

# Kapitel 4

## Klassifikation von Flächen und Satz von Gauß-Bonnet

Dieses Teil-Skript wurde von Prof. B. Ammann im Rahmen der Vorlesung Einführung in die Differentialgeometrie, Sommersemester 2009 geschrieben. Version vom 30.1.2013.

### 4.1 Mannigfaltigkeiten mit Rand

**Definition 4.1.1.** Eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  mit Rand ist ein topologischer Hausdorff-Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, zusammen mit einer Menge  $\{\phi_i | i \in I\}$  von Homöomorphismen  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ , so dass  $U_i$  offen in  $\mathbb{R}^{m-1} \times [0, \infty)$  und  $V_i$  offen in  $M$ , und so dass alle Abbildungen

$$(\phi_i)^{-1} \circ \phi_j : (\phi_j)^{-1}(V_i \cap V_j) \rightarrow (\phi_i)^{-1}(V_i \cap V_j)$$

Diffeomorphismen sind, und so dass  $M = \bigcup_{i \in I} V_i$ .

Die  $\phi_i$  sind heißen Parametrisierungen.

Sei  $p \in M$  dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- Es gibt eine Parametrisierung  $\phi : U \rightarrow V$  mit  $\phi^{-1}(p) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ ,
- Für jede Parametrisierung  $\phi : U \rightarrow V$  mit  $p \in V$  gilt  $\phi^{-1}(p) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ .

Der Rand  $\partial M$  von  $M$  ist die Menge aller Punkte  $p \in M$ , die eine dieser äquivalenten Eigenschaften erfüllen.

Im Fall  $m = 2$  nennt man  $M$  eine Fläche (mit Rand).

Beispiel: (1)  $\{(x, y) | y \geq 0\}$  ist eine Fläche mit Rand (2)  $\{(x, y, 0) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  ist eine Fläche mit Rand “Untermannigfaltigkeiten mit Rand von (1)  $\mathbb{R}^2$  und (2)  $\mathbb{R}^3$ .”

Man nennt  $M$  eine Mannigfaltigkeit ohne Rand, falls  $M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist und der Rand die leere Menge ist.

Definition: Mannigfaltigkeit = Mannigfaltigkeit ohne Rand

Tangentialraum: Sei  $p \in M \setminus \partial M$ . Der Tangentialraum  $T_p M = \{c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \mid c \text{ ist parametrisierte Kurve mit } c(0) = p\} / \sim$ .

$c_1 \sim c_2$  gdw  $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi^{-1} \circ c_1) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi^{-1} \circ c_2)$

Wie definiert man  $T_p M$  am Rand? Zu jeder Mannigfaltigkeit  $M$  mit Rand gibt es eine Mannigfaltigkeit  $N$ , so dass  $M$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $N$  ist. (Füge einen Kragen um  $\partial M$  hinzu.)

Falls  $p \in \partial M$ , definieren wir  $T_p M := T_p N$ .

Zwei Mannigfaltigkeiten mit Rand sind diffeomorph, falls es eine bijektive glatte Abbildung  $f : M_1 \rightarrow M_2$  gibt, so dass  $f^{-1}$  ebenfalls glatt.

Analog: Flächen mit Ecken: Ersetze oben  $\mathbb{R}^1 \times [0, \infty)$  durch  $[0, \infty) \times [0, \infty)$ .

**Ziel:** Klassifikation von Mannigfaltigkeiten bis auf Diffeomorphie. Meistens betrachtet man nur kompakte Mannigfaltigkeiten.

$m = 1$ : einfach,

$m = 2$ : wird jetzt gemacht,

$m = 3$ : "Geometrisierung", Arbeiten von Perelman, Fields-Medaille (abgelehnt), Clay-Preis  $10^6$  Dollar (quasi abgelehnt)

$m = 4$ : sehr schwierig bis unmöglich

Erster Schritt: Zerlege in Zusammenhangskomponenten.

**Satz 4.1.2** (Klassifikation der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand).

Sei  $M$  eine zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist  $M$  diffeomorph zu  $S^1$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $[0, 1]$  oder  $[0, \infty)$ .

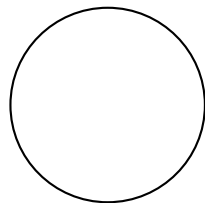
Ein Riemannsche Metrik auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist gegeben durch eine Familie von Skalarprodukten  $g_p$  auf  $T_p M$ ,  $p \in M$ , so dass für alle Parametrisierungen  $\phi$  und alle zugehörigen Koordinatenvektorfelder  $\frac{\partial}{\partial u_i}$  gilt

$$g_{ij}(\phi^{-1}(p)) = g\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial u_j}\Big|_p\right)$$

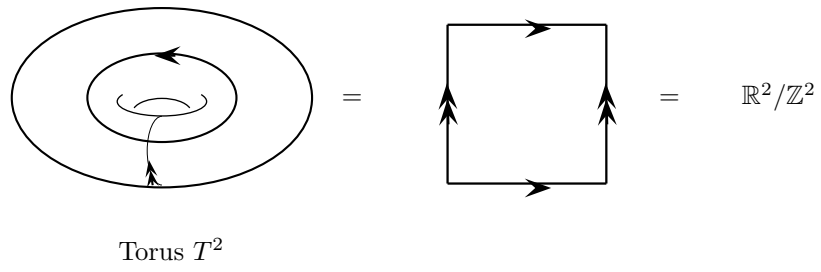
ist eine glatte Funktion. Dies ist äquivalent dazu, dass  $g(X, Y) \in C^\infty(M)$  für alle glatten Vektorfelder  $X$  und  $Y$  auf  $M$ .

