

Differentialgeometrie II
Lösung zum 8. Übungsblatt

3. Aufgabe Sei $\gamma : [0, b) \rightarrow M$ eine Geodätische in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{C}_\gamma := \{t \in [0, b) \mid \gamma(t) \text{ ist konjugiert zu } \gamma(0)\}$$

abgeschlossen und diskret in $[0, b)$ ist.

Lösung der 23. Aufgabe

Wir beginnen mit einem Lemma zu linearer Algebra.

Lemma 1 *Seien V und W m -dimensionale reelle Vektorräume und A_t eine glatte Familie von Homomorphismen, und sei $A'_t := (d/dt)A_t$. Wir nehmen an, dass*

$$\text{Bild}A_0 \oplus A'_0(\text{Kern}A_0) = W \tag{1}$$

Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass A_t für alle $t \in (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon)$ Rang m hat.

Beweis des Lemmas:

Sei k der Rang von A_0 . Man kann Basen von V und W wählen, so dass A_0 durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird, bei der auf der Diagonalen zunächst k -mal 1 steht und dann $m - k$ mal die 0. Außerdem kann man durch Wahl der Basis erreichen, dass $\text{Kern}A_0 = \text{span}(e_{k+1}, \dots, e_m)$ und dass $A'_0(e_r) \in e_r + \text{Bild}A_0$ für alle $r \in \{k+1, \dots, m\}$. Man rechnet dann leicht nach (bezüglich der gewählten Basen)

$$\det A_t = \det(A_0 + tA'_0 + O(t^2)) = t^{m-k} + O(t^{m-k+1}).$$

Hieraus folgt die Behauptung des Lemmas.

Nun brauchen wir noch einen Rechenrick zu Jacobi-Feldern.

Lemma 2 *Seien J_1 und J_2 zwei Jacobifelder längs einer Geodätischen. Dann ist die Funktion*

$$t \mapsto \langle J_1(t), J'_2(t) \rangle - \langle J'_1(t), J_2(t) \rangle \tag{2}$$

konstant.

Beweis:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} (\langle J_1(t), J_2'(t) \rangle - \langle J_1'(t), J_2(t) \rangle) \\
&= \langle J_1'(t), J_2'(t) \rangle + \langle J_1(t), J_2''(t) \rangle - \langle J_1''(t), J_2(t) \rangle - \langle J_1'(t), J_2'(t) \rangle \\
&= \langle J_1(t), R(\dot{\gamma}(t), J_2(t))\dot{\gamma}(t) \rangle - \langle R(\dot{\gamma}(t), J_1(t))\dot{\gamma}(t), J_2(t) \rangle = 0
\end{aligned}$$

Lemma 3 Sei $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische und für $V \in T_{\gamma(0)}M$ bezeichnen wir mit J_V das Jacobi-Feld mit $J_V(0) = 0$ und $J_V'(0) = V$. Wir identifizieren die Vektorräume $T_{\gamma(t)}M$, $t \in [0, \ell]$ vermöge Paralleltransport. Wir definieren $A_t(V) := J_V(t)$. Sei $t_0 \in (0, \ell)$ ein zu 0 konjugierter Punkt längs γ . Dann gilt

$$\text{Bild}A_{t_0} \cap A_{t_0}'(\text{Kern}A_{t_0}) = \{0\}. \quad (3)$$

Beweis der Aufgabenaussage:

Die Taylor-Entwicklung von $[0, b) \rightarrow \text{End}(V)$, $t \mapsto (V \rightarrow J_V(t))$ in $t = 0$ ist

$$J_V(t) = tV + O(t^2)$$

und deswegen gibt es keine konjugierten Punkte in einer genügend kleinen Umgebung von $t = 0$, das heißt 0 ist nicht im Abschluss von \mathcal{C}_γ . Die Abbildung $D : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \det A_t$ ist glatt, also auch stetig und somit ist $\mathcal{C}_\gamma := D^{-1}(0) \setminus \{0\}$ abgeschlossen.

Für jedes (fixierte) $t_0 \in [0, b)$ ist die Abbildung $A_{t_0}'|_{\text{Kern}A_{t_0}}$ injektiv. Denn der Kern dieser Abbildung ist $\text{Kern}A_{t_0} \cap \text{Kern}A_{t_0}'$, und jedes V in diesem Raum erfüllt $J_V(t_0) = 0 = J_V'(t_0)$ und deswegen $J_V \equiv 0$ und somit $V = 0$.

Aus Dimensionsgründen folgt dann aus Lemma 3, dass $\text{Bild}A_{t_0} \oplus A_{t_0}'(\text{Kern}A_{t_0}) = T_{\gamma(t_0)}M$, und mit Lemma 1 folgt, dass für kleines $\epsilon > 0$ die Abbildung A_t für $t \in (t_0 - \epsilon, t_0)$ und für $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$ invertierbar ist. Auf diesen Intervallen gibt es also keine zu 0 konjugierten Punkte. Die Aufgabe ist also gelöst, sobald wir Lemma 3 gezeigt haben.

Beweis von Lemma 3:

Angenommen $Z \in \text{Bild}A_{t_0} \cap A_{t_0}'(\text{Kern}A_{t_0})$, also $Z = A_{t_0}(V) = J_V(t_0)$ und $Z = A_{t_0}'(W) = J_W'(t_0)$ und $J_W(t_0) = A_{t_0}(W) = 0$ für geeignete $V, W \in T_{\gamma(0)}M$. Nach Lemma 2 ist die Funktion (2) für $J_1 = J_V$ und $J_2 = J_W$ konstant. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
0 &= \langle 0, W \rangle - \langle V, 0 \rangle = \langle J_V(0), J_W'(0) \rangle - \langle J_V'(0), J_W(0) \rangle \\
&= \langle J_V(t_0), J_W'(t_0) \rangle - \langle J_V'(t_0), J_W(t_0) \rangle = \langle Z, Z \rangle - \langle J_V'(t_0), 0 \rangle = \|Z\|^2.
\end{aligned}$$

Und dies impliziert Lemma 3.