5. ÜBUNGSBLATT

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben selbständig und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens Freitag den 22.5. um 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein.

Aufgabe 1. Fertigen Sie eine sorgfältige Skizze für die Graphen von folgenden Funktionen an.

$$(a)\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 \end{array} \qquad (b)\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2-y^2 \end{array}$$

$$(c)\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+2x+y^2 \end{array} \qquad (d)\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

$$(e)\ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2+y^2} \end{array} \qquad (f)\ \begin{array}{rcl} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y\geq 0\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \cos(x)\cos(y) \end{array}$$

Hinweis: Es kann sinnvoll sein sich zuerst die Einschränkung der Graphen auf die x-Achse, die y-Achse, die xy-Diagonale und die xy-Antidiagonale zu überlegen. Zudem kann es auch bei manchen Beispielen helfen sich einzuschränken auf Geraden in $\mathbb{R}^2$, welche parallel zu der x-Achse oder der y-Achse sind.

Aufgabe 2.

(a) Eine Funktion $f(x,y)$ heißt anschaulich gesprochen *rotationssymmetrisch*, wenn der Graph der Funktion invariant ist unter einer beliebigen Rotation um die z-Achse.
  (i) Geben Sie eine mathematisch saubere Definition für rotationssymmetrisch.
  (ii) Bestimmen Sie, welche der Funktionen in Aufgabe 1. rotationssymmetrisch sind.
  In den Teilaufgaben (i) und (ii) müssen Sie Ihre Antwort nicht begründen.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgender Eigenschaft: für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f_v\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(tv) \end{array}$$

im Punkt $t=0$ stetig. Folgt daraus, dass auch f im Punkt $(0,0)$ stetig ist? Begründen Sie Ihre Antwort.
Die Frage ist also, ob man die Stetigkeit von Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ nur über die Stetigkeit von Funktionen in einer Variablen überprüfen kann.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sqrt{|x|\cdot|y|}. \end{array}$$

Diese Funktion ist (mehr oder minder) offensichtlich stetig. Bearbeiten Sie folgende Aufgaben.

(a) Fertigen Sie ein sorgfältige Skizze für den Graphen von g an.
(b) Zeigen Sie, dass g im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar ist.
(c) Beweisen Sie, dass die Funktion g im Punkt $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 4.

(a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x+tv) \end{array}$$

Zeigen Sie, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$g^{(2)}(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x+tv)\cdot v_i v_j.$$

Hinweis: wenden Sie zweimal Satz 6.10 an.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, wenn es ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ gibt, so dass die Richtungsableitung $D_v f(x)$ negativ ist, dann gibt es auch ein $w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|w\| = 1$, so dass die Richtungsableitung $D_w f(x)$ positiv ist.