## 4.2 Flächen

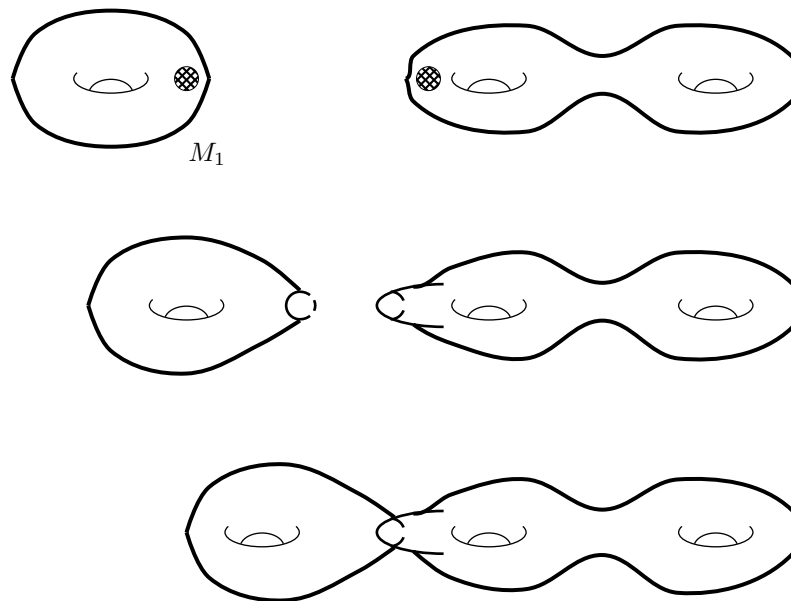
Beispiele:  $S^2$ , Torus,  $\mathbb{R}P^2$ .



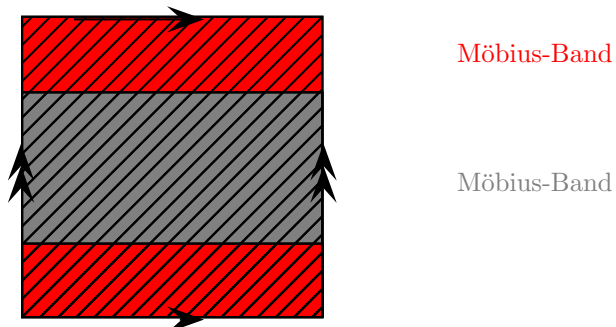
Sphäre  $S^2$



Zusammenhängende Summe: Nehme zwei Flächen  $M_1$  und  $M_2$ , entferne je zwei Kreisscheiben, klebe die neuen Ränder zusammen.



Kleinsche Fläche =  $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$



Kleinsche Flasche

Einige wichtige Resultate der Flächentheorie (ohne Beweis):

**Satz 4.2.1.** *Sei  $M$  eine orientierbare kompakte zusammenhängende Fläche (ohne Rand), dann ist  $M$  diffeomorph zur zusammenhängenden Summe von  $S^2$  mit  $k$  Tori,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Man nennt  $k$  das Geschlecht der Fläche  $M$ .*

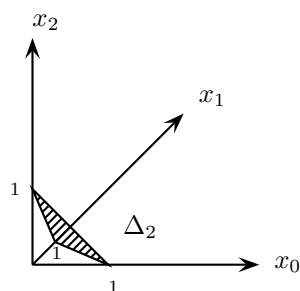
**Satz 4.2.2.** *Sei  $M$  eine nicht-orientierbare kompakte zusammenhängende Fläche (ohne Rand), dann ist  $M$  diffeomorph zur zusammenhängenden Summe von  $S^2$  mit  $k$   $\mathbb{R}P^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Man nennt  $k$  das Geschlecht der Fläche  $M$ .*

Man erhält die Klassifikation aller kompakten Flächen mit Rand, in dem man von diesen Typen endlich viele offene Kreisscheiben entfernt.

**Satz 4.2.3.** *Auf jeder kompakten Fläche (ohne Rand) gibt es eine riemannsche Metrik mit konstanter Gauß-Krümmung. Hierbei kann man  $K = 1$  auf  $S^2$  und  $\mathbb{R}P^2$ ,  $K = 0$  auf dem Torus und der Kleinschen Flasche und  $K = -1$  auf allen anderen Flächen erreichen.*

### 4.3 Triangulierungen von Flächen

Standard  $k$ -Simplex  $\Delta_k := \{(x_0, \dots, x_k) \mid \sum x_i = 1\}$ .  $\Delta_0$  ist einfach ein Punkt,  $\Delta_1$  ist diffeomorph zu  $[0, 1]$ .  $\Delta_2$  ist ein Dreieck,  $\Delta_3$  das Innere mit Rand eines Tetraeders, etc-



$\Delta_2$  ist eine Fläche mit Ecken.

$k$ -Simplex: Abbildung  $\Delta_k \rightarrow M$

**Definition 4.3.1.** Eine glatte Triangulierung einer Fläche  $M$  (mit Rand und mit Ecken) besteht aus Abbildungen  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , so dass

- $\sigma_i : \Delta_2 \rightarrow M$  ist glatt und ein Diffeomorphismus auf sein Bild,
- $M = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i(\Delta_2)$
- die Mengen  $\sigma_1(\overset{\circ}{\Delta}_2), \dots, \sigma_n(\overset{\circ}{\Delta}_2)$  sind paarweise disjunkt.

$\sigma_i(\overset{\circ}{\Delta}_2)$  heißen Seitenflächen, die Randkomponenten von  $\sigma_i(\Delta_2)$  heißen Kanten, die Bilder der Ecken heißen Ecken.

**Satz 4.3.2.** Jede kompakte Fläche besitzt eine Triangulierung.

Beweis: kommt noch.

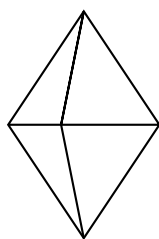
Bem: auch wahr für nicht-kompakte Flächen (lasse unendlich viele Simplizes zu, die aber lokalendlich eingebettet sind), auch für topologische Flächen.

Sei  $M$  trianguliert. Liegt  $p \in M \setminus \partial M$  auf keiner Simplex-Ecke, so liegt es auf den Kanten von genau zwei Simplizes.

Liegt  $p \in \partial M$  auf keiner Simplex-Ecke, so liegt es auf den Kanten von genau einem Simplex.

Zerteilt man einen oder mehrere 2-Simplex einer Triangulierung in Teil-Simplizes, so nennt sich dies eine Verfeinerung der Triangulation. Man kann jede Triangulierung so verfeinern, dass die Ecke eines Simplizes  $\sigma_i$  nicht auf der Kante eines anderen Simplizes liegt.

Beispiel.



Wir nehmen ab sofort immer an, dass jede Triangulierung diese schöne Eigenschaft hat.

