Universität Regensburg, Mathematik
Prof. Dr. Bernd Ammann
Dr. Nicolas Ginoux

WS 2012/13
22.10.2012

Differentialgeometrie I
2. Übungsblatt

Aufgabe 1
Definieren Sie eine C^k-Struktur auf dem Produkt $M \times N$ zweier C^k-Mannigfaltigkeiten M und N so, dass die Projektionen $M \times N \longrightarrow M$ und $M \times N \longrightarrow N$ C^k-Abbildungen sind.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, wenn jeder Punkt von X eine zu $\mathbb{R}^n$ selbst homöomorphe offene Umgebung besitzt.

Aufgabe 3
Wir betrachten $\mathbb{Z}^n$ als Untergruppe von $\mathbb{R}^n$. Wie in der Gruppentheorie definieren wir die Relation $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$. Der dazu gehörige Quotient $M^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ heißt *n-dimensionaler Torus.*

(a) Zeigen Sie, dass M^n ein kompakter Hausdorff-Raum ist.

(b) Konstruieren Sie einen C^∞-Atlas auf M^n, so dass die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n$ glatt und lokal glatt umkehrbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass M^n diffeomorph zu $\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n\text{-mal}}$ ist.

(d) Zeigen Sie im Fall $n = 2$, dass M^2 diffeomorph zum Drehtorus $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$ ist.

Aufgabe 4
Es bezeichnen $\mathbb{R}^{n\times n}$ den Raum aller reellen $n \times n$-Matrizen und $\mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ den Unterraum aller symmetrischen $n \times n$-Matrizen.

1. Sei $f : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$, $A \longmapsto {}^tAA$, wobei ${}^tA$ die zu A transponierte Matrix bezeichnet. Zeigen Sie, dass die Identitätsmatrix $\mathbb{1}_n$ ein regulärer Wert von f ist.
   Zur Erinnerung: $c \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ *ist genau dann ein regulärer Wert, wenn für jedes* $x \in f^{-1}(\{c\})$ *das Differential* $d_x f$ *vollen Rang hat.*

2. Bestimmen Sie $\mathrm{Ker}(d_{\mathbb{1}_n} f)$.

3. Folgern Sie, dass die orthogonale Gruppe O_n eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist.

4. Bestimmen Sie eine Karte von O_n, die $\mathbb{1}_n$ enthält.
   Hinweis: betrachten Sie die Exponentialabbildung.

Abgabe der Lösungen: ***Montag, den 29.10.2012*** *in der Vorlesung.*