

Wie Ihre Schüler*innen bedingte Wahrscheinlichkeiten und Schnittwahrscheinlichkeiten besser unterscheiden können

Regionale Fortbildung in den MINT-Labs Regensburg,
9. März 2022

Prof. Dr. Karin Binder und Nicole Steib
Didaktik der Mathematik



Universität Regensburg

Verwirrende Anteile

“

Aber schauen Sie mal...wir haben
jetzt **jeden vierten Deutschen** geimpft.

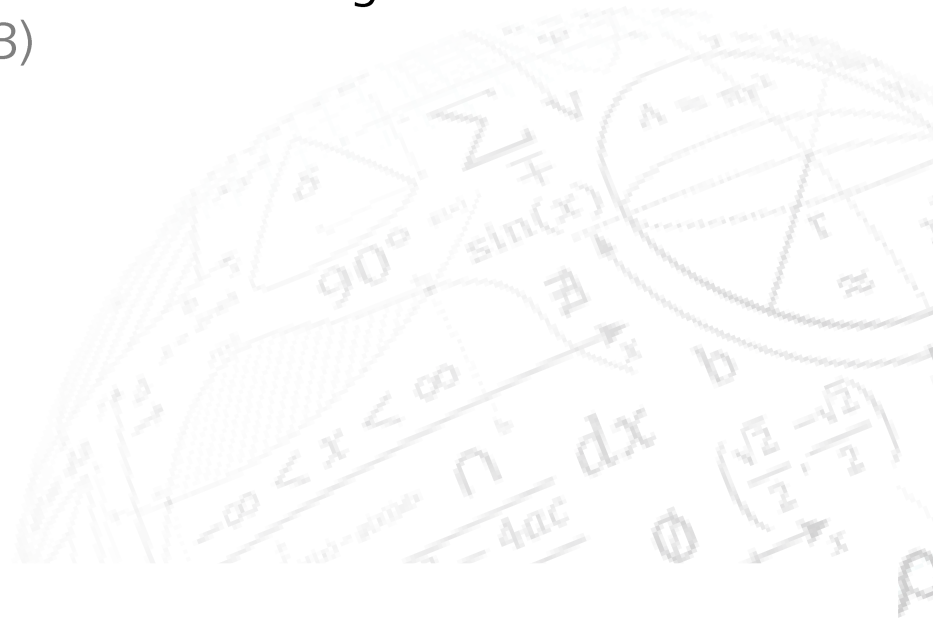
Diese Woche wird es noch
jeder Fünfte werden.

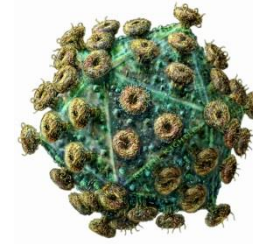
Folgen des statistischen Analphabetismus



➤ Fehlentscheidungen vor Gericht
SCHNEPS & COLMEZ (2013)

➤ Fälle von Überdiagnosen und Überbehandlungen
WEGWARTH & GIGERENZER (2013)





Folgen positiver HIV-Tests

Kurz nach Einführung der HIV-Tests (1985) erhielten 22 Blutspender in Florida die Information, dass ihr HIV-Test positiv war.



7 von diesen 22 Personen begingen Selbstmord, ohne zu wissen, ob das Ergebnis stimmte.



Gliederung



Teil 1

Numerische
Darstellungsarten
von Anteilen



Teil 2

Bedingte Wahrscheinlichkeiten,
Schnittwahrscheinlichkeiten,
Bayesianische Aufgaben



