Universität Regensburg, Mathematik SS 2011
Prof. Dr. Bernd Ammann 26.5.2011
Dr. Nicolas Ginoux

Topologie II
4. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei X ein topologischer Raum und R ein kommutativer Ring mit Eins.

(a) Es bezeichne $(X_i)_{i\in I}$ die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X. Zeigen Sie für jedes q die Existenz eines R-Modulisomorphismus $H^q(X;R) \longrightarrow \prod_{i\in I} H^q(X_i;R)$.

(b) Zeigen Sie: ist X nichtleer und wegzusammenhängend, so gelten $H^0(X;R) \cong R$ und $H^0(X,A;R) = 0$ für jede nichtleere Teilmenge A von X.

Aufgabe 2
Sei (X,A) ein topologisches Paar mit $A \neq \varnothing$ und R ein kommutativer Ring mit Eins. Man wähle einen beliebigen Punkt $p \in X$ und definiere die R-Moduln $H^{q\sharp}(X;R)$ und $H^{q\sharp}(X,A;R)$ durch

$$H^{q\sharp}(X;R) := \begin{cases} H^q(X;R) & \text{für } q \neq 0 \\ H^0(X;R)/\mathrm{Im}(H^0(\pi)) & \text{für } q = 0 \end{cases}$$

bzw. $H^{q\sharp}(X,A;R) := H^q(X,A;R)$, wobei $H^0(\pi) : H^0(\{p\};R) \longrightarrow H^0(X;R)$ der von der konstanten Abbildung $X \xrightarrow{\pi} \{p\}$ induzierte Modulhomomorphismus ist. Geben Sie die dazu gehörige lange exakte Kohomologiesequenz an, und beweisen Sie, dass es eine exakte Sequenz ist.

Aufgabe 3
Zeigen Sie: jeder topologische Tripel (X,B,A) induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H^q(X,B) \longrightarrow H^q(X,A) \longrightarrow H^q(B,A) \longrightarrow H^{q+1}(X,B) \longrightarrow \ldots$$

Aufgabe 4
Seien X_1, X_2 offene Teilmengen eines topologischen Raumes X. Beweisen Sie die Existenz einer langen exakten Kohomologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H^q(X_1 \cup X_2) \longrightarrow H^q(X_1) \oplus H^q(X_2) \longrightarrow H^q(X_1 \cap X_2) \longrightarrow H^{q+1}(X_1 \cup X_2) \longrightarrow \ldots$$

(Hinweis: zeigen Sie, dass die Inklusion $(X_2, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X_1 \cup X_2, X_1)$ eine Ausschneidung ist.)

Abgabe der Lösungen: ***Mittwoch 1.6.2011*** *bis 12 Uhr bei Frau Bonn (M217).*