Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux

SS 2011
19.5.2011

Topologie II
3. Übungsblatt

Aufgabe 1 *(Orientierungsvergleich Differentialgeometrie und Topologie)*

(a) Bestimmen Sie die Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

(b) Die Gruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ operiert mit der üblichen Multiplikation auf dem topologischen Paar $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Bestimmen Sie die davon induzierte Operation von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ auf $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R)$.

(c) Für einen n-dimensionalen reellen Vektorraum V sei Or(V) die Menge der Zusammenkomponenten von $(\Lambda^n V) \setminus \{0\}$. Konstruieren Sie nun für jeden solchen Raum V einen Isomorphismus von $\mathrm{Or}(V)$ auf die Erzeuger von $H_n(V, V \setminus \{0\}; \mathbb{Z})$. Dieser Isomorphismus soll natürlich sein in dem Sinne, dass jeder Isomorphismus $f : V \to \widetilde{V}$ ein kommutierendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Or(V)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Or}(\widetilde{\mathrm{V}})] \arrow[d] \\
H_n(V, V \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \arrow[r] & H_n(\widetilde{V}, \widetilde{V} \setminus \{0\}; \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

induziert.

Aufgabe 2
Sei X eine kompakte zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: ist der von der Inklusion $(X, \varnothing) \longrightarrow (X, X \setminus \{x\})$ induzierte Modulhomomorphismus $H_n(X) \xrightarrow{\mu_X^x} H_n(X, X \setminus \{x\})$ ein Isomorphismus für ein $x \in X$, so ist es ein Isomorphismus für alle $x \in X$ und X ist orientierbar.

Aufgabe 3
Sei X eine n-dimensionale kompakte topologische Mannigfaltigkeit. Zu einem Punkt $x_0 \in X$ wählen wir einen Homöomorphismus $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, U offene Umgebung von x_0, $\phi(x_0) = 0$.
Sei $S := \phi^{-1}(S^{n-1})$ der Rand des schönen Balls $B = \phi^{-1}(B^n)$. Sei ψ ein Homöomorphismus von $D^n = \overline{B^n}$ auf den Standard-Simplex Δ^n.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma := (\psi \circ \phi|_{\overline{B}})^{-1} \in s_n(\overline{B}) \subset S_n(\overline{B})$ einen Erzeuger von $H_n(\overline{B}, S)$ und $\partial\sigma$ einen Erzeuger von $H_{n-1}(S)$ repräsentiert.

(b) Angenommen die von der Inklusion induzierte Abbildung $H_{n-1}(S) \longrightarrow H_{n-1}(X \setminus B)$ sei der Nullhomomorphismus. Zeigen Sie die Existenz von $z \in S_n(X \setminus B)$ mit $\partial\sigma = \partial z$.

(c) Wir setzen $w := \sigma - z$. Definieren Sie mit Hilfe der Klasse $[w] \in H_n(X)$ eine Orientierung auf X.

Aufgabe 4
Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $n \geq 2$ und $x \in X$ ein Punkt. Zeigen Sie: X ist genau dann orientierbar, wenn $X \setminus \{x\}$ orientierbar ist.

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 26.5.2011*** *vor der Vorlesung.*