8. Übungsblatt

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben selbständig und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens Freitag den 12.6. um 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein.

Aufgabe 1. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,2\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \qquad \text{wobei } k \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ b_k &:= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx),dx, \qquad \text{wobei } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(b) Skizzieren Sie die Graphen von

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + b_1\sin(x)$$

und

$$h(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x)$$

auf dem Intervall $[0,2\pi]$.
Hinweis: Sie können für das Skizzieren der Graphen folgende Webseite verwenden:

`http://rechneronline.de/function-graphs/`

Aufgabe 2. Wir sagen eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $P, Q \in U$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = P$ und $\gamma(1) = Q$ gibt.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$U := \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P\| \le 1\right\} \cup \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - (2,2)\| \le 1\right\}$$

nicht wegzusammenhängend ist.

(b) Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einer wegzusammenhängenden offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$, so dass $\|Df(x)\| \le 1$ für alle $x \in U$. Gilt dann für alle Punkte $P, Q \in U$, dass $|f(P) - f(Q)| \le \|P - Q\|$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. Es sei $f\colon (a,b) \to (c,d)$ eine bijektive Abbildung zwischen zwei offenen Intervallen.

(a) Wenn f differenzierbar ist, folgt daraus, dass die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wenn f zweifach differenzierbar ist und wenn die Umkehrfunktion f^{-1} einfach differenzierbar ist, ist dann die Umkehrfunktion f^{-1} auch zweifach differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f(x) - x$ eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Abbildung:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{36}x - \frac{1}{48}\cos(y) \\ \frac{1}{43}\cos(x) + \frac{1}{52}y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|Df(x,y)\| \leq \frac{1}{2}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass es genau ein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass $f(x,y) = (x,y)$.