10. ÜBUNGSBLATT

Stefan Friedl und Raphael Zentner

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben selbständig und werfen Sie das bearbeitete Übungsblatt bis spätestens Freitag den 26.6. um 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Briefkästen ein.

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} F\colon \mathbb{R}\times(0,\pi) & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\varphi,\theta) & \mapsto & \begin{pmatrix} \sin\theta\cdot\cos\varphi \\ \sin\theta\cdot\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

eine Immersion ist.

(b) Wir betrachten folgende Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3\setminus Z &\to \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\mapsto \left\| (x,y,z) - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)\right\|^2, \end{aligned}$$

wobei $Z := \{(0,0,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}$ die z–Achse bezeichnet.

(i) Bestimmen Sie den Gradienten von f an einem Punkt (x,y,z). Hinweis: Vereinfachen Sie zuerst $f(x,y,z)$.

(ii) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{4}$ ein regulärer Wert von f ist.

Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion

$$\begin{array}{rcl} f\colon S^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x+y-z. \end{array}$$

(b) Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion

$$\begin{array}{rcl} g\colon S^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & e^x. \end{array}$$

(c) Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion

$$\begin{array}{rcl} h\colon S^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & xz. \end{array}$$

(d) Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion

$$\begin{array}{rcl} k\colon S^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2+2y^2+z^2. \end{array}$$

Begründen Sie in allen Fällen Ihre Antwort.

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass der 'unendliche Zylinder'

$$M := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine stetige Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$, welche genau ein lokales Maximum besitzt.

(c) Gibt es auf M eine stetige Funktion, welche weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum annimmt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion

$$\begin{array}{rcl} V := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \to & x^2 + y^2 - z^2. \end{array}$$

Aufgabe 4. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y, f(x, y)). \end{array}$$

Die Bildmenge von φ, d.h. die Menge der Punkte

$$M := \{(x, y, f(x, y)) \mid x, y \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

wird der Graph von f genannt.

(a) Zeigen Sie, dass φ eine Immersion ist.

(b) Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(c) Bestimmen Sie eine Karte $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ für die Untermannigfaltigkeit M.