9. ÜBUNGSBLATT

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben selbständig und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens Freitag den 19.6. um 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein.

Aufgabe 1. Wir sagen eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist *lokal umkehrbar im Punkt* $a \in U$, wenn es eine offene Umgebung U von a und eine offene Umgebung V von $f(a)$ gibt, so dass $f\colon U \to V$ bijektiv ist.

(a) Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2-y^2, 2xy). \end{array}$$

An welchen Punkten ist diese Abbildung lokal umkehrbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Insbesondere, wenn f an einem Punkt nicht lokal umkehrbar ist, müssen Sie begründen, warum dies der Fall ist.

(b) Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung auf einer wegzusammenhängenden Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, dass f in jedem Punkt lokal umkehrbar ist. Folgt daraus, dass f injektiv ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.

(a) Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x-y^2-4. \end{array}$$

Für die folgenden beiden Punkte überprüfen Sie, ob Sie den Satz über implizite Funktionen auf $C=0$ anwenden können. Wenn ja, dann bestimmen Sie explizit geeignete Umgebungen V_x von a und V_y von b und eine Abbildung $g\colon V_x \to V_y$ mit den gewünschten Eigenschaften:

(i) $(a,b)=(4,0)$ und $U_x=\mathbb{R}$ sowie $U_y=\mathbb{R}$,

(ii) $(a,b)=(13,-3)$ und $U_x=\mathbb{R}$ sowie $U_y=\mathbb{R}$.

(b) Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} P\colon \mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2\setminus\{0,0\} \\ (r,\varphi) & \mapsto & (r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{array}$$

Geben Sie für jedes $(r,\varphi)\in\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$ explizit eine offene Umgebung U von (r,φ) an, so dass $P\colon U\to P(U)$ eine Umkehrabbildung besitzt. Sie müssen Ihre Antwort nicht begründen.

Im Folgenden sagen wir, dass $\varphi \in \mathbb{R}$ der Winkel zwischen Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist, wenn

$$\langle v, w\rangle = \cos(\varphi)\|v\| \cdot \|w\|.$$

Aufgabe 3. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} S\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, \theta) &\mapsto \begin{pmatrix} r \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ r\sin\theta \cdot \sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Der Punkt $S(r, \varphi, \theta)$ hat Abstand r vom Ursprung.

(b) Für $r > 0$ und $\theta \in (0, \pi)$ liegt der Punkt $P := S(r, \varphi, \theta)$ in der Halbebene H_φ.

(c) Der Winkel vom Vektor $S(r, \varphi, \theta)$ zum Vektor $(0, 0, 1)$ auf der z-Achse beträgt θ.

(d) Die Abbildung S ist surjektiv.

Aufgabe 4.

(a) Bestimmen Sie die Determinante des Differentials der Abbildung S aus der vorherigen Aufgabe. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

(b) Es seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ zwei orthogonale Vektoren mit $\|v\| = \|w\| = 1$. Beschreiben Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \cos(t)v + \sin(t)w \end{aligned}$$

in Worten oder mithilfe einer aussagekräftigen Zeichnung.

(c) Es sei weiterhin S die Abbildung aus der vorherigen Aufgabe. Beschreiben Sie in Worten oder durch eine sorgfältige Zeichnung folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} &\{S(r, \varphi, \theta) \mid \varphi, \theta \in \mathbb{R}\} \quad \text{für gegebenes } r \in \mathbb{R} \\ &\{S(r, \varphi, \theta) \mid r, \varphi \in \mathbb{R}\} \quad \text{für gegebenes } \theta \in \mathbb{R} \\ &\{S(r, \varphi, \theta) \mid r, \theta \in \mathbb{R}\} \quad \text{für gegebenes } \varphi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hinweis: Es ist

$$\begin{pmatrix} \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \cos\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$