Somit

$M := \text{Das Innere der Seitenflächen} \dot{\cup} \text{Das Innere der Kanten} \dot{\cup} \text{Ecken}$

$f$  := Anzahl der Seitenflächen

$k$  := Anzahl der Kanten

$e$  := Anzahl der Ecken

Sei  $\{\sigma|_i \in I\}$  die Triangulierung einer Fläche mit Rand und Ecken. Dann definieren wir die Euler-Charakteristik

$$\chi := f - k + e$$

**Satz 4.3.3.** *Die Euler-Charakteristik einer triangulierten kompakten Fläche  $M$  mit Rand und Ecken hängt nur von  $M$ , aber nicht von der Triangulierung ab.*

Beweis: folgt aus dem Satz von Gauss-Bonnet. Einfachster Fall

**Satz 4.3.4** (Gauß-Bonnet, globale Version ohne Rand). *Sei  $M$  eine kompakte Fläche ohne Rand, mit riemannscher Metrik. Dann gilt*

$$\int_M K \, \text{dvol} = 2\pi\chi(M)$$

Da das Integral unabhängig von der Triangulierung ist, ist die Euler-Charakteristik von der Triangulierung unabhängig.

Beispiele:  $\chi(S^2) = 2$ ,  $\chi(\text{Kreisscheibe}) = \chi(\Delta_2) = 1$ ,  $\chi(T^2) = 0$ ,  $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$ ,  $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$ .

**Folgerung 4.3.5** (Eulerscher Polyedersatz). *Zerlegen wir  $S^2$  in  $f$  Polygone, die zusammen  $k$  Kanten und  $e$  Ecken haben, so gilt*

$$f - k + e = 2.$$

Beispiel: Ist  $P$  ein regelmässiges Polyeder, dessen Rand aus Dreiecken besteht, von denen je 5 in jeder Ecke sich treffen. Dann gilt:  $3f = 2k$ ,  $2k = 5e$ . Also

$$f - \frac{3}{2}f + \frac{3}{5}f = 2,$$

dies ergibt  $f = 20$ , der 20-Flächner, Ikosaeder.

## 4.4 Divergenzsatz

Sei  $X$  ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  mit riemannscher Metrik und kovarianter Ableitung  $\nabla$ . Für jedes  $p \in T_p M$  ist  $T_p M \ni Y \mapsto \nabla_Y X \in T_p M$  ein Endomorphismus von  $T_p M$ . Definiere

$$\text{div } X \in C^\infty(M), \quad \text{div } X(p) := \text{Spur}(T_p M \ni Y \mapsto \nabla_Y X \in T_p M).$$

Sei  $f$  eine Funktion. Dann ist  $X = \text{grad } f$  das eindeutige Vektorfeld mit  $g(X, Z) = \partial_Z f = d_p f(Z)$  für alle  $z \in T_p M$  und alle  $p \in M$ .

**Satz 4.4.1** (Divergenzsatz). *Sei  $X$  ein glattes Vektorfeld auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  mit Rand  $\partial M$  (und Ecken). Sei  $\nu$  das äußere Einheitsnormalenvektorfeld auf dem Rand, d. h.  $\nu(p) \in T_p M \cap (T_p \partial M)^\perp$  ist für alle  $p \in \partial M$  definiert,  $|\nu(p)| = 1$ , und  $\nu(p)$  zeigt aus dem Gebiet raus. Dann gilt*

$$\int_M \operatorname{div} X \, \operatorname{dvol} = \int_{\partial M} g(X, \nu) \, \operatorname{dvol}$$

Beweis: Analysis

## 4.5 Satz von Gauß-Bonnet, lokale Version

Sei  $M$  eine orientierte Fläche mit riemannscher Metrik. Zu  $X \in T_p M$  bezeichnen wir mit  $X^\perp$  den um 90 Grad in positive Richtung gedrehten Vektor in  $T_p M$ .

Sei  $\gamma$  eine Kurve in  $M$ ,  $T(t) := \gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$  der Tangentialvektor. Wir definieren  $N(t) := T(t)^\perp$ . Im Fall  $M = \mathbb{R}^2$  ist dies gerade der Normalenvektor der Kurve im Sinne der Theorie ebener Kurven.

**Bemerkung 4.5.1.** Achtung: Falls  $M$  eine Untermannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^3$  ist, ist  $N(t)$  nicht der Normalenvektor an  $\gamma$  im Sinne des begleitenden Dreibeins, da jener nicht im Allgemeinen nicht tangential ist.

Wir definieren dann die geodätische Krümmung als  $\kappa_g(t) := g(T'(t), N(t))/\|\gamma'(t)\|$ .

**Satz 4.5.2.** *Sei  $M$  eine orientierte Fläche mit Riemannscher Metrik,  $F : P \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus  $F$  eines Polygons  $P$  auf sein Bild in  $M$ . Seien  $\alpha_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , die Außenwinkel und sei  $\kappa_g$  die geodätische Krümmung des in positive Richtung durchlaufenen Randes  $\gamma$ . Dann gilt*

$$\int_{F(P)} K \, dA + \int_\gamma \kappa_g \, d\ell + \sum_{j=1}^k \alpha_j = 2\pi.$$

Hierbei bezeichnet  $dA := \operatorname{dvol}$  auf Flächen und  $d\ell := \operatorname{dvol}$  auf Kurven, in lokalen Parametrisierungen und den üblichen Konventionen

$$\int_{F(U)} K \, dA = \int_U K \circ F \sqrt{|\det g_{ij}|} \, du_1 du_2$$

$$\int_{\gamma([a,b])} \kappa_g \, d\ell = \int_a^b \kappa(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Der obige Satz ist für eine orientierte Fläche formuliert. Der Rand trägt eine hiervon induzierte Orientierung. Ändern wir die Orientierung, dann wird der Rand in andere Richtung durchlaufen, also ändert  $T(t)$  aber weder  $N(t)$  noch  $T'(t)$  das Vorzeichen. Auch  $\kappa_g(t)$  bleibt somit unverändert, und somit auch das Integral  $\int_\gamma \kappa_g \, d\ell$ .



