Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

WS 2010/11
9.12.2010

Topologie I
8. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender topologischer Raum, auf dem eine Gruppe G frei und eigentlich diskontinuierlich operiert. Sei H eine Untergruppe von G. Dann sind die Abbildungen $X \overset{p_H}{\to} X/H$ und $X/H \overset{p_{G,H}}{\to} X/G$ Überlagerungen. Zeigen Sie:

(a) Sind $p_1 : E \to X/G$ und $p_2 : X \to E$ zwei Überlagerungen mit $p_1 \circ p_2 = p_G$, dann ist die Überlagerung $p_1 : E \to X/G$ isomorph zur Überlagerung $X/H \overset{p_{G,H}}{\to} X/G$ für eine geeignete Untergruppe H von G.

(b) Zwei solche Überlagerungen X/H_1 und X/H_2 von X/G sind isomorph genau dann, wenn H_1 und H_2 konjugierte Untergruppen von G sind.

(c) Die Überlagerung $X/H \overset{p_{G,H}}{\to} X/G$ ist normal genau dann, wenn H ein Normalteiler von G ist. In diesem Fall ist G/H die Gruppe der Deck-Transformationen dieser Überlagerung.

Aufgabe 2
Sei $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{Z} \text{ oder } y \in \mathbb{Z}\}$ und $p : E \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (1 - \cos(2\pi y), -\sin(2\pi y))$ falls $x \in \mathbb{Z}$ und $(x, y) \mapsto (-1 + \cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ falls $y \in \mathbb{Z}$. Das Bild von p bezeichnen wir mit X und offensichtlich ist X homöomorph zu $S^1 \vee S^1$. Setze $e_0 := (0, 0) \in E$ und $x_0 := 0 = p(e_0) \in X$. Bestimmen Sie $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset \pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a\rangle * \langle b\rangle$.

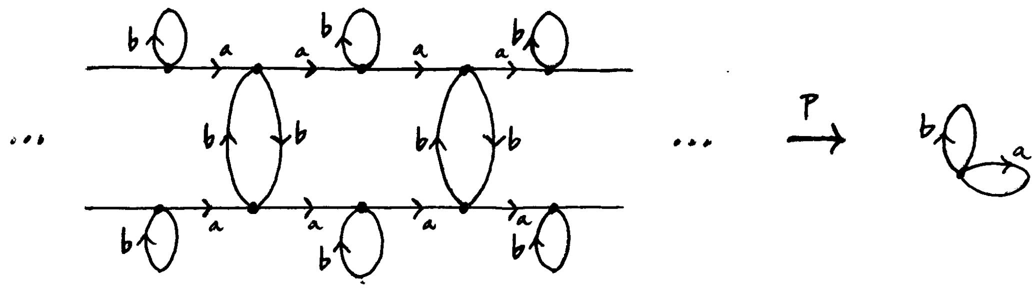
Aufgabe 3
Für folgende Untergruppen H von $\pi_1(S^1 \vee S^1) = \langle a\rangle * \langle b\rangle$ konstruiere man eine zusammenhängende Überlagerung $E \overset{p}{\to} S^1 \vee S^1$ mit $\pi_1(E) \overset{p_*}{\twoheadrightarrow} H$ (d.h., $p_*(\pi_1(E)) = H$) und bestimme, ob es sich um eine normale Überlagerung handelt:

(a) Für die von b erzeugte normale Untergruppe H.

(b) Für die von $[\pi_1(S^1 \vee S^1), \pi_1(S^1 \vee S^1)]$ und a^3 erzeugte Untergruppe H.

Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 2 .

Aufgabe 4
Das folgende Bild zeigt die Überlagerung E von $X = S^1 \vee S^1$, die in Beispiel I.8.16 (3) der Vorlesung beschrieben wurde.



Beschreiben Sie das Bild von $\pi_1(E)$ in $\pi_1(X)$. Geben Sie dazu ein Erzeugendensystem von $\pi_1(E)$ an.

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 16.12.2010*** *vor der Vorlesung.*