Universität Regensburg — SS 2015
Fakultät für Mathematik — Analysis II

7. Übungsblatt

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens Freitag den 5.6. um 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein.

Aufgabe 1.

(a) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

eine symmetrische 2×2–Matrix.

(i) Zeigen Sie: A ist genau dann positiv definit, wenn $a > 0$ und $\det(A) > 0$.
Hinweis: Verwenden Sie Lemma 7.19.

(ii) Formulieren Sie ein analoges Kriterium dafür, dass A negativ definit ist (Sie müssen dieses nicht beweisen).

(b) Es sei $k \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f_k \colon \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sin(x)^2 - kxy + (e^y - 1)^2. \end{array}$$

Für welche Parameterwerte $k \neq \pm 2$ nimmt f_k am Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum an? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.

(a) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + 2x + 2a^2y^2 + y^4.$$

Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von a, das globale Minimum von f. Geben Sie eine ausführliche Begründung für Ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie das globale Minimum von

$$\begin{array}{rcl} f \colon \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x^2+y^2)^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1. \end{array}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3.

(a) Es sei T das 2-dimensionale Dreieck in $\mathbb{R}^2$, welches aufgespannt wird von den drei Punkten $(0,0),(0,4)$ und $(4,0)$. Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion

$$\begin{array}{rcl} g\colon T & \mapsto & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+2x+y^2-4y+8. \end{array}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wir betrachten die Geraden

$$g := \{(2,3,5)+s(0,2,-7) \,|\, s\in\mathbb{R}\}$$

und

$$h := \{(2,-3,5)+t(-1,2,-7) \,|\, t\in\mathbb{R}\}.$$

Finden Sie den minimalen Abstand zwischen g und h. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.

(a) Es sei $K\subset\mathbb{R}^n$ kompakt und es sei $f\colon K\to\mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass jedes lokales Maximum ein striktes lokales Maximum ist. Folgt daraus, dass f nur endlich viele lokale Extrema besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wir betrachten

$$A := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, y\geq x\}$$

und bezeichnen mit

$$B := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, y=x\}$$

den Rand von B. Für eine Funktion $f\colon A\to\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $f_B\colon B\to\mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf B. Gibt es eine stetige Funktion $f\colon A\to\mathbb{R}$, so dass $(0,0)$ ein lokales Minimum von f_B ist, aber so dass, $(0,0)$ kein lokales Minimum von f ist? Begründen Sie Ihre Antwort.