Alle anderen Terme sind offensichtlich orientierungsunabhängig. Wir können somit die Orientierung in der Aussage des obigen Satzes weglassen. Da wir jedoch aus beweistechnischen Gründen die Orientierung nutzen wollen, nehmen wir in diesem Abschnitt an, dass  $M$  orientiert ist.

**Lemma 4.5.3.** *Ist  $X$  ein Vektorfeld und  $Z \in T_p M$ , dann gilt*

$$(\nabla_Z X)^\perp = \nabla_Z(X^\perp).$$

*Beweis:* Bestimme eine parametrisierte Kurve  $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  mit  $c(0) = p$ ,  $c'(0) = Z$ . Wähle eine ONB  $(e_1(0), e_1(0)^\perp)$  von  $T_p M$ . Parallelverschiebung längs  $c$  ergibt einen parallelen Rahmen  $(e_1(t), e_1(t)^\perp)$  längs  $c$ . Schreibe  $X(c(t)) = x_1(t)e_1(t) + x_2(t)e_1(t)^\perp$ . Berechne

$$(\nabla_Z X)^\perp = (x_1'(t)e_1(t) + x_2'(t)e_1(t)^\perp)^\perp = x_1'(t)e_1(t)^\perp - x_2'(t)e_1(t) = \nabla_Z(X^\perp)$$

□

**Definition 4.5.4.** *Sei  $U \subset M$  offen und sei  $E$  ein auf  $U$  definiertes Einheitsvektorfeld. Somit ist  $E^\perp$  ebenfalls Einheitsvektorfeld, und  $(E_p, E_p^\perp)$  ist eine positiv orientierte Ortonormalbasis von  $T_p M$ . Dann definieren ein auf  $U$  definiertes Vektorfeld  $Y$  durch*

$$g(Y, X) := g(\nabla_X E, E^\perp) \quad \forall X \text{ Vektorfeld}$$

Durch Ableiten von  $g(E, E^\perp) = 0$  ergibt sich  $g(\nabla_X E, E^\perp) = -g(E, \nabla_X E^\perp)$ . Durch Ableiten von  $g(E, E) = g(E^\perp, E^\perp) = 1$  ergibt sich  $\nabla_X E \perp E$ , also  $\nabla_X E = g(Y, X)E^\perp$ , analog  $\nabla_X E^\perp = -g(Y, X)E$ .

**Bemerkung 4.5.5.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine stückweise glatte, geschlossene parametrisierte Kurve,  $\gamma$  homotop 0 in  $U$ . (geschlossen bedeutet  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .) Dann ist  $\int_a^b g(Y(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt$  unabhängig von der Wahl von  $E$ .

Der Beweis wird in den Anhang 4.9 verlagert, da diese Aussage im folgenden nicht benötigt wird.

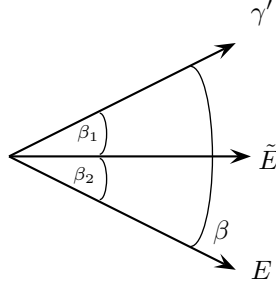
**Lemma 4.5.6.** *Seien  $M, U, E$  und  $Y$  wie oben. Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  eine stückweise glatte parametrisierte Kurve in  $U$ , mit geodätischer Krümmung  $\kappa_g(t)$ . Sei  $\beta(t)$  der von  $E(\gamma(t))$  und  $\gamma'(t)$  eingeschlossene Winkel. Dann gilt*

$$\beta(b) - \beta(a) = \int_a^b \kappa_g(t) \|\gamma'(t)\| dt + \sum_{j=1}^k \alpha_j - \int_a^b g(Y(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt.$$

*Beweis.* Man sieht leicht, dass der Ausdruck  $\int_a^b \kappa_g(t) \|\gamma'(t)\| dt$  unter Parametrisierungswechsel erhalten bleibt. Deswegen können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\gamma$  nach Bogenlänge parametrisiert ist. Es ist klar, dass  $\beta$  in den Unstetigkeitsstellen von  $\gamma'$  jeweils um den Außenwinkel  $\alpha_j$  springt. Sei  $\tilde{E}$  ein Einheitsvektorfeld

längs  $\gamma$  mit  $\nabla_{\gamma'(t)}\tilde{E} = \frac{\nabla}{dt}\tilde{E} = 0$ . Sei  $\beta_1(t)$  der Winkel zwischen  $\tilde{E}(t)$  und  $\gamma'(t)$ , d.h.

$$\gamma'(t) = \cos \beta_1(t)\tilde{E}(t) + \sin \beta_1(t)\tilde{E}(t)^\perp.$$



Also

$$\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = \beta_1'(t) \left( -\sin \beta_1(t)\tilde{E}(t) + \cos \beta_1(t)\tilde{E}(t)^\perp \right) = \beta_1'(t)\gamma'(t)^\perp$$

Für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven  $\gamma$  gilt

$$\kappa_g(t) = g\left(\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t), \gamma'(t)^\perp\right)$$

somit also in diesem Fall  $\kappa_g(t) = \beta_1'(t)$ .

Sei  $\beta_2(t)$  der Winkel zwischen  $E(\gamma(t))$  und  $\tilde{E}(t)$ . Ähnlich wie oben schreiben wir

$$E(\gamma(t)) = \cos \beta_2(t)\tilde{E}(t) - \sin \beta_2(t)\tilde{E}(t)^\perp$$

und erhalten

$$\frac{\nabla}{dt}E(t) = -\beta_2'(t)E(\gamma(t))^\perp.$$

Dies impliziert

$$g(Y(\gamma(t)), \gamma'(t)) = g\left(\frac{\nabla}{dt}E(t), E(t)^\perp\right) = -\beta_2'(t).$$

$\beta(t) = \beta_1(t) + \beta_2(t)$ . Das Lemma folgt dann durch Addition und Integration.  $\square$

**Bemerkung 4.5.7.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  ein stückweise glatter geschlossener Weg, dann ist der Paralleltransport längs  $\gamma$  eine Rotation um den Winkel

$$\pm \int_a^b g(Y(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt.$$

Der Beweis ähnlich wie oben.

