Universität Regensburg, Mathematik WS 2010/11
Prof. Dr. Bernd Ammann 2.12.2010
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

Topologie I
7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für einen semi-lokal einfach zusammenhängenden, wegzusammenhängenden topologischen Raum X mit Basispunkt x_0 bezeichne $\mathrm{COV}_*(X, x_0)$ die Kategorie, deren Objekte die Tripel (E, π, e_0) sind, wobei $E \xrightarrow{\pi} X$ Überlagerung mit $\pi(e_0) = x_0$ ist, und deren Morphismen zwischen Objekten $O = (E, \pi, e_0)$ und $O' = (E', \pi', e_0')$ sind Tripel (O, O', P), wobei $P : E \longrightarrow E'$ stetig ist mit $\pi' \circ P = \pi$ und $P(e_0) = e_0'$.

(a) Überprüfen Sie, ob $\mathrm{COV}_*(X, x_0)$ eine Kategorie ist.

(b) Zeigen Sie die Existenz eines intitalen Objekts in $\mathrm{COV}_*(X, x_0)$.

(c) Zeigen Sie die Existenz eines terminalen Objekts in $\mathrm{COV}_*(X, x_0)$.

Aufgabe 2

Sei X der topologische Raum $\mathbb{R}^3 \setminus (G \dot{\cup} K)$, wobei G eine affine Gerade und K ein Kreis im $\mathbb{R}^3$ sind. Zeigen Sie, dass die Fundamentalgruppe von X isomorph zu

(a) der von zwei Elementen erzeugten freien Gruppe ist, falls G die von K berandete Kreisscheibe nicht schneidet.

(b) der Gruppe $\mathbb{Z}^2$ ist, falls G die von K berandete Kreisscheibe schneidet. *(Hinweis: zeigen Sie, dass X homotopieäquivalent zu einem 2-dimensionalen Torus ist; dabei ist es hilfreich, X als Drehung einer gelöcherten Halbebene um den Rand dieser Halbebene zu betrachten.)*

Aufgabe 3

Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $X = U_1 \cup U_2$, U_i offen in X. Sei $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Sei $H_1(Y)$, für $Y = X, U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ definiert als die Abelianisierung von $\pi_1(Y, x_0)$. Zeigen Sie:

(a) Die Inklusionen induzieren Abbildungen $H_1(U_1 \cap U_2) \to H_1(U_i) \to H_1(X)$.

(b) Sei G das Bild von $H_1(U_1 \cap U_2)$ in $H_1(U_1) \oplus H_1(U_2)$. Zeigen Sie $H_1(X) = H_1(U_1) \oplus H_1(U_2)/G$.
Tipp: Theorem von van Kampen.

Aufgabe 4
Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass für jede stetige Abbildung $f : S^m \longrightarrow \mathbb{R}$ ein $x \in S^m$ existiert mit $f(-x) = f(x)$.

(b) Sei nun $m \geq 2$ und $f : S^m \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Ziel der nächsten Teilaufgabe ist es, zu zeigen, dass ein $x \in S^m$ existiert mit $f(-x) = f(x)$. Man nehme an, dass dies nicht gelte.

- Sei $g : S^m \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$. Zeigen Sie, dass g eine stetige Abbildung $h : \mathbb{R}\mathrm{P}^m \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ mit $p_1 \circ g = h \circ p_m$ induziert, wobei $S^k \xrightarrow{p_k} \mathbb{R}\mathrm{P}^k$ die kanonische Projektion ist für alle k.
- Sei $x_0 \in S^m$ beliebig. Zeigen Sie die Existenz eines eindeutigen Lifts $\tilde{h}$ von h durch p_1 mit $\tilde{h}(p_m(x_0)) = g(x_0)$.
- Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

(c) Gilt die Aussage der letzten Teilaufgabe für $m = 1$?

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 9.12.2010*** *vor der Vorlesung.*