Universität Regensburg — SS 2015
Fakultät für Mathematik — Analysis II

1. Übungsblatt

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben selbständig und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens Freitag den 24.4. um 10.30 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein.

Aufgabe 1. Für einen normierten Vektorraum $(V, \| - \|)$ bezeichnen wir
$$\{v \in V \mid \|v\| \leq 1\}$$
als die *Normkugel von* $\| - \|$.

(a) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit folgenden Normen:
$$\begin{array}{lcl} \|(v_1, v_2)\|_{eukl} & := & \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ \|(v_1, v_2)\|_{manh} & := & |v_1| + |v_2| \\ \|(v_1, v_2)\|_{max} & := & \max\{|v_1|, |v_2|\}. \end{array}$$
Fertigen Sie in allen drei Fällen eine sorgfältige Skizze der Normkugel an.

Eine Teilmenge K von einem Vektorraum V heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in K$ und alle $t \in [0,1]$ gilt: $tx + (1-t)y \in K$.

(b) Es sei $(V, \| - \|)$ ein beliebiger normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Normkugel konvex ist.

(c) Gibt es zu jeder konvexen Teilmenge K von V eine Norm $\| - \|$, so dass K die Normkugel von $\| - \|$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.

(a) Es sei V der Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $f(t) = \sin(t)$, $g(t) = 1 + t^2$ und $h(t) = 2 - t$ linear unabhängig in V sind.

(b) Es sei X ein metrischer Raum, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten aus X und es sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass
$$\lim_{k \to \infty} x_k = x \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\substack{\text{Umgebungen} \\ U \text{ von } x}}{\forall} \; \underset{K \in \mathbb{N}}{\exists} \; \underset{k \geq K}{\forall} \; x_k \in U.$$

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt
$$|x_i| \;\le\; \|x\|_{max} \;\le\; \|x\|_{eukl} \;\le\; \sqrt{n}\|x\|_{max}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ gilt, dass
$$B^{eukl}_{\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon}(x) \subset B^{max}_{\frac{1}{\sqrt{n}}\varepsilon}(x) \;\subset\; B^{eukl}_{\varepsilon}(x).$$

Aufgabe 4.

(a) Ist die Menge
$$\{0\} \cup \{\tfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$
eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Zeigen Sie, dass $\{x\} \subset X$ abgeschlossen ist.