Sei von nun an  $\phi : P \rightarrow M$  eine auf einem Polygons definierte glatter Diffeomorphismus auf sein Bild, d.h. er kann zu einer Parametrisierung fortgesetzt werden, die auf einer offenen Menge definiert ist, die  $P$  enthält. Wir wählen das Einheitsvektorfeld  $E$  parallel zu  $\frac{\partial}{\partial u^1}$ . Wir nehmen weiter an, dass  $\gamma$  die Fläche  $F(P)$  berandet und diese im positiven Sinne durchläuft. Der Umlaufsatz für Kurven in  $\mathbb{R}^2$  besagt dann, dass

$$\beta(b) - \beta(a) = 2\pi.$$

Wir erhalten somit

$$2\pi = \int_a^b \kappa_g(t) \|\gamma'(t)\| dt + \sum_{j=1}^k \alpha_j - \int_a^b g(Y(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt.$$

Wir formen den hinteren Term um, unter Nutzung von  $\nu(\gamma(t)) = -\left(\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}\right)^\perp$ :

$$\begin{aligned} - \int_a^b g(Y(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt &= \int_a^b g(Y(\gamma(t))^\perp, \nu(\gamma(t))) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_{\partial F(P)} g(Y^\perp, \nu) d\text{vol} = \int_{F(P)} \text{div } Y^\perp d\text{vol}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus dem Divergenzsatz folgt. Die Behauptung folgt nun mit dem folgenden Lemma:  $\square$

**Lemma 4.5.8.** *Für das oben definierte Vektorfeld  $Y$  und die Gauß-Krümmung  $K$  gilt:*

$$\text{div } Y^\perp = K.$$

*Beweis.* Wir berechnen für beliebige Vektorfelder  $Z, X$  und das obige  $Y$ :

$$\partial_Z g(Y, X) = g(\nabla_Z Y, X) + g(Y, \nabla_Z X) = g(\nabla_Z Y, X) + g(\nabla_{\nabla_Z X} E, E^\perp)$$

und erhalten

$$\partial_Z g(Y, X) = \partial_Z g(\nabla_X E, E^\perp) = g(\nabla_Z \nabla_X E, E^\perp) + g(\nabla_X E, \nabla_Z E^\perp).$$

Nun ist aber  $\nabla_X E$  senkrecht auf  $E$ , also parallel zu  $E^\perp$  und somit auch senkrecht zu  $\nabla_Z E^\perp$ . Es folgt

$$g(\nabla_Z Y, X) = g(\nabla_Z \nabla_X E, E^\perp) - g(\nabla_{\nabla_Z X} E, E^\perp) = g(\nabla_{Z, X}^2 E, E^\perp).$$

Nach Lemma 4.5.3 gilt nun

$$g(\nabla_Z (Y^\perp), X) = g((\nabla_Z Y)^\perp, X) = -g(\nabla_Z Y, X^\perp).$$

Somit

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} Y^\perp &= g(\nabla_E Y^\perp, E) + g(\nabla_{E^\perp} Y^\perp, E^\perp) \\
 &= -g(\nabla_E Y, E^\perp) + g(\nabla_{E^\perp} Y, E) \\
 &= -g(\nabla_{E, E^\perp}^2 E, E^\perp) + g(\nabla_{E^\perp, E}^2 E, E^\perp) \\
 &= g(R(E^\perp, E)E, E^\perp) = K
 \end{aligned}$$

□

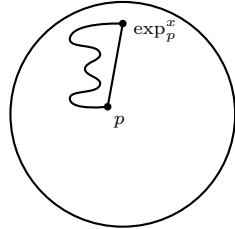
## 4.6 Rund um das Lemma von Gauß

Im folgenden schreiben wir  $d(p, q)$  für den intrinsischen Abstand von  $p$  zu  $q$  in der riemannschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$ . Die Dimension von  $M$  kann in diesem Abschnitt beliebig sein.

**Lemma 4.6.1** (Gauß-Lemma). *Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit,  $p \in M$ ,  $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow M$ ,  $X \in \mathcal{D}_p \subset T_p M$ ,  $V \in T_p M$ . Dann gilt:*

$$g(d_X \exp_p X, d_X \exp_p V) = g(X, V).$$

Das Gauß-Lemma wird im folgenden sehr hilfreich sein.



Wir haben unter anderem gesehen. Ist  $X \in \mathcal{D}_p$  ein Vektor mit Länge  $\leq \operatorname{injr}ad(p)$ , dann ist jede Kurve von  $p$  nach  $\exp_p X$  mindestens so lang wie die Kurve  $[0, 1] \ni t \mapsto \exp_p(tX) \in M$ .

$$d(p, \exp_p X) = \|X\|.$$

Es gilt also  $B_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon(0))$  für  $\epsilon \leq \operatorname{injr}ad(p)$ .

Die Funktion  $r = d(\cdot, p): M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $q \mapsto d(q, p)$  ist somit glatt auf  $B_\epsilon(p) \setminus \{p\}$ .

Seien nun  $\partial/\partial u_i$  die Koordinatenvektorfelder der Parametrisierung durch Normalkoordinaten,  $u_i$  die Koordinatenfunktionen. Es gilt dann lokal um  $p$ :

$$r := \sqrt{\sum_i u_i^2}.$$

Das Vektorfeld

$$\frac{\sum_i u_i (\partial/\partial u_i)}{\sqrt{\sum_i u_i^2}} =: \frac{\partial}{\partial r}$$

ist glatt auf  $B_\epsilon(p) \setminus \{p\}$  und ist das Bild des radialen Vektorfelds in  $T_p M$  unter  $\exp_p$ . Es ist das radiale Koordinatenfeld einer Parametrisierung durch geodätische Normalkoordinaten. Es gilt

$$2r \frac{\partial}{\partial r} r = \frac{\partial}{\partial r} r^2 = \frac{\sum_i u_i (\partial/\partial u_i)}{\sqrt{\sum_i u_i^2}} (\sum_j u_j^2) = 2 \sqrt{\sum_i u_i^2} = 2r$$

d.h.  $\frac{\partial}{\partial r} r = 1$ . In  $X \in T_p M$  gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\exp_p X} = d_X \exp_p \frac{X}{\|X\|}.$$

Laut Gauß-Lemma gilt in  $X \in T_p M$ :

$$g_p \left( \frac{X}{\|X\|}, Y \right) = g_{\exp_p X} \left( \frac{\partial}{\partial r}, d_X \exp_p Y \right). \quad (4.1)$$

**Definition 4.6.2.** Sei  $f \in C^\infty$ . Der Gradient  $\text{grad } f$  ist der Vektor  $\in T_p M$  (bzw. das Vektorfeld), so dass

$$g(\text{grad } f, Y) = \partial_Y f$$

für alle  $Y \in T_p M$  (und für alle  $p \in M$ ).

