Universität Regensburg SS 2015
Fakultät für Mathematik Analysis II

3. Übungsblatt

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben selbständig und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens Freitag den 8.5. um 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein.

Ab diesem Übungsblatt sind auch Doppelabgaben möglich. Dies bedeutet, dass zwei Student(innen) aus der gleichen Übungsgruppe gemeinsam ein Übungsblatt abgeben können.

Aufgabe 1.

(a) Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f\colon X := [0,2\pi) & \to & Y := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2=1\} \\ t & \mapsto & (\cos(t),\sin(t)) \end{array}$$

ist eine stetige Bijektion. In der Vorlesung hatten wir schon erwähnt, dass die Umkehrabbildung $g := f^{-1}\colon Y \to X$ nicht stetig ist. Geben Sie ein Beispiel für eine offene Menge $U \subset X$, so dass $g^{-1}(U)$ nicht offen in Y ist. Sie müssen nicht begründen, warum die Menge U diese Eigenschaften erfüllt.
Hinweis: hier, und im weiteren Verlauf der Vorlesung betrachten wir eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ als metrischen Raum bezüglich der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

(b) Wir sagen eine Teilmenge A von einem metrischen Raum X hat Durchmesser $\leq r$, falls für alle $a,b\in A$ gilt, dass $d(a,b)\leq r$. Es sei nun K eine kompakte Teilmenge von X und $r>0$. Zeigen Sie, es gibt endlich viele Mengen $B_1,\dots,B_k$ von Durchmesser $\leq r$, so dass $K\subset B_1\cup\dots\cup B_k$.

Aufgabe 2. Es sei $A\subset\mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, welche nicht kompakt ist. Zeigen Sie, es gibt eine stetige Abbildung $f\colon A\to\mathbb{R}$, welche nicht beschränkt ist.
Hinweis: aus dem Satz von Heine-Borel wissen wir, dass A entweder nicht beschränkt ist oder nicht abgeschlossen ist. Betrachten Sie die beiden Fälle getrennt. Vielleicht hilft es auch den Beweis von Satz 3.5 noch einmal zu studieren.

Aufgabe 3. Es sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Wir hatten in der Vorlesung gesehen:

(a) das Urbild einer offen Menge von Y ist offen in X,
(b) das Urbild einer abgeschlossenen Menge von Y ist abgeschlossen in X,
(c) das Bild einer kompakten Menge von X ist kompakt in Y.

Bearbeiten Sie nun folgende Aufgaben:

(a) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen und einer offenen Menge $U \subset X$, so dass $f(U)$ nicht offen ist.
(b) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen und einer abgeschlossenen Menge $V \subset X$, so dass $f(V)$ nicht abgeschlossen ist.
(c) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen und einer kompakten Menge $K \subset Y$, so dass $f^{-1}(K)$ nicht kompakt ist.

Hinweis: Man kann schon für $X = Y = \mathbb{R}$ Beispiele finden.

Aufgabe 4. Der Satz von Heine–Borel besagt, dass wenn wir $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik betrachten, dann ist $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, genau dann, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist. Wir werden in dieser Aufgabe sehen, dass diese i.A. Aussage nicht gilt, wenn wir $\mathbb{R}^n$ mit einer anderen Metrik betrachten.
Wir betrachten dazu den metrischen Raum

$$\begin{aligned} X &:= \mathbb{R}^n, \\ d(x,y) &:= \min\{\|x-y\|, 1\}. \end{aligned}$$

Geben Sie ein Beispiel für eine Teilmenge A von $X = \mathbb{R}^n$, welche die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(a) Die Menge A ist abgeschlossen in $(\mathbb{R}^n, d)$.
(b) Die Menge A ist beschränkt in $(\mathbb{R}^n, d)$.
(c) Die Menge A ist nicht kompakt in dem metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$.

Geben Sie hierbei eine kurze Begründung, warum alle drei Eigenschaften erfüllt sind.