UNIVERSITÄT REGENSBURG | SS 2015
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK | ANALYSIS II

13. ÜBUNGSBLATT

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Dieses Übungsblatt wird nicht mehr korrigiert und muss nicht abgegeben werden.

Aufgabe 1. Es sei $y' = A(t)y$ eine homogene lineare Differentialgleichung auf einem offenen Intervall I. Für $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\varphi_x \colon I \to \mathbb{R}^n$ die Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $\varphi_x(0) = x$ erfüllt. Zeigen Sie, dass für jedes $t \in I$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \Phi(t,x) := \varphi_x(t) \end{array}$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten die lineare homogene Differentialgleichung

$$y' = A(t)y,$$

wobei

$$A(t) := \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie ein Lösungsfundamentalsystem für die Differentialgleichung.
(b) Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $\varphi(2) = (-3, 2)$ erfüllt.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 + t \\ y_2' & = & -y_1 + 1. \end{array}$$

Hinweis: finden Sie zuerst ein Lösungsfundamentalsystem für die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung. Solch ein Lösungsfundamentalsystem kann man relativ leicht erraten, wenn man mit den 'üblichen Verdächtigen' etwas spielt.

Aufgabe 4. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Ein *Fluss* ist eine stetige Abbildung

$$\Phi \colon \mathbb{R} \times M \to M,$$

welche die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt:

(1) $\Phi(0, x) = x$ für alle $x \in M$,
(2) für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $x \in M$ gilt

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \Phi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

einen Fluß auf $\mathbb{R}^2$ definiert.

(b) Fertigen Sie eine Skizze der Flußlinien an.

(c) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ ein Fluß. Sei $x \in M$, dann heißt

$$B_x := \{\Phi(x,t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

die zu x gehörige Bahn. Zeigen Sie, dass wenn zwei Bahnen einen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie sogar identisch, d.h. zeigen Sie

$$B_x \cap B_y \neq \emptyset \Rightarrow B_x = B_y.$$