Gilt  $(\text{grad } f)(x) \neq 0$  für alle  $x \in f^{-1}(t) =: N$ , dann ist auch  $d_x f \neq 0$ , und somit ist  $N$  eine Untermannigfaltigkeit<sup>1</sup> Es gilt dann auch

$$T_x N = (\text{grad } f)^\perp = \{X \in T_x M \mid X \perp \text{grad } f\}.$$

**Lemma 4.6.3.**  $\text{grad } r = \frac{\partial}{\partial r}$

*Beweis.*

Wir überprüfen das Lemma in  $\exp_p X$ . Wir berechnen zuerst für  $Y \in T_X \mathcal{D}_p = T_p M$

$$2r \partial_Y r = \partial_Y (r^2) = \partial_Y \left( \sum_i u_i^2 \right) = 2 \sum_i u_i \partial_Y u_i = 2g \left( Y, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \right)$$

<sup>1</sup>Eine Teilmenge  $N$  von einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $M$ , wenn für alle Parametrisierungen  $\phi: U \rightarrow V$  von  $M$ , gilt, dass  $\phi^{-1}(N)$  eine Untermannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^m$  ist.

Also  $\partial_Y r = \frac{1}{r} g(Y, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix})$ . Auf der Mannigfaltigkeit ergibt dies, zusammen mit

(4.1):

$$\partial_{d_X \exp_p Y} r = \frac{1}{r} g(Y, X) = g(Y, \frac{X}{\|X\|}) = g(\frac{\partial}{\partial r}, d_X \exp_p Y).$$

□

Insbesondere  $g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}) = \frac{\partial}{\partial r} r = 1$ .

**Lemma 4.6.4.** *Gilt  $q = \exp_p(X)$ , dann ist  $Y := \text{grad}(d(\cdot, p))(q) = \frac{1}{\|X\|} \gamma'_X(1)$ . Außerdem gilt dann  $p = \exp_q(-d(p, q)Y)$ .*

*Beweis.* Mit denselben Methoden wie oben. Details werden evtl. noch ergänzt.

□

**Lemma 4.6.5.** *Sei  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit mit riemannscher Metrik. Dann gilt*

$$\text{injrads}(M, g) := \inf_{p \in M} \text{injrads}(p) > 0.$$

*Beweis.* Wir haben bereits gesehen, dass es zu jedem  $p \in M$  eine offene Umgebung  $U(p)$  von  $p$  gibt und eine positive Zahl  $\delta_p$ , so dass  $\text{injrads}(q) \leq \delta_p$  für alle  $q \in U(p)$ . Wir erhalten die offene Überdeckung

$$\{U(p) \mid p \in M\}$$

von  $M$ . Da  $M$  kompakt ist, ist in dieser Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung enthalten, also  $M \subset U(p_1) \cup \dots \cup U(p_s)$ . Wir setzen

$$\delta := \min\{\delta(p_1), \delta(p_2), \dots, \delta(p_s)\} > 0.$$

Man überprüft leicht, dass  $\text{injrads}(M, g) \geq \delta$ .

□

Der Raum  $(M, d)$  ist ein metrischer Raum, und als solcher induziert er eine Topologie auf  $M$ . Es ist a priori nicht klar, ob diese Topologie mit der ursprünglichen Topologie übereinstimmt. Die Aussage  $B_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon(0))$  bewirkt aber, dass die von  $d$  induzierte Topologie tatsächlich mit der ursprünglichen Topologie von  $M$  übereinstimmt.

## 4.7 Existenz einer Triangulierung

In diesem Abschnitt wollen wir wieder annehmen, dass  $M$  eine Fläche ohne Rand ist. Analoge Resultate gelten aber auch für glatte Flächen mit Rand und mit Ecken, und auch für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension. Die Beweise sind offensichtliche Anpassungen der untenstehenden Techniken.

**Bemerkung 4.7.1.** Sehr erstaunlich ist hingegen die Tatsache, dass es ab Dimension 4 topologische Mannigfaltigkeiten (= Mannigfaltigkeiten ohne das Axiom, das besagt, dass Parametrisierungswechsel  $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$  Diffeomorphismen sein müssen), die keine topologische Triangulation (= "schöne" Zerteilung in Teilstücke homöomorph zu Simplizes) zulassen. Insbesondere sind diese topologischen Mannigfaltigkeiten auch nicht homöomorph zu einer Mannigfaltigkeit im Sinne von Abschnitt 4.1.

Aber zurück zu Flächen ohne Rand.

Eine Teilmenge  $S$  von  $M$  nennt man  $\epsilon$ -separiert, falls alle verschiedenen  $p, q \in S$  die Eigenschaft  $d(p, q) \geq \epsilon$  erfüllen. Sei  $\mathcal{S}_\epsilon$  die Menge aller  $\epsilon$ -separierten Teilmengen von  $M$ . Die Menge  $\mathcal{S}_\epsilon$  wird durch die Relation  $\subset$  partiell geordnet.

**Lemma 4.7.2.** *Die partiell geordnete Menge  $(\mathcal{S}_\epsilon, \subset)$  besitzt maximale Elemente, sogenannte maximale  $\epsilon$ -separierte Mengen.*

*Beweis.* Angenommen es gibt keine maximalen Elemente in  $\mathcal{S}_\epsilon$ . Dann gibt es zu jedem  $S \in \mathcal{S}_\epsilon$  ein  $T \in \mathcal{S}_\epsilon$  mit  $S \subsetneq T$ .

Die leere Menge ist in  $\mathcal{S}_\epsilon$ . Wir definieren  $S_i \in \mathcal{S}_\epsilon$  induktiv:  $S_0 := \emptyset$ . Ist  $S_i \in \mathcal{S}_\epsilon$  definiert, so wähle  $S_{i+1} \in \mathcal{S}_\epsilon$ , so dass  $S_i \subsetneq S_{i+1}$ .

