Universität Regensburg, Mathematik SS 2011
Prof. Dr. Bernd Ammann 5.5.2011
Dr. Nicolas Ginoux

Topologie II
1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei X eine topologische Mannigfaltigkeit.

(a) Angenommen X ist R-orientierbar und U ist eine offene Teilmenge von X. Zeigen Sie, dass dann U ebenfalls R-orientierbar ist.

(b) Seien $(X_i)_{i\in I}$ die Zusammenhangskomponenten von X. Sei $Or_R(X)$ bzw. $Or_R(X_i)$ die Menge aller R-Orientierungen von X bzw. X_i. Konstruieren Sie eine Bijektion

$$Or_R(X) \to \prod_{i\in I} Or_R(X_i).$$

(c) Angenommen X ist zusammenhängend und $\pi_1(X)$ besitzt keine Untergruppe vom Index 2. Zeigen Sie, dass X dann $\mathbb{Z}$-orientierbar ist.

Aufgabe 2

Für $n \geq 1$ bezeichne $\sigma_n : \Delta^n \longrightarrow S^n = {}^{\Delta^n}\!/_{\partial\Delta^n}$ die Quotientenabbildung. Das Bild von $\partial\Delta^n$ sei der Basispunkt p. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie, dass σ_n einen Erzeuger von $H_n(S^n, \{p\}; R)$ repräsentiert.
(Hinweis: Ein Erzeuger von $H_1(S^1; R) \cong H_1(S^1, \{p\}; R)$ wurde in Top. I, Lemma 6.9 bestimmt. Bestimmen Sie nun Erzeuger von $H_1(D^2, S^1; R)$, von $H_1(S^2, D^2_-; R)$, von $H_2(S^2, \{p\}; R)$, u.s.w.)

Aufgabe 3

Stellen Sie den topologischen Raum $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ als CW-Komplex dar und berechnen Sie seine zelluläre Homologie.

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Sei $\widetilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ eine normale Überlagerung einer n-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit X und R ein kommutativer Ring mit Eins.

(a) Zeigen Sie für alle $x \in \widetilde{X}$ die Existenz eines R-Modul-Isomorphismus $H_n(\widetilde{X}, \widetilde{X} \setminus \{x\}; R) \xrightarrow{\phi_x} H_n(X, X \setminus \{\pi(x)\}; R)$, so dass $\phi_{\gamma(x)} \circ H_n(\gamma) = \phi_x$ für alle Decktransformationen γ von π gilt.

(b) Zeigen Sie: hat $\widetilde{X}$ eine $\mathbb{Z}$-Orientierung $\hat{\mu}$, so hat X ebenfalls eine $\mathbb{Z}$-Orientierung, sobald alle Decktransformationen von π die Orientierung von $\widetilde{X}$ erhalten, d.h. (in den obigen Bezeichnungen), falls $H_n(\gamma)(\hat{\mu}_x) = \hat{\mu}_{\gamma(x)}$ für alle $x \in X$ gilt.

(c) *Anwendung*: Ziel dieser Teilaufgabe ist es, zu zeigen, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ mit n ungerade $\mathbb{Z}$-orientierbar ist.

  i) Zeigen Sie, dass für jedes $p \in S^n$ die Inklusion $(S^n, \varnothing) \subset (S^n, S^n \setminus \{p\})$ einen Isomorphismus von R-Moduln $H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n, S^n \setminus \{p\})$ induziert.

  ii) Zeigen Sie, dass die Antipodenabbildung $a = -\mathrm{Id}_{S^n}$ homotop zu Id_{S^n} ist, falls n ungerade ist.

  iii) Folgern Sie aus den beiden ersten Teilaufgaben, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ mit n ungerade $\mathbb{Z}$-orientierbar ist.

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 12.5.2011*** *vor der Vorlesung.*