Universität Regensburg, Mathematik SS 2011
Prof. Dr. Bernd Ammann 9.6.2011
Dr. Nicolas Ginoux

Topologie II
6. Übungsblatt

Aufgabe 1
Sei $f : (X, A) \longrightarrow (X', A')$ ein Homomorphismus von topologischen Paaren (d.h., $f : X \longrightarrow X'$ ist stetig mit $f(A) \subset A'$). Zeigen Sie, dass dann $H^*(f) : H^*(X', A') \longrightarrow H^*(X, A)$ ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 2

(a) Berechnen Sie die $\mathbb{Z}/_2$-Kohomologie von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \vee S^3$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Cup-Produkts, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \vee S^3$ und $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ nicht homotopieäquivalent zueinander sind.

Aufgabe 3
Sei M_g eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht g. Ziel der Aufgabe ist es, den $\mathbb{Z}$-Kohomologiering $H^*(M_g; \mathbb{Z})$ zu bestimmen.

(a) Zeigen Sie: ist X ein topologischer Raum mit $X = \coprod_{i \in I} X_i$, so sind die Ringe $H^*(X)$ und $\prod_{i \in I} H^*(X_i)$ isomorph.

(b) Zeigen Sie, dass $H^1(M_g; \mathbb{Z})$ als $\mathbb{Z}$-Modul zu $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1(M_g), \mathbb{Z})$ isomorph ist.

(c) Man schreibe M_g als zusammenhängende Summe von g Tori, $M_g = \mathbb{T}^2 \sharp \cdots \sharp \mathbb{T}^2$. Für jedes $1 \leq i \leq g$ sei $f_i : M_g \longrightarrow \mathbb{T}^2$ die Abbildung, die den i-ten Henkel auf sich selber und dessen Komplement auf einen Punkt abbildet. Zeigen Sie, dass $H^1(f_i; \mathbb{Z}) : H^1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(M_g; \mathbb{Z})$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus ist. *(Hinweis: benutzen Sie das Ausschneidungsaxiom, das Homotopieaxiom und geeignete lange exakte Kohomologiesequenzen.)*

(d) Zeigen Sie: $H^1(M_g; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^{g} \operatorname{im} H^1(f_i; \mathbb{Z})$ *(Hinweis: Nutzen Sie den Isomorphismus in (b), seine Natürlichkeit bezüglich der Abbildung f_i und die bereits bekannte Struktur von $\pi_1(M_g)$.)*

Aufgabe 4 [*Fortsetzung Aufgabe 3*]

(a) Zeigen Sie, dass $H^2(f_i;\mathbb{Z})$ für alle i ein Isomorphismus ist.
(Hinweis: Man zeige zunächst, dass $H_2(f_i;\mathbb{Z})$ bijektiv ist, indem man zweimal geschickt ausschneidet und die Tatsache nutzt, dass M_g entlang beliebiger Teilmengen orientierbar ist.)

(b) Sei $\alpha \in \operatorname{im} H^1(f_i;\mathbb{Z})$, $\beta \in \operatorname{im} H^1(f_j;\mathbb{Z})$, $i \neq j$. Berechnen Sie $\alpha \cup \beta$.

(c) Leiten Sie die Ringstruktur von $H^*(M_g;\mathbb{Z})$ daraus her.

(d) Wenn wir Basen von $H^2(M_g;\mathbb{Z})$ und $H^1(M_g;\mathbb{Z})$ wählen, so wird $\cup : H^1(M_g;\mathbb{Z}) \times H^1(M_g;\mathbb{Z}) \to H^2(M_g;\mathbb{Z})$ durch eine Matrix dargestellt. Berechnen Sie deren Determinante. Wie stark hängt diese Determinante von der Wahl der obigen Basen ab?

(e) *(knifflig aber recht elementar)*
Sei $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ schiefsymmetrisch mit $\det A = 1$. Dann stellt A das Cup-Produkt einer geschlossenen orientierbaren Fläche im Sinne von Teilaufgabe (d) dar.

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 16.6.2011*** *vor der Vorlesung.*