Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik

SS 2015
Analysis II

4. Übungsblatt

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben selbständig und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens Freitag den 15.5. um 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein.

Aufgabe 1. Wir nennen eine Kurve $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *Lipschitz*, wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass für alle $s,t \in [a,b]$ gilt, dass $\|f(s) - f(t)\| \leq C|s-t|$.

(a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitzkurve rektifizierbar ist.
Hinweis: Es sei also $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-Kurve mit Lipschitzkonstante C. Wir setzen
$$L := \sup\{L(Z,f) \,|\, Z \text{ Zerlegung von } [a,b]\}.$$
(Dieses Supremum existiert, weil für jede Zerlegung Z gilt, dass $L(Z,f) \leq C(b-a)$.) Es sei nun $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Zerlegung Z, so dass $L(Z,f) \geq L - \frac{\varepsilon}{2}$. Jetzt muss man noch zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung Y der Feinheit δ gilt, dass $L(Y,f) \geq L(Z,f) - \frac{\varepsilon}{2}$.

(b) Gibt es eine Kurve $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, welche rektifizierbar ist, aber welche an unendlich vielen Stellen nicht differenzierbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.

(a) Es seien $r > 0$ und $c \neq 0$ gegeben. In der Vorlesung hatten wir die Länge der Helix
$$\begin{array}{rcl} f\colon [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (ct, r\cos(t), r\sin(t)). \end{array}$$
als $2\pi\sqrt{c^2+r^2}$ berechnet. Geben Sie eine geometrische Begründung für diese Längenberechnung.

(b) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und es sei $a < c < b$. Wir bezeichnen mit $f_{[a,c]}$ und $f_{[c,b]}$ die Einschränkungen von f auf die Intervalle $[a,c]$ und $[c,b]$. Wir nehmen an, dass $f_{[a,c]}$ und $f_{[c,b]}$ rektifizierbar sind. Zeigen Sie, dass dann auch f rektifizierbar ist, mit
$$\text{Länge}(f) = \text{Länge}(f_{[a,c]}) + \text{Länge}(f_{[c,b]}).$$
Hinweis: es sei $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ eine Zerlegung Z von $[a,b]$. Es gibt dann ein m mit $t_m \leq c < t_{m+1}$. Wenn $t_m = c$, dann ist $t_0,\ldots,t_m = c$ eine Zerlegung von $[a,c]$ und $c = t_m, t_{m+1},\ldots,b$ ist eine Zerlegung von $[c,b]$. Wenn $t_m < c$, dann ist $t_0,\ldots,t_m,c$ eine Zerlegung von $[a,c]$ und $c,t_{m+1},\ldots,b$ ist eine Zerlegung von $[c,b]$. Die Zerlegungen mit $t_m = c$ kann man relativ leicht kontrollieren, die Zerlegungen mit $t_m < c$ sind schwieriger.

Aufgabe 3.

(a) Wir betrachten die Funktion:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{wenn } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{wenn } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist.

(b) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von 0 und es seien $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ Funktionen, so dass $f(0) = 0$ und so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = o(g(x)).$$

Aufgabe 4. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{wenn } (x, y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{wenn } (x, y) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist überall zweimal partiell differenzierbar,

(b) es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \neq \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(0,0).$$