Universität Regensburg, Mathematik WS 2010/11
Prof. Dr. Bernd Ammann 23.12.2010
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

Topologie I
10. Übungsblatt

Aufgabe 1
Für einen kommutativen Ring R mit 1, einen topologischen Raum X und eine Teilmenge $A \subset X$ existiert nach Vorlesung eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$\ldots \longrightarrow H_q(A) \xrightarrow{H_q(i)} H_q(X) \xrightarrow{H_q(j)} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \longrightarrow \ldots \longrightarrow H_0(X,A) \longrightarrow 0,$$

wobei $i : A \to X$ und $j : X = (X, \emptyset) \to (X,A)$ die Inklusionen bezeichnen. Diese Sequenz heißt die zu (X,A) assoziierte *lange exakte Homologiesequenz.*

(a) Zeigen Sie: die lineare Abbildung $H_0(A) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(X)$ ist genau dann surjektiv, wenn jede Wegzusammenhangskomponente von X eine Wegzusammenhangskomponente von A enthält.

(b) Zeigen Sie: die lineare Abbildung $H_0(A) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(X)$ ist genau dann injektiv, wenn jede Wegzusammenhangskomponente von X höchstens eine Wegzusammenhangskomponente von A enthält.

(c) Zeigen Sie unter Benutzung der langen exakten Homologiesequenz, dass $H_0(X,A) = 0$ genau dann gilt, wenn $H_0(A) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(X)$ surjektiv ist.

Aufgabe 2 Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

(a) Für einen R-Modul M und ein $k \in \mathbb{N}$ sei $\pi : M \longrightarrow R^k$ eine surjektive lineare Abbildung. Zeigen Sie: eine lineare Abbildung $L : R^k \longrightarrow M$ existiert mit $\pi \circ L = \mathrm{id}_{R^k}$.

(b) Geben Sie $\mathbb{Z}$-Moduln M, N und eine surjektive lineare Abbildung $\pi : M \longrightarrow N$ an, so dass keine lineare Abbildung $L : N \longrightarrow M$ mit $\pi \circ L = \mathrm{id}_N$ existiert.

Aufgabe 3
Sei $X = B^2$ (die zweidimensionale Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$) und A eine nichtleere Teilmenge von X mit k Elementen, $k \in \mathbb{N}$.

(a) Beschreiben Sie die Abbildung $H_0(A) \cong R^k \xrightarrow{H_0(i)} R \cong H_0(X)$ explizit und bestimmen Sie ihren Kern.

(b) Nutzen Sie die lange exakte Homologiesequenz (s.o.), um den Isomorphietyp von $H_0(X,A)$ und $H_1(X,A)$ zu bestimmen.

(c) Was ist $H_q(X,A)$ für $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$?

Aufgabe 4_(Fortsetzung der 2. Aufgabe im Blatt 9)_
Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum mit Basispunkt x. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\pi : \pi_1(X,x) \longrightarrow H_1(X,\mathbb{Z})$, $[\gamma]_x \longmapsto [\gamma]$ (die Homotopieklasse der Schleife γ wird auf die Homologieklasse von γ als 1-Zykel abgebildet) ist wohldefiniert.

(b) Die Abbildung π ist ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Der Gruppenhomomorphismus π ist surjektiv.

(d) Es gilt $[\pi_1(X,x), \pi_1(X,x)] \subset \mathrm{Ker}(\pi)$.

Bemerkung: Es gilt sogar $[\pi_1(X,x), \pi_1(X,x)] = \mathrm{Ker}(\pi)$, _aber dies ist nicht Teil der Aufgabe._

Abgabe der Lösungen: _**Donnerstag 13.1.2011**_ _vor der Vorlesung._