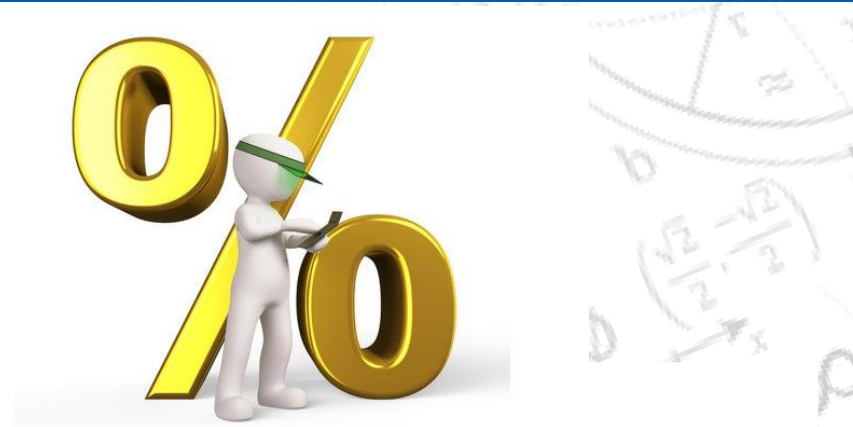
Teil 3

Modellierungsaufgaben zu
bedingten Wahrscheinlichkeiten



Abschnitt 1

Numerische Darstellungsarten von Anteilen



Darstellungen von Anteilen in Zeitungen

Jeder Achte fuhr schon Fernbus statt Bahn

Parallel zu vielen ICE-Strecken fahren immer mehr Fernbusse. Es steigt der Anteil derjenigen, die statt in den Zug auch mal in den Bus steigen.



BERLIN. Die Fernbusse machen der Deutschen Bahn nach einer Umfrage zunehmend mögliche Kunden abspanstig. Knapp jeder achte Deutsche (12 Prozent) ist seit Januar 2013 schon einmal in einen Fernbus statt in die Züge der Bahn gestiegen, wie das Meinungsforschungsinstitut YouGov in einer Online-Umfrage ermittelte. Vor einem Jahr waren es noch 5 Prozent.

Quelle: Mittelbayerische Zeitung (26.04.2014)

Jeder Fünfte sucht einen neuen Job

Der Trend bei der Bewerbung geht dabei derzeit immer mehr in Richtung E-Mail. Als Informationsgeber bei der Jobsuche werden Tageszeitungen bevorzugt.



Fast jeder Fünfte – 18 Prozent der Befragten – sucht derzeit dringend einen neuen Job. Foto: dpa

FRANKFURT/MAIN. Neues Jahr, neues Glück: Das denken nicht wenige auch im Hinblick auf die Karriere. Fast jeder Fünfte (18 Prozent) sucht derzeit dringend einen neuen Job. Das zeigt eine bevölkerungsrepräsentative Umfrage des Marktforschungsinstituts Toluna. Jeder Neunte (11 Prozent) gibt als Grund an, keinen festen Job zu haben. Jeder Fünfzehnte (7 Prozent) ist momentan beschäftigt, will aber möglichst bald wechseln. Etwas mehr als jeder Fünfte (22 Prozent) schaut sich hin und wieder

Quelle: Mittelbayerische Zeitung (18.12.2013)

Jurastudenten für drakonische Strafen

Jeder dritte Jurastudent am Anfang seiner Ausbildung will die Todesstrafe zurück. Der Wunsch nach hohen Strafen wächst.



Jeder dritte Jurastudent am Anfang seiner Ausbildung will heute die Todesstrafe zurück. Foto: dpa

VON CATHERINE SIMON, DPA

ERLANGEN Es ist paradox: Die Zahl der Morde und Totschläge sinkt in Deutschland seit Jahren. Die Leute fühlen sich so sicher wie fast nie zuvor. Und dennoch wächst bei jungen Jurastudenten der Wunsch nach immer härteren Strafen. Ein Drittel von ihnen befürwortet laut einer Studie sogar die Todesstrafe. Etwa gleich viele finden, dass selbst eine lebenslange Haft bei manchen Straftaten noch zu mild ist. Und die Hälfte der Befragten würde einen

Quelle: Mittelbayerische Zeitung (26.11.2014)



Quelle: BILD (28.11.2014)

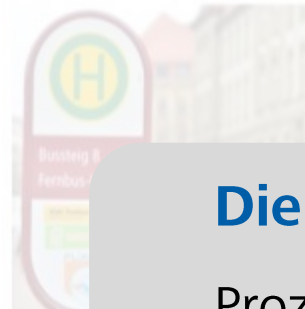


Quelle: Die Welt (09.03.2014)

Darstellungen von Anteilen in Zeitungen

Jeder Achte fuhr schon Fernbus statt Bahn

Parallel zu vielen ICE-Strecken fahren immer mehr Fernbusse. Es steigt der Anteil derjenigen, die statt in den Zug auch mal in den Bus steigen.



BERLIN Die Fernbusse machen der Deutschen Bahn nach einer Umfrage zunehmend mögliche Kunden abspanstig. Knapp jeder achte Deutsche (12 Prozent) ist seit Januar 2014

Jeder Fünfte sucht einen neuen Job

Der Trend bei der Bewerbung geht dabei derzeit immer mehr in Richtung E-Mail. Als Informationsgeber bei der Jobsuche werden Tageszeitungen bevorzugt.



