Universität Regensburg, Mathematik — WS 2010/11
Prof. Dr. Bernd Ammann — 27.1.2011
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. David Gepner

Topologie I
13. Übungsblatt

Aufgabe 1
Ein topologisches Paar (X, A) wird gutes Paar genannt, falls A abgeschlossen ist und A eine offene Umgebung V in X besitzt, so dass A ein (starker) Deformationsretrakt von V ist. Zeigen Sie, dass für solche $A \subset V \subset X$ gilt:

(a) Die Inklusion $(X, A) \to (X, V)$ induziert einen Isomorphismus $H_q(X, A) \to H_q(X, V)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. *(Hinweis: Lange exakte Sequenz von Tripeln, d.h. Aufgabe 2 vom 12. Übungsblatt.*

(b) Die Inklusion $(X \setminus A, V \setminus A) \to (X, V)$ induziert einen Isomorphismus $H_q(X \setminus A, V \setminus A) \to H_q(X, V)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Sei nun X ein CW-Komplex und A ein Unter-CW-Komplex.

(c) Zeigen Sie, dass dann (X, A) ein gutes topologisches Paar ist.

(d) Der Quotientenraum X/A ist wiederum ein CW-Komplex.

Es reicht, wenn Sie die Aufgabe für endliche CW-Komplexe lösen.

Erinnerungen/Definition zu CW-Komplexen
Man beachte hierbei, dass ein CW-Komplex X ein topologischer Raum ist, versehen mit der Zusatz-Information, wie er sich aus Zellen verschiedener Dimension zusammensetzt. Ein Unter-CW-Komplex A ist ein topologischer Unterraum von X, der eine Vereinigung von Zellen von X ist. Siehe Hatcher Seite 5–7 für Details. Die Tatsache, dass die CW-Strukturen von X und A in diesem Sinne kompatibel sind, erleichtert den obigen Beweis.
Die Dimension eines CW-Komplex ist das Supremum der Dimensionen der Zellen des CW-Komplex. Endliche CW-Komplexe sind also immer endlich-dimensional.

Aufgabe 2
Sei (X, A) ein gutes topologisches Paar, $A \neq \emptyset$, V wie in der vorigen Aufgabe. Im folgenden bezeichne X/A (bzw. V/A) den Quotientenraum von X durch A (bzw. V durch A) und analog sei dann A/A ein Raum mit einem Punkt. Die Quotienten-Abbildungen induzieren $p_1 : (X, A) \to (X/A, A/A)$,
$p_2 : (X, V) \to (X/A, V/A)$ und
$p_3 : (X \setminus A, V \setminus A) \to ((X/A) \setminus (A/A), (V/A) \setminus (A/A))$

(a) Folgern Sie mit der vorigen Aufgabe, dass alle horizontalen Abbildungen des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
H_q(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "H_q(p_1)"] & H_q(X,V) \arrow[d, "H_q(p_2)"] & H_q(X \setminus A, V \setminus A) \arrow[l] \arrow[d, "H_q(p_3)"] \\
H_q(X/A, A/A) \arrow[r] & H_q(X/A, V/A) & H_q((X/A) \setminus (A/A), (V/A) \setminus (A/A)) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Isomorphismen sind.

(b) Zeigen Sie, dass p_3 ein Homöomorphismus ist. Folgern Sie, dass $H_q(p_3)$ und damit auch $H_q(p_1)$ ein Isomorphismus ist.

(c) Schließen Sie daraus $\widetilde{H}_q({}^X/_A) = H_q(X, A)$, wobei der Basispunkt von ${}^X/_A$ der Bildpunkt von A in ${}^X/_A$ ist.

(d) Zeigen Sie: Ist X ein n-dimensionaler CW-Komplex und ist R ein Hauptidealring, so ist $H_n(X)$ ein freier R-Modul.
(Kommentare: Sie dürfen sich auf den Fall endlicher CW-Komlexe beschränken. Sie dürfen ohne Beweis nutzen: Unter-Moduln von freien R-Moduln sind frei)
(Hinweis: Betrachten Sie das gute Paar (X, X_{n-1}), wobei X_{n-1} das $n-1$-Gerüst von X bezeichnet.)

(e) Ist q größer als die Dimension von X, dann gilt $H_q(X) = 0$.

Aufgabe 3
Gegeben sei folgendes kommutatives Diagramm von R-Moduln, in dem beide Zeilen exakt sind:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "h_{q+1}"] \arrow[d, "\gamma_{q+1}"] & A_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\alpha_q"] & B_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\beta_q"] & C_q \arrow[r, "h_q"] \arrow[d, "\gamma_q"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{q+1} \arrow[r, "h'_{q+1}"'] & A'_q \arrow[r, "f'_q"'] & B'_q \arrow[r, "g'_q"'] & C'_q \arrow[r, "h'_q"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie: sind alle γ_q's Isomorphismen, so ist folgende lange Sequenz exakt:

$$\ldots \longrightarrow A_q \xrightarrow{\Phi_q} A'_q \oplus B_q \xrightarrow{\Psi_q} B'_q \xrightarrow{\Gamma_q} A_{q-1} \longrightarrow \ldots .$$

Hierbei ist $\Phi_q(a) := \alpha_q(a) \oplus f_q(a)$, $\Psi_q(a' \oplus b) := \beta_q(b) - f'_q(a')$ und $\Gamma_q(b') := h_q \circ \gamma_q^{-1} \circ g'_q(b')$ für alle $(a, a', b, b') \in A_q \times A'_q \times B_q \times B'_q$.

Aufgabe 4
Sei R ein Hauptidealring. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ den projektiven Raum von $\mathbb{C}^{n+1}$, und sei D^{2n} den abgeschlossenen Einheitsball in $\mathbb{R}^{2n}$. Man akzeptiere ohne Beweis, dass eine stetige Abbildung $f : S^{2n-1} = \partial D^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ existiert mit $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \cup_f D^{2n}$. Berechnen Sie unter Benutzung der Aufgaben 1 und 2 die Homologiegruppen von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.
(Hinweis: Induktion über n und Verwendung von $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = S^2$.)

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 3.2.2011*** *vor der Vorlesung oder am Freitag 4.2. im Büro Ginoux bzw. Postfach Gepner.*