Dozent: Prof. Dr. Bernd Ammann

Vorlesung: Das Yamabe-Problem

Zeit und Ort: Fr 8-10, M101

Übungen: Nein

Vorkenntnisse: Grundstudium. Differentialgeometrie I ist sehr nützlich, eine gut verstandene Analysis IV reicht aber eigentlich auch aus. Es erscheinen Begriffe wie Skalarkrümmung und Variationsrechnung, die bei Bedarf aber auch nochmals kurz wiederholt werden können.

Inhalt: Die Spezialvorlesung dreht sich um die folgende Frage: Gegeben sei eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) von Dimension ≥ 3. Gibt es eine positive glatte Funktion $\alpha : M \to \mathbb{R}^+$, so dass die Metrik αg konstante Skalarkrümmung hat? Wie wir sehen werden, ist die Antwort Ja.
Man fomuliert das Problem als Variationsproblem, und die Gleichung der konstanten Skalarkrümmung ergibt dann eine nichtlineare partielle Differentialgleichung (PDGl) für die Funktion α.
Manche nicht-lineare PDGl, die subkritischen PDGl, lassen sich mit denselben Methoden wie lineare PDGl lösen. Die Nichtlinearität im Yamabe-Problem ist aber gerade nicht mehr subkritisch, sondern kritisch. Leichte Störungen der Gleichung sind subkritisch und deswegen leicht zu lösen. Man studiert dann, wie die Lösungen der subkritischen Störungen sich verhalten, wenn der Stör-Parameter klein wird. Aubin konnte 1976 zeigen, dass die Lösungen dieses gestörten Problems gegen eine Lösung des eigentlichen Problems konvergieren, wenn die Yamabe-Ungleichung gilt. Er konnte auch zeigen, dass auf vielen Mannigfaltigkeiten die Yamabe-Ungleichung gilt.
Dass die Yamabe-Ungleichung im wesentlichen auf allen Mannigfaltigkeiten gilt, konnte man aber erst durch die Arbeiten von Schoen und Yau in den 80ern zeigen. In diesen Arbeiten ergibt sich eine erstaunliche Brücke zum Satz der positiven Masse der Allgemeinen Relativitätstheorie.
Die Struktur der Vorlesung ist also anders als eine klassische Kursvorlesung. Im Mittelpunkt steht kein Themenbereich, sondern ein konkretes Problem, und wir werden immer mehr Hilfsmittel kennen lernen, um das Problem vollständig zu lösen.

Literatur:
J. M. Lee and T. H. Parker. The Yamabe problem. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, **17** 37–91, 1987.
C. Baer, Vorlesungsskript Geometrische Analysis, Potsdam, verfügbar im WWW
Weitere Literatur: Webseite der Vorlesung

`http://www.mathematik.uni-regensburg.de/ammann/yamabe`

Leistungsnachweise: Bei Bedarf bitte Rücksprache mit Dozent.