Universität Regensburg, Mathematik SS 2011
Prof. Dr. Bernd Ammann 30.6.2011
Dr. Nicolas Ginoux

Topologie II
9. Übungsblatt

Aufgabe 1
Seien X und Y topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine eigentliche stetige Abbildung (zur Erinnerung heißt f genau dann eigentlich, wenn $f^{-1}(K)$ kompakt ist für alle Kompakta $K \subset Y$). Zeigen Sie, dass f einen Modulhomomorphismus $H_c^q(f) : H_c^q(Y) \longrightarrow H_c^q(X)$ induziert für alle $q \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2
Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es keine orientierungsumkehrende Homotopieäquivalenz $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^{2n}$ gibt.

Aufgabe 3
Beweisen Sie das Ausschneidungsaxiom in der Homologie mit Hilfe von Proposition 4.15 aus der Vorlesung.

Aufgabe 4
Sei M eine kompakte 3-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Man nehme an, $H_1(M;\mathbb{Z}) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass M orientierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass M eine Homologiesphäre ist, d.h., alle ganzzahligen Homologiegruppen von M sind isomorph zu den entsprechenden Homologiegruppen der 3-dimensionalen Sphäre.

Aufgabe 5
Sei M eine nichtorientierbare kompakte zusammenhängende n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

(a) Sei $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: $H_n(M;\mathbb{Z}/m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{für } m \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } m \text{ ungerade.} \end{cases}$

(b) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie mit Hilfe des universellen Koeffiziententheorems, dass $H^n(M;\mathbb{Z}/p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{für } p = 2 \\ 0 & \text{für } p \neq 2 \end{cases}$ gilt.

(c) Man schreibe $H_{n-1}(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{b_{n-1}} \oplus T_{n-1}$, wobei $T_{n-1} \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}$ der Torsionsanteil von $H_{n-1}(M;\mathbb{Z})$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe des universellen Koeffiziententheorems, dass $p_i = 2$ für alle $1 \leq i \leq k$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass $T_{n-1} \cong \mathbb{Z}/2^\alpha$ gilt für ein $\alpha \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6
In dieser Aufgabe bezeichne $\chi(\cdot)$ die Euler-Charakteristik.

(a) Zeigen Sie, dass $\chi(M) = 0$ für jede kompakte orientierbare ungeradedimensionale topologische Mannigfaltigkeit M gilt.
(Hinweis: Poincaré-Dualität!))

(b) Sei X ein endlicher CW-Komplex und $\widehat{X} \longrightarrow X$ eine k-fache Überlagerung für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\chi(\widehat{X}) = k \cdot \chi(X)$ gilt.
(Hinweis: konstruieren Sie eine CW-Struktur auf $\widehat{X}$.)

(c) Zeigen Sie, dass $\chi(M) = 0$ für jede kompakte nichtorientierbare ungeradedimensionale topologische Mannigfaltigkeit M gilt.
Man akzeptiere ohne Beweis, dass jede kompakte topologische Mannigfaltigkeit die Struktur eines endlichen CW-Komplexes zulässt.

(d) Sei von hier aus M eine nichtorientierbare kompakte zusammenhängende 3-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Leiten Sie aus der letzten Teilaufgabe her, dass $H_1(M;\mathbb{Q}) \neq 0$ gilt.

(e) Folgern Sie, dass $H_1(M;\mathbb{Z})$ und $\pi_1(M)$ unendlich sind.
(Hinweis: nutzen Sie und beweisen Sie $\left(\pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)]\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H_1(M;\mathbb{Q})$.)

Abgabe der Lösungen: ***Donnerstag 14.7.2011*** *vor der Vorlesung.*