Übungen zur Indextheorie

Universität Regensburg, Wintersemester 2016/17
Prof. Dr. Bernd Ammann/ PD Dr.habil. Olaf Müller

Übungsblatt 1, Abgabe am 27.10.2016

---

1. Aufgabe

Sei (V, g) ein n-dimensionaler Euklidischer Vektorraum und W ein (komplexer) Clifford-Modul für (V, g). Sei

$$d(n) := \begin{cases} 2^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2^{(n-1)/2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

1. Zeigen Sie: Die (komplexe) Dimension von W ist durch $d(n)$ teilbar. (Tipp: Nehmen Sie eine ONB $(e_1, \dots, e_n)$ von V und nutzen Sie, dass die Endomorphismen $e_i \cdot : W \to W$ paarweise antikommutieren.)
2. Konstruieren für $n = 1, 2, 3$ (und je nach Lust und Laune auch für größere n) möglichst viele Clifford-Moduln der Dimension $d(n)$.

(Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass jeder Clifford-Modul direkte Summe von Clifford-Moduln der Dimension $d(n)$ ist.)

2. Aufgabe

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform und Σ eine Darstellung von $\mathrm{Cl}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Wir definieren $\widehat{V} := V \oplus \mathbb{R}^{1,1}$, $\widehat{\Sigma} := \Sigma \oplus \Sigma$ und bezeichnen mit $\{e_1, e_2\}$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}^{1,1}$ mit $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$, $\langle e_2, e_2 \rangle = -1$, $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$. Zeigen Sie, dass durch

$$v \mapsto \begin{pmatrix} v\cdot & 0 \\ 0 & -v\cdot \end{pmatrix}, \text{ für } v \in V, \quad e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung von $\mathrm{Cl}(\widehat{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ auf $\widehat{\Sigma}$ definiert ist.

3. Aufgabe

Zeigen Sie folgende Isomorphismen von Algebren:

$$\mathrm{Cl}_{1,0} \cong \mathbb{C}, \quad \mathrm{Cl}_{2,0} \cong \mathbb{H}, \quad \mathrm{Cl}_{3,0} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

Hinweis: Für $\mathrm{Cl}_{3,0}$ betrachten Sie folgende Abbildung: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, v \mapsto (-v, v)$, wobei wir $\mathbb{R}^3$ mit den imaginären Quaternionen identifizieren (durch $e_1 \leftrightarrow i, e_2 \leftrightarrow j, e_3 \leftrightarrow k$), und wenden Sie die universelle Eigenschaft der Clifford-Algebren an.

4. Aufgabe (ab Dienstag zu bearbeiten)

Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

1. Bestimmen Sie $C^\infty(M) \cap \ker \Delta$, d.h. die 0-Formen in $\ker \Delta$.
2. Sei $f \in C^\infty(M)$ eine Eigenfunktion von Δ, d.h.

   $$\Delta f = \lambda f$$

   für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch df eine Eigenfunktion von Δ ist.

3. Es gebe eine Konstante $C > 0$, so dass für alle 1-Formen ω gilt

$$\langle \mathcal{K}^1 \omega, \omega \rangle \geq C \langle \omega, \omega \rangle,$$

wobei $\mathcal{K}^1$ der Krümmungsendomorphismus ist. Sei $f \in C^\infty(M)$ eine Eigenfunktion von Δ zu einem Eigenwert $\lambda \neq 0$. Zeigen Sie

$$\lambda \geq C.$$