UNIVERSITÄT REGENSBURG SS 2015
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK ANALYSIS II

12. ÜBUNGSBLATT

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben selbständig und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens Freitag den 10.7. um 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein. Dies ist das letzte Übungsblatt, welches korrigiert wird.

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, nur mit Hilfe der Definitionen, dass die Funktion

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (t, y) & \mapsto & t^2 + y^{2/3} \end{array}$$

nicht Lipschitz-stetig bezüglich der Variablen y ist.

(b) Es seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Wir betrachten

$$A := \{\varphi \in C([a, b], \mathbb{R}^n) \mid \|\varphi\| \leq 1\}.$$

Geben Sie ein Beispiel für eine Kontraktion

$$T \colon A \to C([a, b], \mathbb{R}^n),$$

welche keinen Fixpunkt besitzt.
Hinweis: Die Aufgabe ist einfacher als sie wirkt.

Aufgabe 2.

(a) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{t} y,$$

welche die Anfangsbedingung $\varphi(1) = 3$ erfüllt.

(b) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{t} y + t^2 \sin(t^2),$$

welche die Anfangsbedingung $\varphi(1) = 4$ erfüllt.

Aufgabe 3.

(a) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(1-t^2)y' - ty + 1 = 0 \text{ mit } t \in (-1,1).$$

Bestimmen Sie für jedes $s \in (-1,1)$ und $a \in \mathbb{R}$ die Lösung φ der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $\varphi(s) = a$ erfüllt. Die Lösungsfunktion muss explizit angegeben werden, d.h. alle Integrale müssen bestimmt werden.

(b) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - ky' + 9y = 0.$$

Finden Sie für $k = 6, 0, -6$ jeweils eine Lösung φ, welche die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 2$ erfüllt.
Hinweis: Wir haben in der Vorlesung noch keine Lösungsmethoden behandelt, aber sie können diese Aufgabe durch geschicktes ‘spielen’ mit der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen lösen.

Aufgabe 4. Es sei X ein metrischer Raum. Zwei Teilmengen U und V heißen disjunkt, wenn $U \cap V = \emptyset$. Ein metrischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn folgende Aussage gilt: wenn immer $X = U \cup V$ die Vereinigung von zwei disjunkten offenen Mengen U und V ist, dann ist entweder $U = X$ oder $V = X$.

(1) Zeigen Sie, dass der metrische Raum $X = [0,1] \cup [2,3]$ mit der üblichen Metrik $d(x,y) = |x-y|$ nicht zusammenhängend ist.

(2) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass $U \neq \emptyset$, d.h. Sie nehmen an, es gibt ein $b \in U$. Sie müssen zeigen, dass $U = \mathbb{R}$. Der Beweis hat eine gewisse Ähnlichkeit zum Beweis von Lemma 13.6.