Die Menge  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$  besitzt unendlich viele Elemente und besitzt wegen der Kompaktheit von  $M$  deswegen einen Häufungspunkt  $p \in M$ , der aber nicht unbedingt in einem der  $S_i$  liegen muss.

Wähle also eine Folge von Punkten  $p_j \in \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$  mit  $d(p_i, p) \rightarrow 0$ . Also insbesondere gilt  $d(p_i, p_j)$  für genügend große  $i$  und  $j$ . Für ein genügend großes  $k$  gilt  $p_i, p_j \in S_k$ , also ist  $S_k$  nicht  $\epsilon$ -separiert, im Widerspruch zu den obigen Annahmen.  $\square$

Ab sofort sei  $S$  eine feste maximale  $\epsilon$ -separierte Menge und  $4\epsilon < \text{inrad}(M, g)$ . Auf Grund der Dreiecks-Ungleichung gilt dann  $B_{2\epsilon}(q) \subset B_{4\epsilon}(p)$  für alle  $q \in B_{2\epsilon}(p)$ . Somit ist die Funktion  $d(\cdot, q)$  für alle  $q \in B_{2\epsilon}(p)$  eine glatte Funktion auf  $B_{2\epsilon}(p) \setminus \{q\}$ .

Sei nun  $q \in S \cap B_{2\epsilon}(p)$ ,  $q \neq p$ . Definiere die Äquidistanzmenge

$$A_{p,q} := \{x \in B_{2\epsilon}(p) \mid d(x, p) = d(x, q)\}.$$

**Lemma 4.7.3.** *Sei  $\phi := \exp_p : B_{2\epsilon}(0) \rightarrow B_{2\epsilon}(p)$  eine Parametrisierung durch Normalkoordinaten um  $p$ . Dann ist  $\phi^{-1}(A_{p,q})$  eine glatte 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $B_{2\epsilon}(0)$ .*

*Beweis.* Das Vektorfeld

$$X := \text{grad } d(\cdot, p) - \text{grad } d(\cdot, q)$$

steht bezüglich  $g$  senkrecht auf  $A_{p,q}$ . Wir zeigen durch einen Widerspruchsbeweis, dass  $X$  auf  $S$  nirgends verschwindet, somit folgt das Lemma aus dem Satz über implizite Funktionen.

Angenommen  $X(x) = 0$  für ein  $x \in S$ . Dann gilt

$$Y := (\text{grad } d(\cdot, p))x = (\text{grad } d(\cdot, q))x.$$

Mit Lemma 4.6.4 ergibt sich der Widerspruch

$$p = \exp_x(-d(x, p)Y) = \exp_x(-d(x, q)Y) = q.$$

□

Die Funktion  $f(x) = d(x, p) - d(x, q)$  ist glatt auf  $B_{2\epsilon}(p) \setminus \{p, q\}$ . Nach Dreiecksungleichung gilt  $f(x) \in [-d(p, q), d(p, q)]$ . Mit dem Gauß-Lemma sieht man, dass

- $f(x) = d(p, q)$  genau dann gilt, wenn  $x = \exp_p(tQ)$  mit  $t \geq 1$  und  $\exp_p Q = q$ , und
- $f(x) = -d(p, q)$  genau dann gilt, wenn  $x = \exp_p(tQ)$  mit  $t \leq 0$  und  $\exp_p Q = q$

Sei  $\tilde{B}$  die Menge aller anderen Punkte von  $B_{2\epsilon}(p) \setminus \{p, q\}$ .

Mit Argumenten analog zu oben sieht man, dass das Vektorfeld

$$Y := (\text{grad } d(\cdot, p))(x) - (\text{grad } d(\cdot, q))(x)$$

auf allen anderen Punkten von  $\tilde{B}$  nicht verschwindet. Auf dem Rand von  $B_{2\epsilon}(p)$  ist  $Y$  nur in dem Punkten

$$R_{\pm} := \exp_p\left(\pm \frac{2\epsilon}{\|Q\|}Q\right)$$

orthogonal. Durch eine Abschneidefunktion ändern wir  $Y$  in der Umgebung des Randes von  $B_{2\epsilon}(p)$  so zu einem Vektorfeld  $\tilde{Y}$  ab, dass  $\tilde{Y}$  am Rand tangential zum Rand ist und auf  $\tilde{B}$  nicht verschwindet.

Sei  $\phi : U \times \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  der Fluss von  $\tilde{Y}$ , d.h.  $(d/dt)\phi(t, x) = \tilde{Y}(\phi(t, x))$ ,  $\phi(0, x) = x$ . Es gilt  $\partial_Y f = g(\text{grad } f, \text{grad } f) \geq 0$  und man sieht, dass sich für geschickte Wahl von  $\tilde{Y}$  auch  $\partial_{\tilde{Y}} f \geq 0$  gilt. Somit schneidet jede Flusslinie  $\phi(\mathbb{R}, x)$  höchstens einmal  $A_{p,q}$ . Man überlegt sich auch leicht, dass der Fluss auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist und dass entlang der Flusslinie  $f$  für  $t \rightarrow \pm\infty$  gegen das Maximum bzw. Minimum konvergiert. Insbesondere schneidet jede Flusslinie auch mindestens einmal die Menge  $A_{p,q}$ . Somit definiert  $\phi$  einen Diffeomorphismus von  $A_{p,q} \times \mathbb{R}$  auf  $\tilde{B}$ . Es folgt dass  $A_{p,q}$  diffeomorph zu einem Intervall ist und dass  $B_{2\epsilon}(p) \setminus A_{p,q}$  genau zwei Zusammenhangskomponenten hat. Wir bezeichnen die Zusammenhangskomponente von  $p$  mit  $Z_p^q$ .

Aufgabe: Auf dem Rand von  $Z_p^q$  zeigt der Vektor  $-\text{grad } d(\cdot, p)$  in  $Z_p^q$  hinein.





Zwei verschiedene Sterne sind im Inneren disjunkt, können am Rand aber eine gemeinsame Seitenflächen haben. Diese sind dann Strecken in Äquidistanzmenge. Die Ecken sind charakterisiert dadurch, dass ihre Distanz zu  $S$  von mindestens drei Punkten in  $S$  realisiert wird.