FRANKFURT/MAIN. Neues Jahr, neues Glück: Das denken nicht wenige auch im Hinblick auf die Karriere. Fast jeder Fünfte (18 Prozent) sucht derzeit dringend einen neuen Job. Das zeigt eine bevölkerungsrepräsentative

Jurastudenten für drakonische Strafen

Jeder dritte Jurastudent am Anfang seiner Ausbildung will die Todesstrafe zurück. Der Wunsch nach hohen Strafen wächst.



VON CATHERINE SIMON, DPA

ERLANGEN Es ist paradox: Die Zahl der Morde und Totschläge sinkt in Deutschland seit Jahren. Die Leute fühlen sich so sicher wie fast nie zuvor. Und dennoch wächst bei jungen Jurastudenten der Wunsch nach immer härteren Strafen. Ein Drittel von ihnen antwortet laut einer Studie sogar die Todesstrafe. Etwa gleich viele finden, dass selbst eine lebenslange Haft bei manchen Straftaten noch zu mild ist. Und die Hälfte der Befragten würde einen

Die drei Klassiker in Zeitungen:

Prozent, absolute Häufigkeiten und „jeder Wievielte“ – und in der Schule?



Quelle: BILD
(28.11.2014)



Quelle: Die Welt
(09.03.2014)



Studie: Darstellungsarten von Anteilen in Print-, Audio und visuellen Medien

Darstellungsart	Beispiel	Zeitungen $N = 19$ (Ausgaben)	Radio $N = 6$ (1 h)	Fernsehen $N = 6$ (Nachrichten)	Gesamt
Prozent	25 %	2106	54	29	2189
Dezimalbrüche	0,25	0	0	0	0
Gewöhnliche Brüche numerisch	$\frac{1}{4}$	0	17*	18*	0
Zahlwort	Ein Viertel	76			111
Absolute Häufigkeiten	1 von 4	97	4	4	105
„Jeder Wievielte“	Jeder Vierte	42	2	2	46
Chancen(verhältnisse)	1:3 (1 zu 3)	18	0	0	18

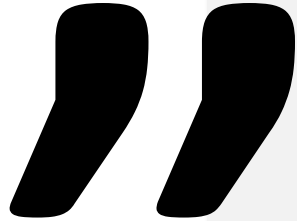
* In mündlicher Kommunikation kann nicht zwischen numerischem Bruch und Zahlwort unterschieden werden

Krauss, Weber, Binder & Bruckmaier (2020)

Verschiedene numerische Darstellungen von Anteilen

Prozente	25%	Schule & Medien
Dezimalbrüche	0,25	Schule
Gewöhnliche Brüche	$\frac{1}{4}$	Schule (& Medien)
Absolute Häufigkeiten	1 von 4	Medien
„Jeder Wievielte“	jeder vierte	Medien
Chancenverhältnisse	1 : 3 („1 zu 3“)	Medien (selten)

Erstaunlicherweise ist die Umrechnung dieser Darstellungen nicht selbstverständlich!



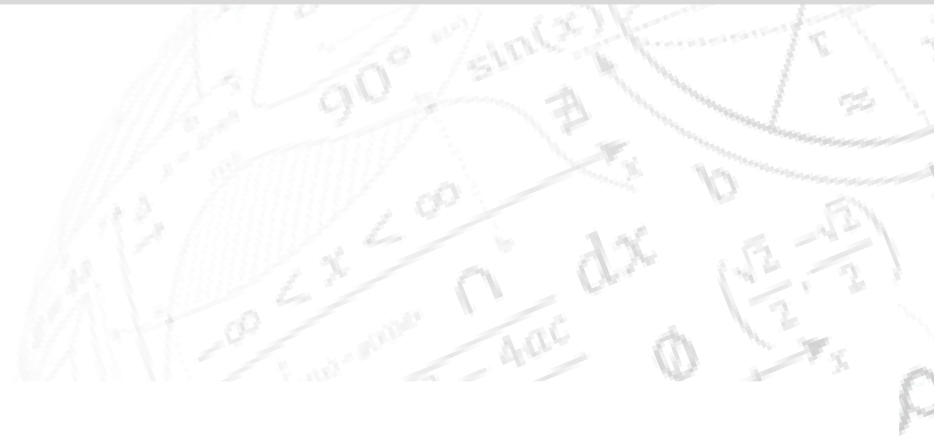
Die Schülerinnen und Schüler ...

