Universität Regensburg, Mathematik SS 2011
Prof. Dr. Bernd Ammann 1.6.2011
Dr. Nicolas Ginoux

Topologie II
5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei X ein topologischer Raum und $0 \longrightarrow R_1 \longrightarrow R_2 \longrightarrow R_3 \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen.

(a) Zeigen Sie, dass eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen $0 \longrightarrow S_\bullet(X, R_1) \longrightarrow S_\bullet(X, R_2) \longrightarrow S_\bullet(X, R_3) \longrightarrow 0$ existiert.

(b) Leiten Sie daraus her, dass für jedes $q \in \mathbb{Z}$ ein Gruppenhomomorphismus $\beta_q : H_q(X, R_3) \longrightarrow H_{q-1}(X, R_1)$ so existiert, dass die lange Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H_q(X, R_1) \longrightarrow H_q(X, R_2) \longrightarrow H_q(X, R_3) \xrightarrow{\beta_q} H_{q-1}(X, R_1) \longrightarrow \ldots$$

exakt ist.

(c) Gibt es eine ähnliche Konstruktion in Kohomologie? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2

Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ bezeichne $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ den n-dimensionalen reellprojektiven Raum. Mittels simplizialer Homologie und der Darstellung $\mathbb{R}\mathrm{P}^n = \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \cup_f D^n$ (siehe Topologie I) kann man die ganzzahlige singuläre Homologie von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ berechnen: sie ist gegeben durch

$$H_q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } q = 0 \\ \mathbb{Z} & \text{für } q = n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}/_2 & \text{für } 0 < q < n,\ q \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(M, N)$ für $M, N \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/_2\}$.

(b) Bestimmen Sie $H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{Z})$.

(c) Bestimmen Sie $H^q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{Z}/_2)$ und $H_q(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{Z}/_2)$.

Aufgabe 3

Man betrachte $\mathbb{Z}_2$ als $\mathbb{Z}_4$-Modul.

(a) Konstruieren Sie eine Auflösung von $\mathbb{Z}_2$ durch freie $\mathbb{Z}_4$-Moduln.

(b) Leiten Sie daraus her, dass $\mathrm{Ext}^q_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \neq 0$ für alle q gilt.

Aufgabe 4
Sei X ein topologischer Raum und $\delta : S^{\bullet}(X) \longrightarrow S^{\bullet+1}(X)$ die Korandabbildung. Beweisen Sie folgende Eigenschaften des Cup-Produktes $\cup$:

(a) Das Cup-Produkt ist assoziativ.

(b) Für alle $\alpha \in S^p(X)$ und $\beta \in S^q(X)$ gilt $\delta(\alpha \cup \beta) = (\delta\alpha) \cup \beta + (-1)^p \alpha \cup (\delta\beta)$.

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 9.6.2011*** *vor der Vorlesung.*