Universität Regensburg, Mathematik — WS 2010/11
Prof. Dr. Bernd Ammann — 13.1.2011
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

Topologie I
11. Übungsblatt

Aufgabe 1
Wir definieren die folgenden Teilmengen von $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

$$D^n_+ := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1,\ x_{n+1} \geq 0\right\} \qquad D^n_- := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1,\ x_{n+1} \leq 0\right\}$$

$$S^{n-1} := D^n_+ \cap D^n_- \qquad U_1 := D^n_- \setminus S^{n-1} \qquad U_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1,\ x_{n+1} \leq -1/2\right\}$$

(a) Erfüllen $X := S^n$, $A := D^n_-$ und $U := U_1$ die Voraussetzungen des Ausschneidungs-Axioms (ES4)?

(b) Erfüllen $X := S^n$, $A := D^n_-$ und $U := U_2$ die Voraussetzungen des Ausschneidungs-Axioms (ES4)?

(c) Zeigen Sie, dass die Inklusion

$$(D^n_+, S^{n-1}) = (S^n \setminus U_1, D^n_- \setminus U_1) \longrightarrow (S^n \setminus U_2, D^n_- \setminus U_2)$$

eine Homotopie-Äquivalenz ist.

(d) Sei h_* eine Homologie-Theorie, $q \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass die Inklusion $(D^n_+, S^{n-1}) \to (S^n, D^n_-)$ einen R-Modulisomorphismus

$$h_q(D^n_+, S^{n-1}) \to h_q(S^n, D^n_-)$$

induziert. Welche Axiome haben Sie dazu benutzt?

Aufgabe 2
Sei (X, A) ein topologisches Paar. Zeigen Sie die Exaktheit von

$$H_q(A) \to H_q(X) \to H_q(X, A).$$

Aufgabe 3
Man betrachte ein *Schlangendiagramm* von R-Moduln

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d'"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r, "g"'] & N'' &
\end{tikzcd}$$

(das Diagramm kommutiert und alle Sequenzen von Abbildungen sind exakt). Beweisen Sie, dass $\delta : \mathrm{Ker}(d'') \to \mathrm{Coker}(d')$, $z \mapsto f^{-1} \circ d \circ g^{-1}(z)$, eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

Aufgabe 4
Man betrachte das Schlangendiagramm von R-Moduln und die Abbildung δ aus der letzten Aufgabe. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Ker}(d') \xrightarrow{f} \mathrm{Ker}(d) \xrightarrow{g} \mathrm{Ker}(d'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(d') \xrightarrow{f} \mathrm{Coker}(d) \xrightarrow{g} \mathrm{Coker}(d'')$$

eine exakte Sequenz ist.

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 20.1.2011*** *vor der Vorlesung.*