Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. Carolina Neira Jiménez

WS 2012/13
15.10.2012

Differentialgeometrie I
Anwesenheitsaufgaben am 17. und am 18.10.2012

Aufgabe 1
Bilden Sie für $A \subset \mathbb{R}$ das Innere und den Abschluss, und zwar bzgl. der Standardtopologie, der diskreten Topologie und der Klumpentopologie auf $\mathbb{R}$, wobei

1. $A = [0, 1]$,
2. $A = (0, 1)$,
3. $A = \mathbb{Z}$,
4. $A = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 2
Es tragen $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ die Standardtopologien. Zeigen Sie, dass die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ mit der Standardtopologie übereinstimmt.

Aufgabe 3
Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, "$\sim$" eine Äquivalenzrelation auf X, $X/\sim = \{[x] \,|\, x \in X\}$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : X \to X/\sim$, $\pi(x) = [x]$.

1. Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie $\mathcal{O}'$ auf $X/\sim$ tatsächlich eine Topologie ist.
2. Zeigen Sie: $\pi : X \to X/\sim$ ist stetig.
3. Sei $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein weiterer topologischer Raum und $f : X/\sim \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:
$$f : X/\sim \to Y \text{ ist stetig} \quad \Longleftrightarrow \quad f \circ \pi : X \to Y \text{ ist stetig.}$$
4. Sei $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie. Wir definieren
$$s \sim t \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} s = t \text{ oder} \\ s = 0 \text{ und } t = 1, \text{ oder} \\ s = 1 \text{ und } t = 0. \end{cases}$$
Zeigen Sie: $[0, 1]/\sim$ mit der Quotiententopologie ist homöomorph zu $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ mit der Standardtopologie.

Aufgabe 4
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Hausdorff-Raum, sei p ein weiterer Punkt, $p \notin X$. Setze $X^+ := X \cup \{p\}$. Wir definieren

$$\mathcal{O}_{X^+} := \mathcal{O}_X \cup \left\{ (X \setminus K) \cup \{p\} \;\middle|\; K \subset X \text{ kompakt} \right\} .$$

Zeigen Sie:

1. $(X^+, \mathcal{O}_{X^+})$ ist ein topologischer Raum.
2. X^+ ist kompakt.
3. X^+ ist Hausdorffsch genau dann, wenn X *lokalkompakt* ist, d. h. jeder Punkt in x besitzt eine kompakte Umgebung.
4. $(-1,1)^+$ ist homöomorph zu S^1.

Man nennt X^+ die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X.

Aufgabe 5
Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen.

1. Ist das Urbild jeder kompakten Teilmenge von Y eine kompakte Teilmenge von X? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Im Falle $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ nehmen wir zusätzlich voraus, dass $|f(x)| \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass dann $f^{-1}(K)$ kompakt ist für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^m$.

Aufgabe 6
Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.

1. Zeigen Sie, dass das Bild einer zusammenhängenden Teilmenge von X unter f wieder zusammenhängend ist.
2. Ist das Urbild jeder zusammenhängenden Teilmenge von Y unter f wieder zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7
Die Sinuskurve der Topologen ist ein topologischer Raum, definiert als der Graph der Funktion $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ im halboffenen Intervall $(0,1]$, zusammen mit $\{0\} \times [-1,1]$, mit der Standard-Unterraumtopologie:

$$T = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x \in (0,1] \right\} \bigcup \{(0,y) : y \in [-1,1]\}.$$

Zeigen Sie:

1. T ist zusammenhängend.
2. T ist weder lokal zusammenhängend noch wegzusammenhängend.

Aufgabe 8

Sei Y eine mit der Relativtopologie versehene nichtleere Teilmenge eines topologischen Raumes X und $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

1. Gibt es immer eine stetige Abbildung $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass $\widetilde{f}_{|Y} = f$ gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Zeigen Sie, dass im Fall $Y = S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ und $X = \mathbb{R}^{n+1}$ jede stetige Abbildung $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ sich zu einer stetigen Abbildung $\widetilde{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen lässt.