = \emptyset$. Sei X/G der Quotient von X durch diese Operation, versehen mit der Quotiententopologie. Zeigen Sie:

(a) $X \to X/G$ ist eine Überlagerung.

(b) Für jedes $p \in X/G$ ist $\pi_1(X/G, p)$ isomorph zu G.

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 2.12.2010*** *vor der Vorlesung.*