2. ÜBUNGSBLATT

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben selbständig und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens **Donnerstag** den 30.4. um 15 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein.

Aufgabe 1.

(a) Es sei X ein metrischer Raum und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus X. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\substack{\text{Umgebungen}\\ U \text{ von } x}}{\forall} \ \underset{K\in\mathbb{N}}{\exists} \ \underset{k\geq K}{\forall} \ x_k \in U.$$

(b) Es sei X ein metrischer Raum und A eine abgeschlossene Teilmenge. Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten in A, welche in X konvergiert. Zeigen Sie, dass der Grenzpunkt $\lim_{k\to\infty} x_k$ ebenfalls in A liegt.

Aufgabe 2.

(a) Es sei $i \in \{1,\dots,n\}$. Zeigen Sie, nur mithilfe der Definitionen, dass die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) &\mapsto x_i \end{aligned}$$

stetig ist.

(b) Geben Sie eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von $[1,\infty) \subset \mathbb{R}$ an, so dass $[1,\infty)$ nicht durch endlich viele der U_i's überdeckt werden kann.

Aufgabe 1. Welche der folgenden metrischen Räume sind vollständig? Geben Sie in allen drei Fällen eine kurze Begründung für Ihre Antwort.

(a) Die Menge $X = \mathbb{R}^n$ mit der Metrik

$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \ := \ \min\left\{1, \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}\right\}$$

(b) Die Menge $X = \mathbb{R}^n$ mit der Metrik

$$d(x,y) \ := \ \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

(c) Die Menge

$$X \ := \ C^\infty([-1,1]) := \text{Vektorraum aller } C^\infty\text{–Funktionen } [-1,1] \to \mathbb{R}$$

mit der Metrik

$$d(f,g) \ := \ \sup\big\{|f(x)-g(x)| \,\big|\, x \in [-1,1]\big\}.$$

Aufgabe 4. Es sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Zeigen Sie:

(a) Wenn f stetig ist, dann ist für jede offene Menge U in Y die Urbildmenge $f^{-1}(U)$ ebenfalls offen.

(b) Wenn für jede offene Menge U in Y die Urbildmenge $f^{-1}(U)$ offen ist, dann ist f stetig.

Hinweis: diese Aufgabe ist nicht schwierig, solange man sich sorgfältig an den Definitionen orientiert. Für (1) können Sie beispielsweise wie folgt vorgehen: Sei f stetig und sei U eine offene Teilmenge in Y. Wir müssen nun zeigen, dass $f^{-1}(U)$ offen ist. Sei also $x \in f^{-1}(U)$. Wir müssen ein $\eta > 0$ finden, so dass $B_\eta(x) \subset f^{-1}(U)$. Die Frage ist, woher kommt solch ein $\eta > 0$? Um dieses zu finden, müssen Sie verwenden, dass f stetig ist, und dass U offen ist.