Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux

SS 2011
12.5.2011

Topologie II
2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Für einen R-Modul L bezeichne $L^* := \mathrm{Hom}_R(L, R)$ den dualen Modul.

(a) Zeigen Sie, dass die duale Sequenz $0 \longrightarrow P^* \xrightarrow{g^*} N^* \xrightarrow{f^*} M^*$ ebenfalls exakt ist. Hierbei ist $f^*(\theta) = \theta \circ f$ für alle $\theta \in N^*$ (analoge Definition für g^*).

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die zur kurzen exakten Sequenz $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n \cdot \mathrm{Id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{Proj.}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ gehörige duale Sequenz und zeigen Sie, dass sie nicht exakt ist.

Aufgabe 2

Seien X_1, X_2 offene Teilmengen eines topologischen Raumes X.

(a) Zeigen Sie, dass die Inklusionen $(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$ und $(X_2, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1)$ Ausschneidungen sind (d.h., die in Homologie induzierten Modulhomomorphismen sind Isomorphismen).

(b) Bestimmen Sie die zu den Tripeln $\mathcal{T}_1 := (X, X_1, X_1 \cap X_2)$ und $\mathcal{T}_2 := (X, X_1 \cup X_2, X_2)$ gehörigen langen exakten Homologiesequenzen und zeigen Sie, dass die Inklusion $\mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ einen Morphismus von Kettenkomplexen zwischen diesen langen exakten Sequenzen definiert.

(c) Nutzen Sie das Barratt-Whitehead-Lemma (siehe Aufgabe 3 im Blatt 13 aus der Topologie I), um eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H_q(X, X_1 \cap X_2) \to H_q(X, X_1) \oplus H_q(X, X_2) \to H_q(X, X_1 \cup X_2) \to H_{q-1}(X, X_1 \cap X_2) \to \ldots$$

zu konstruieren. *Diese Sequenz heißt die zur Triade* (X, X_1, X_2) *gehörige relative Mayer-Vietoris-Sequenz.*

Aufgabe 3

Sei X eine n-dimensionale zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit und $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$. Man nehme an, X trage eine $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$-Orientierung.

(a) Wie in der Vorlesung bezeichne $X_R \xrightarrow{\pi_R} X$ die Überlagerung mit Fasern $\pi_R^{-1}(\{x\}) = H_n(X, X \smallsetminus \{x\}; R)$ (für einen kommutativen Ring mit Eins R) und $\widetilde{X} \longrightarrow X$ die $\mathbb{Z}$-Orientierungsüberlagerung. Zeigen Sie, dass die Verkettung der natürlichen Abbildungen $\widetilde{X} \longrightarrow X_{\mathbb{Z}} \longrightarrow X_{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ injektiv ist und mit den Projektionen kommutiert.

(b) Leiten Sie daraus her, dass $\widetilde{X}$ nicht zusammenhängend ist und dass X dann $\mathbb{Z}$-orientierbar ist.

Aufgabe 4
Sei G eine topologische Gruppe, die gleichzeitig eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Ziel der Aufgabe ist es, zu zeigen, dass G dann R-orientierbar ist.

(a) Sei $e \in G$ das neutrale Element und $L_g : G \longrightarrow G,\ h \longmapsto gh$ die zu einem Element $g \in G$ gehörige Linksverschiebung in G. Man fixiere einen Erzeuger $\mu \in H_n(G, G \setminus \{e\}; R)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $o : G \longrightarrow \coprod_{g \in G} H_n(G, G \setminus \{g\}; R),\ g \longmapsto H_n(L_g)(\mu)$ wohldefiniert ist und dass $o(g)$ eine lokale R-Orientierung von G in g ist für alle $g \in G$.

(b) Sei B ein schöner Ball um e. Zeigen Sie die Existenz eines schönen Balles $\widetilde{B}$ um e mit $\{g^{-1}h \mid g, h \in\} \widetilde{B}\} \subset B$.

(c) Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} (G, G \setminus B) & \xrightarrow{Inkl.} & (G, G \setminus \widetilde{B}) & \xrightarrow{Inkl.} & (G, G \setminus \{e\}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & & & & \downarrow{\scriptstyle L_g} \\ (G, G \setminus B) & \xrightarrow{L_g} & (G, G \setminus \widetilde{B}) & \xrightarrow{Inkl.} & (G, G \setminus \{g\}) \end{array}$$

wohldefiniert ist und kommutiert.

(d) Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow \widetilde{B}$ eine stetige Abbildung mit $\gamma(0) = e$ und $\gamma(1) = g$. Zeigen Sie, dass der induzierte Homomorphismus $H_n(L_{\gamma(t)}) : H_n(G, G \setminus B; R) \longrightarrow H_n(G, G \setminus \widetilde{B}; R)$ nicht von t abhängt.

(e) Leiten Sie daraus her, dass o die lokale Konsistenzbedingung erfüllt.

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 19.5.2011*** *vor der Vorlesung.*