entnehmen einfachen Texten (z. B. aus Zeitungen), die Prozentangaben enthalten, die wesentlichen mathematischen Informationen und prüfen diese auf Korrektheit (auch: Unterscheidung von „Prozent“ und „Prozentpunkten“); **dabei gehen sie flexibel mit in den Medien häufig verwendeten alternativen Darstellungen von Prozentangaben um (z. B. „jeder Siebte“, „drei von fünf“).**

LehrplanPlus Gymnasium Bayern, Klasse 6



Workshop-Phase I



Workshop-Phase I

Aufgabe 1:

- (a) Rechnen Sie die beiden im Artikel markierten Informationen in jede der fünf anderen numerischen Darstellungsarten um.

Numerische Darstellung	Beispiel	„Zwei von fünf“	„Jeder Fünfte“
Prozente	25 %	40 %	20 %
Dezimalbrüche	0,25	0,4	0,2
Gewöhnliche Brüche	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
Absolute Häufigkeiten	1 von 4	2 von 5	1 von 5
„Jeder Wievielte“	jeder Vierte	—————	jeder Fünfte
Chancenverhältnisse	1 zu 3	2 zu 3	1 zu 4



Workshop-Phase I

Aufgabe 1:

- (b) Sammeln Sie möglichst viele Fehler, die Sie sich bei Schülerinnen und Schülern bei den Umrechnungen vorstellen können.

Überblick über mögliche Fehler:

- Umrechnung von „x %“ in „jeder x-te“:
Bsp.: 5 % \triangleq „jeder 5-te“ (nur für „10 %“ gültig)
- Umrechnung von Chancenverhältnissen „1 zu x“ in gewöhnliche Brüche „1/x“ (und umgekehrt):
Bsp.: $\frac{1}{4}$ (=1:4) \triangleq Chancenverhältnis „1 zu 4“ (statt „1 zu 3“)
- Umrechnung von „x von y“ in „jeder z-te“:
Bsp.: „3 von 10“ \triangleq „jeder $3\frac{1}{3}$ -te“ (nur für Stammbrüche möglich)
- Umrechnung von Prozentangaben größer als 50 % in „jeder x-te“:
Bsp.: 80 % \triangleq „jeder ?-te“ (nur für ≤ 50 % sinnvoll)

Typische Fehler von Schülerinnen und Schülern aus einer aktuellen Studie

Was bedeutet 40%?

4 von 10

☒ ja

☐ nein

Jeder Vierzigste

☐ ja

☒ nein

$\frac{2}{5}$

☒ ja

☐ nein

0,4

☒ ja

☐ nein

Ein Vierzigstel

☐ ja

☒ nein

Vierhundert von Tausend

☒ ja

☐ nein

Eine Chance von „4 zu 10“

☐ ja

☒ nein

1.

Lösen Sie die Aufgabe!

2.

Welche Antwortmöglichkeit war für die Schülerinnen und Schüler vermutlich am schwierigsten?

Typischer Fehler von Schülerinnen und Schülern aus einer aktuellen Studie

Bitte übertrage die Angabe „jeder Zwanzigste“

... in eine entsprechende Prozentangabe! 20 %

F

... in einen gewöhnlichen Bruch (z.B. $\frac{1}{2}$): $\frac{1}{20}$

✓



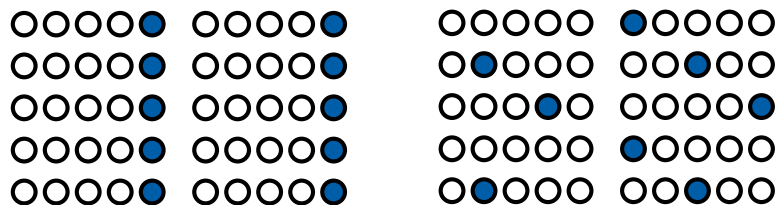
Aufgabe 2:

- (a) Finden Sie die Fehler in den Zeitungsausschnitten.
 (b) Erstellen Sie zu jedem Zeitungsausschnitt mögliche Aufgabenstellungen.

Beispiel 1

~~Jeder Fünfte < Jeder Sechste~~ ?

Jeder Fünfte > Jeder Sechste



Leipziger Volkszeitung (09.10.2013)

Erschreckende Wissenslücken

Erwachsene in Deutschland können im internationalen Vergleich nur mittelmäßig lesen und Texte verstehen. Gleiches gilt für Grundrechenarten wie Prozentrechnen. Dies zeigt der erste PISA-Test zu den Alltagskompetenzen von Erwachsenen in 24 wichtigen Industrienationen der Welt.

