Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

WS 2010/11
20.1.2011

Topologie I
12. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei R ein kommutativer Ring. Man betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

von R-Moduln, in dem die Zeilen exakt sind, f_2 und f_4 Isomorphismen sind, f_1 ein Epimorphismus und f_5 ein Monomorphismus ist. Zeigen Sie, dass dann f_3 ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2
Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq B \subseteq X$ Teilmengen. Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz der Form

$$\ldots \to H_q(B,A) \to H_q(X,A) \to H_q(X,B) \to H_{q-1}(B,A) \to \ldots \to H_0(X,B) \to 0$$

gibt.

Aufgabe 3
Für einen nichtleeren topologischen Raum X mit Basispunkt x_0 bezeichne $\widetilde{H}_q(X) := H_q(X, \{x_0\})$, für alle $q \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) Die R-Moduln $\widetilde{H}_q(X)$ stimmen mit den R-Moduln $H_q^{\#}(X;R)$ aus der Aufgabe 3 im Blatt 9 überein.

(b) Für jede Teilmenge $A \subset X$ mit $x_0 \in A$ existiert eine lange exakte Sequenz von R-Moduln

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{H}_q(A) \longrightarrow \widetilde{H}_q(X) \longrightarrow H_q(X,A) \longrightarrow \widetilde{H}_{q-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

(Hinweis: verwenden Sie die letzte Aufgabe.)

Aufgabe 4
Ziel der Aufgabe ist es, den Fundamentalsatz der Algebra mittels Homologietheorie zu beweisen. Sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom mit $\deg P =: n \geq 1$. Man nehme an, P habe keine Wurzeln in $\mathbb{C}$.

(a) Für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ definiere man $f_\lambda : S^1 \to S^1$, $z \mapsto \frac{P(\lambda z)}{|P(\lambda z)|}$. Zeigen Sie, dass für $\lambda \to \infty$ die Abbildung f_λ gleichmäßig gegen eine stetige Abbildung $f : S^1 \longrightarrow S^1$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass jede Abbildung f_λ homotop zu f ist.

(c) Zeigen Sie, dass durch die Identifizierung $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ die von f induzierte Abbildung $H_1(f)$ mit $n \cdot \mathrm{id}$ übereinstimmt.

(d) Vergleichen Sie $H_1(f_0)$ und $H_1(f)$ und leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 27.1.2011*** *vor der Vorlesung.*