Universität Regensburg — SS 2015
Fakultät für Mathematik — Analysis II

6. Übungsblatt

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens Freitag den 29.5. um 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein.

Aufgabe 1.

(a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine k-mal stetig differenzierbare Funktion. Das k-te Taylorpolynom am Punkt $x = 0$, aufgefasst als Polynom in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$, ist definiert als

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) \;:=\; \sum_{m=0}^{k} \frac{1}{m!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_m}} f(0) \cdot x_{i_1} \cdots x_{i_m}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $r, s \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} f(0) \;=\; \frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_s} p_2(0).$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $r = s$ und $r \neq s$. Wenn Sie wollen, können Sie sich auch auf den Fall $n = 3$ einschränken.

(b) Es sei $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(\sqrt{x^2 + y^2}). \end{aligned}$$

(i) Beschreiben Sie in Worten oder mit einer verständlichen Skizze den Graphen der Funktion F.

(ii) Wie können Sie an der Funktion f ablesen, ob die Funktion F im Punkt $(0, 0)$ differenzierbar ist? Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

Aufgabe 2.

(a) Gibt es eine beschränkte differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche genau ein relatives Minimum besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche genau zwei relative Minima besitzt.

(c) Gibt es eine nach unten beschränkte Funktion auf $U := \{(x, y) \,|\, y \geq x + 2\}$, welche kein globales Minimum besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3.

(a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass $f(x) \geq x^2$ für alle x. Zeigen Sie, dass f ein globales Minimum besitzt.

(b) Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Definieren Sie für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ den Begriff $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$, so dass die folgenden zwei Aussagen gelten:

(i) Für $n = 1$ erhalten sie die obige Definition von $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$.

(ii) Wenn $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist mit $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$, dann besitzt f ein globales Minimum.

Beweisen Sie, dass Ihre Definition von $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ in der Tat die gewünschte Eigenschaft (ii) besitzt.

Aufgabe 4.

(a) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2 + ax$. Fertigen Sie eine sorgfältige Skizze vom Graphen von f an.
Hinweis: Schreiben Sie die Funktion in der Form $(x - b)^2 + c$.

(b) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $f(x, y) = x^2 + ax + y^2$. Fertigen Sie eine sorgfältige Skizze vom Graphen von f an.

(c) Was ist das globale Minimum von $f(x, y)$ auf $\mathbb{R}^2$, in Abhängigkeit von a?

(d) Was ist das globale Minimum von $f(x, y)$ auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x\}$, in Abhängigkeit von a?

Es genügt in allen Aufgabenteilen eine kurze Begründung zu geben. Versuchen Sie die Aufgaben (c) und (d) mit ‘gesundem Menschenverstand’ zu lösen.