Es verbleibt, den Stern in Dreiecke zu zerlegen. Wir sehen mit Lemma 4.7.4, dass der Stern um  $p$  eine Fläche mit Ecken ist. Das Vektorfeld  $-\text{grad } d(\cdot, p)$  ist transversal zu allen Seitenflächen von  $\Sigma(p)$ . Außerdem ist offensichtlich  $\exp_p^{-1}(\Sigma(p))$  sternförmig um 0. Sind nun  $e_1 = \exp_p X_1$  und  $e_2 = \exp_p X_2$  zwei Ecken, die durch ein glattes Randstück verbunden sind. Dann schließt dieses Randstück zusammen mit den Kurven  $c_i : [0, 1] \rightarrow M, t \mapsto \exp_p(tX_i)$  eine Fläche mit Ecken ein, die zu einem Dreieck diffeomorph ist. Der Stern  $\Sigma(p)$  wird auf diese Art in Dreiecke zerteilt. Wir haben eine Triangulierung von  $M$  konstruiert und somit Satz 4.3.2 für Flächen ohne Rand gezeigt.

Um Satz 4.3.2 für Flächen mit Rand und Ecken zu zeigen, muss meine einige kleine Zusätze in der obigen Argumentation dazufügen, die jedoch keine neuen mathematischen Ideen beitragen. Dieser Fall soll deswegen nicht genauer ausgeführt werden.

## 4.8 Satz von Gauß-Bonnet, globale Version

Notation ab jetzt:

$dA := \text{dvol}$  in Dimension 2

$d\ell := \text{dvol}$  in Dimension 1

**Satz 4.8.1** (Gauß-Bonnet, globale Version mit Rand und Ecken). *Sei  $M$  eine kompakte Fläche mit riemannscher metrik. Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  die Außenwinkel der Ecken. Dann gilt:*

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} \kappa_g d\ell + \sum_{i=1}^s \alpha_s = 2\pi\chi(M)$$

*Beweis.* Wir wollen hier auch nur den Fall ausführen, dass  $M$  keinen Rand besitzt, da die Modifikationen Fall mit Rand und Ecken offensichtlich sind, wenn man das Argument für Flächen ohne Rand gut verstanden hat.

Zunächst einmal triangulieren wir  $M$ , d.h.

$$M = \bigcup_{i=1}^f \sigma_i(\Delta_2)$$

mit den Eigenschaften aus Abschnitt 4.3. Das Dreieck  $\sigma_i(\Delta_2)$  habe die Außenwinkel  $\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \alpha_{3,i}$ . Die zugehörigen Innenwinkel sind dann  $\beta_{j,i} := \pi - \alpha_{j,i}$ . Die Anzahl der Ecken der Triangulierung sei  $e$  und die Anzahl der Kanten  $k$ .

Jede Kante tritt als Randkomponente von genau zwei 2-Simplizes auf, also insbesondere  $2k = 3f$ . Man überlegt sich nun leicht, dass die beiden zugehörigen Terme der Form  $\int \kappa_g d\ell$  umgekehrtes Vorzeichen haben. Dies führt dazu, dass sich diese Terme in der nun folgenden Argumentation gegenseitig annullieren.

Wir nutzen nun die lokale Version des Satzes von Gauß-Bonnet und summieren ihn über alle Simplizes.

$$\begin{aligned}
\int_M K dA &= \sum_{i=1}^f \int_{\sigma_i(M)} K dA \\
&= \underbrace{-\sum_{i=1}^f \int_{\partial\sigma_i(M)} \kappa_g d\ell}_{=0} - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^f \alpha_{j,i} + 2\pi f \\
&= \underbrace{-3\pi f}_{=-2\pi k} + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^f \beta_{j,i} + 2\pi f
\end{aligned}$$

Die Innenwinkel in jeder Ecke summieren sich zu je  $2\pi$  auf. Dies ergibt

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^f \beta_{j,i} = 2\pi e.$$

Dies ergibt

$$\int_M K dA = 2\pi(e - k + f) = 2\pi\chi(M),$$

die Aussage des Satzes für den Fall ohne Rand.

Wie oben bereits angedeutet, wird der Fall mit Rand und Ecken analog bewiesen, wobei am Rand die  $\int \kappa d\ell$ -Terme und Außenwinkel nicht annulliert werden. Die detaillierte Ausführung des Falles mit Rand wird dem Leser als Übung empfohlen.  $\square$

## 4.9 Anhang

Hier soll noch ein Beweis nachgetragen werden.

*Beweis von Bemerkung 4.5.5.* Bestimme zu zwei Einheitsvektorfeldern  $E_1$  und  $E_2$  die Vektorfelder  $Y_1$  und  $Y_2$ . Sei  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$  der zwischen  $E_1$  und  $E_2$  eingeschlossene Winkel, diese Funktion kann auf einer kleinen sternförmigen Menge  $V$  glatt gewählt werden. Der Weg  $\gamma$  verlaufe o.B.d.A. in dieser sternförmigen Menge  $V$ .

$$\begin{aligned}
E_2 &= \cos \alpha E_1 + \sin \alpha E_1^\perp \\
E_2^\perp &= -\sin \alpha E_1 + \cos \alpha E_1^\perp
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_X E_2 &= -\partial_X \alpha \sin \alpha E_1 + \cos \alpha \nabla_X E_1 + \partial_X \alpha \cos \alpha E_1^\perp + \sin \alpha \nabla_X E_1^\perp \\
&= \partial_X \alpha E_2^\perp + g(Y_1, X) \underbrace{(\cos \alpha E_1^\perp - \sin \alpha E_1)}_{E_2^\perp}.
\end{aligned}$$

Somit also  $g(Y_2, X) = \partial_X \alpha + g(Y_1, X)$ . Somit gilt auf  $V$

$$Y_2 - Y_1 = \text{grad } \alpha.$$

Also

$$\int_a^b g(Y_2(\gamma(t)) - Y_1(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt = \int_a^b g((\text{grad } \alpha)(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt = [\alpha(\gamma(t))]_a^b = 0.$$

□