Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

WS 2010/11
16.12.2010

Topologie I
9. Übungsblatt

Aufgabe 1
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und geben Sie ein Gegenbeispiel für jede falsche an.
Sie sollen in der Lage sein, jede Ihrer Antworten in der Übung zu begründen.

(a) Sind zwei topologische Räume homöomorph, so sind sie homotopieäquivalent.

(b) Sind zwei topologische Räume homotopieäquivalent, so sind sie homöomorph zueinander.

(c) Sind zwei topologische Räume homöomorph, so haben sie isomorphe Fundamentalgruppen.

(d) Haben zwei topologische Räume isomorphe Fundamentalgruppen, so sind sie homöomorph.

(e) Jede Homotopieäquivalenz induziert einen Gruppenisomorphismus zwischen den entsprechenden Fundamentalgruppen.

(f) Die topologischen Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ sind homotopieäquivalent, für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(g) Sei X ein zusammenziehbarer topologischer Raum, und sind $f_1, f_2 : Y \to X$ stetige Abbildungen. Dann sind f_1 und f_2 homotop zueinander.

(h) Die Fundamentalgruppe einer Vereinigung ist das freie Produkt der einzelnen Fundamentalgruppen.

(i) Für wegzusammenhängende lokal wegzusammenhängende topologische Räume X, Y, E und stetige Abbildungen $f : Y \to X$ und $p : E \to X$ gelte $f_*(\pi_1(Y)) \subset p_*(\pi_1(E))$. Dann existiert eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \to E$ mit $p \circ \tilde{f} = f$.

(j) Ist $E \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung eines wegzusammenhängenden lokal wegzusammenhängenden topologischen Raumes X, so existiert für jedes $e_0 \in E$ und jede Schleife c in X mit Basispunkt $p(e_0)$ eine eindeutige Schleife $\tilde{c}$ in E mit Basispunkt e_0 so, dass $p \circ \tilde{c} = c$ gilt.

(k) Jede Überlagerung eines einfach zusammenhängenden, wegzusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden topologischen Raumes ist trivial.

(l) Die Fundamentalgruppe eines kompakten wegzusammenhängenden topologischen Raumes ist endlich erzeugt.

Aufgabe 2
Sei X ein topologischer Raum und sei $\gamma : I \to X$ ein Weg in X.

(a) Zeigen Sie, dass $\gamma\gamma^{-1}$ einen 1-Zykel definiert und dass $\gamma\gamma^{-1} \sim 0$.

(b) Zeigen Sie: wenn $\gamma : I \to X$ und $\tau : I \to X$ geschlossene Wege sind, so dass $\gamma \simeq_{0,1} \tau$, dann gilt $\gamma \sim \tau$.

Aufgabe 3
In dieser Aufgabe definieren und diskutieren wir die reduzierte Homologie. Sei X ein topologischer Raum, und R ein kommutativer Ring mit 1.

Wir definieren wie in der singulären Homologie die R-Moduln $C_q(X; R)$ für $q \neq -1$ und die R-Homomorphismen ∂_q für $q \neq 0, -1$. Wir definieren $C_{-1}(X; R) := R$ und $\partial_0^{\#} : C_0(X; R) \to C_{-1}(X; R)$ durch $\partial_0^{\#}(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^n a_i$ und $\partial_{-1}^{\#} = 0$,

(a) Begründen Sie, dass $\partial_0^{\#} \circ \partial_1 = 0$ *(Hinweis: Beweis von Prop. 2.4.)*

(b) Berechnen Sie $H_0^{\#}(X; R) = \frac{\ker \partial_0^{\#}}{\operatorname{im} \partial_1}$ und $H_{-1}^{\#}(X; R) = \frac{\ker \partial_{-1}^{\#}}{\operatorname{im} \partial_0^{\#}}$.

Aufgabe 4
Seien $C_\bullet$, $C'_\bullet$ und $C''_\bullet$ Kettenkomplexe und seien $f^1_\bullet, f^2_\bullet : C_\bullet \to C'_\bullet$ und $g^1_\bullet, g^2_\bullet : C'_\bullet \to C''_\bullet$ Homomorphismen von Kettenkomplexen. Nehmen Sie an, dass $f^1_\bullet \simeq f^2_\bullet$ und $g^1_\bullet \simeq g^2_\bullet$. Zeigen Sie, dass $g^1_\bullet f^1_\bullet \simeq g^2_\bullet f^2_\bullet$.

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 23.12.2010*** *vor der Vorlesung oder im Postfach Ginoux/Gepner.*