Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux, Dr. Carolina Neira Jiménez
WS 2012/13
15.10.2012

Differentialgeometrie I
1. Übungsblatt

Aufgabe 1

(a) Sei M eine glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$. (Wir benutzen „glatt" immer im Sinne von C^∞.) Wenden Sie den Satz über implizite Funktionen an, um zu zeigen, dass M eine n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit ist.

(b) Sei nun $M := S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ die n-Sphäre. Geben Sie für jeden Punkt $p \in S^n$ eine offene Umgebung V von p in S^n an und einen Homöomorphismus von V nach $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ die Menge der 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n+1}$.

(a) Man identifiziere $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ mit der Quotientenmenge ${\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}/{\sim}$, wobei $x \sim y \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^\times$ s.d. $x = \lambda y$, und versehen es mit der Quotiententopologie. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ein kompakter Hausdorff-Raum ist, der das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$U_j := \{[x] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid x_j \neq 0\} \xrightarrow{\varphi_j} \mathbb{R}^n, \quad [x] \longmapsto \frac{1}{x_j}(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{n+1})$$

(mit $1 \leq j \leq n+1$), wohldefinierte Homöomorphismen sind (mit "$\widehat{x_j}$" ist "ohne x_j" gemeint).

(c) Zeigen Sie, dass dieser Atlas C^ω ist und leiten Sie daraus her, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ eine Struktur einer n-dimensionalen C^ω-Mannigfaltigkeit trägt.

Aufgabe 3

Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty, \omega\}$. Zeigen Sie, dass jeder C^k-Atlas $\mathcal{A}$ in genau einer C^k-Struktur $\overline{\mathcal{A}}$ enthalten ist. Angenommen $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind zwei C^k-Atlanten von M. Zeigen Sie: $\overline{\mathcal{A}_1} = \overline{\mathcal{A}_2}$ genau dann, wenn alle Karten in $\mathcal{A}_1$ mit allen Karten in $\mathcal{A}_2$ C^k-verträglich sind.

Aufgabe 4
Ein topologischer Raum X heißt genau dann *wegzusammenhängend*, wenn je zwei Punkte aus X durch einen stetigen Weg in X verbunden werden können. Ein topologischer Raum X heißt genau dann *lokal wegzusammenhängend*, wenn jeder Punkt aus X eine Basis von wegzusammenhängenden Umgebungen besitzt.

1. Zeigen Sie, dass jede topologische Mannigfaltigkeit lokal wegzusammenhängend ist.

2. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten eines lokal wegzusammenhängenden topologischen Raumes offen und abgeschlossen sind.

3. Leiten Sie daraus her, dass die Zusammenhangskomponenten einer m-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit selbst m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten sind.

Abgabe der Lösungen: ***Montag, den 22.10.2012*** *in der Vorlesung.*