Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik

SS 2015
Analysis II

0. Übungsblatt

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Dieses Übungsblatt wird nicht korrigiert, es wird jedoch in den Übungen in der 2. Semesterwoche besprochen.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie ob folgende Paare (X, d) die Axiome eines metrischen Raumes erfüllen.

(a) $X = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = (x - y)^2$,

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = |x_1 - y_1|,$$

(b) $X = \mathbb{Q}^n$ und

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

(c) $X = \mathbb{R}$ und

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x - y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ 2, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

(d) $X = \mathbb{R}^n$ und

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \min \left\{ 1, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \right\},$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie ob folgende Paare $(V, \| - \|)$ die Axiome eines normierten Vektorraumes erfüllen.

(a) V der Vektorraum aller integrierbaren Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$ und

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

(b) V der Vektorraum aller stetigen Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$ und

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

Hinweis: der Nachweis der Dreiecksungleichung ist nicht ganz einfach, konzentrieren Sie Sich deswegen lieber auf Eigenschaften (1) und (2).

Aufgabe 3. Es seien (X, d) und (Y, e) zwei metrische Räume.

(a) Wir betrachten nun folgende Abbildung:

$$\begin{array}{rcl}(X \times Y) \times (X \times Y) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & f((x, y), (x', y')) := d(x, x') + e(y, y').\end{array}$$

Zeigen Sie, dass $(X \times Y, f)$ ebenfalls ein metrischer Raum ist.

(b) Es seien $A \subset X$ und $B \subset Y$ zwei offene Teilmengen. Zeigen Sie, dass $A \times B \subset X \times Y$ ebenfalls offen ist.

(c) Es seien $A \subset X$ und $B \subset Y$ zwei abgeschlossene Teilmengen. Zeigen Sie, dass $A \times B$ ebenfalls abgeschlossen ist.
Hinweis: schreiben Sie $X \times Y \setminus A \times B$ als Vereinigung von Produkten von offenen Teilmengen.