UNIVERSITÄT REGENSBURG — SS 2015
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK — ANALYSIS II

11. ÜBUNGSBLATT

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben selbständig und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens Freitag den 3.7. um 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein.

Aufgabe 1.

(a) Es sei

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z \geq 0\}$$

die obere Hälfte der 2-dimensionalen Sphäre S^2. Bestimmen Sie das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion

$$\begin{array}{rcl} M & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x + y + z. \end{array}$$

Ihre Argumentation muss hierbei gut nachvollziehbar sein.

(b) Wir betrachten

$$M := \{(x, y, z) \mid x + y - 2z = 10\}.$$

Bestimmen Sie das globale Minimum der Funktion

$$\begin{array}{rcl} M & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^2 + y^2 + z^2. \end{array}$$

Ihre Argumentation muss hierbei gut nachvollziehbar sein.

Aufgabe 2.

(a) Es sei $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. In Übungsblatt 10 hatten wir schon gesehen, dass der Graph

$$M := \{(x, y, h(x, y)) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und einen regulären Wert $a \in \mathbb{R}$, so dass $M = f^{-1}(a)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Seien $0 < a < b < c$ reelle Zahlen, und sei

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \ . \end{aligned}$$

Die Menge $M := g^{-1}(1)$ ist nach dem Satz vom regulären Wert eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

In dieser Aufgabe interessieren wir uns für die Extrema der Funktion f auf M.

(i) Fertigen Sie eine Zeichnung von M an.

(ii) Bestimmen Sie das absolute Maximum und Minimum von f auf M.

Aufgabe 3. Wir betrachten die folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y' = e^y \cos(t)$, wobei $t, y \in \mathbb{R}$ beliebig.

(b) $y' = \sqrt{1 - y^2}$, wobei $t \in \mathbb{R}$ und $y \in (-1, 1)$.

Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung, d.h. bestimmen Sie für jeden Punkt (t_0, y_0) im Definitionsbereich die Lösung φ der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = y_0$ erfüllt. Die Lösungsfunktion muss explizit angegeben werden, d.h. alle Integrale müssen bestimmt werden.

Aufgabe 4. Wir betrachten die folgenden Differentialgleichungen:

(a) $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1 - y^2}$, mit $y \in (0, 1)$,

(b) $y' = (a^2 + t^2)(b^2 + y^2)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der beiden Differentialgleichungen, d.h. bestimmen Sie für jeden Punkt (t_0, y_0) im Definitionsbereich die Lösung φ der Differentialgleichung, welche die Anfangsbedingung $\varphi(t_0) = y_0$ erfüllt. Die Lösungsfunktion muss explizit angegeben werden, d.h. alle Integrale müssen bestimmt werden.