Die „PISA für Große“-Studie verschärft die Aussage früherer Studien: **Jeder Sechste** liest nur so gut wie ein zehnjähriges Kind. Das ist beim Kopfrechnen nur unwesentlich besser, schließlich hapert es hier bei **jedem Fünften** mit dem Einmaleins. Der erfreulichste Teil der Studie:

Beispiel 1

Erschreckende Wissenslücken

Erwachsene in Deutschland können im internationalen Vergleich nur mittelmäßig lesen und Texte verstehen. Gleiches gilt für Grundrechenarten wie Prozentrechnen. Dies zeigt der erste PISA-Test zu den Alltagskompetenzen von Erwachsenen in 24 wichtigen Industrienationen der Welt.

Die „PISA für Große“-Studie verschärft die Aussage früherer Studien: Jeder Sechste liest nur so gut wie ein zehnjähriges Kind. Das ist beim Kopfrechnen nur unwesentlich besser, schließlich hapert es hier bei jedem Fünften mit dem Einmaleins. Der erfreulichste Teil der Studie:



Mögliche Aufgabenstellung

In dieser Zeitungsmeldung findet sich ein Fehler. Erkläre diesen Fehler deinem Banknachbarn bzw. deiner Banknachbarin und überlege, warum dem Journalisten dieser Fehler vermutlich passiert ist.

Beispiel 2

Aus der *Norderneyer Badezeitung*:
„Fuhr vor einigen Jahren noch **jeder zehnte** Autofahrer zu schnell, so ist es mittlerweile heute ‚nur noch‘ **jeder fünfte**. Doch auch **fünf Prozent** sind zu viele, und so wird weiterhin kontrolliert, und die Schnelfahrer haben zu zahlen.“

Mögliche Aufgabenstellungen

- In dieser Zeitungsmeldung finden sich zwei Fehler! Finde diese Fehler.
- Korrigiere eine der drei Zahlenangaben, so dass beide Fehler „gleichzeitig verschwinden“.

Workshop-Phase I

Beispiel 3

PANORAMA



MITTWOCH, 13. FEBRUAR 2019

Eldorado für Alleinlebende

Regensburg ist Deutschlands Single-Hochburg

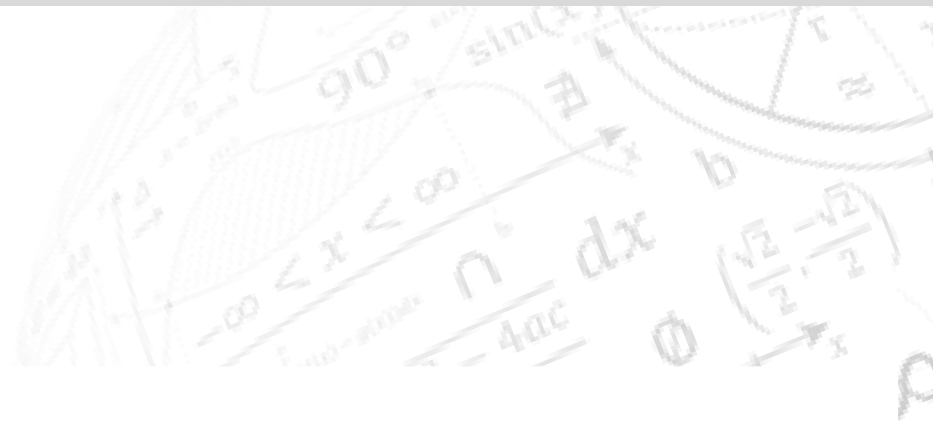
Keine andere Stadt in Deutschland hat mehr Singlehaushalte als Regensburg: 56 Prozent aller Einwohner der bayerischen Stadt leben allein in ihrer Wohnung. Der Bundesschnitt liegt lediglich bei 38 Prozent, wie Konsumforscher herausfanden.

Nirgendwo in Deutschland ist der Anteil an Singlehaushalten höher als im bayerischen Stadtkreis Regensburg. Eine **Analyse des Marktforschungsinstituts GFK** hat ergeben, dass in 56,5 Prozent der Regensburger Haushalte 2018 nur ein Mensch lebte. Der Bundesschnitt lag bei 38,1 Prozent.

Mögliche Aufgabenstellungen

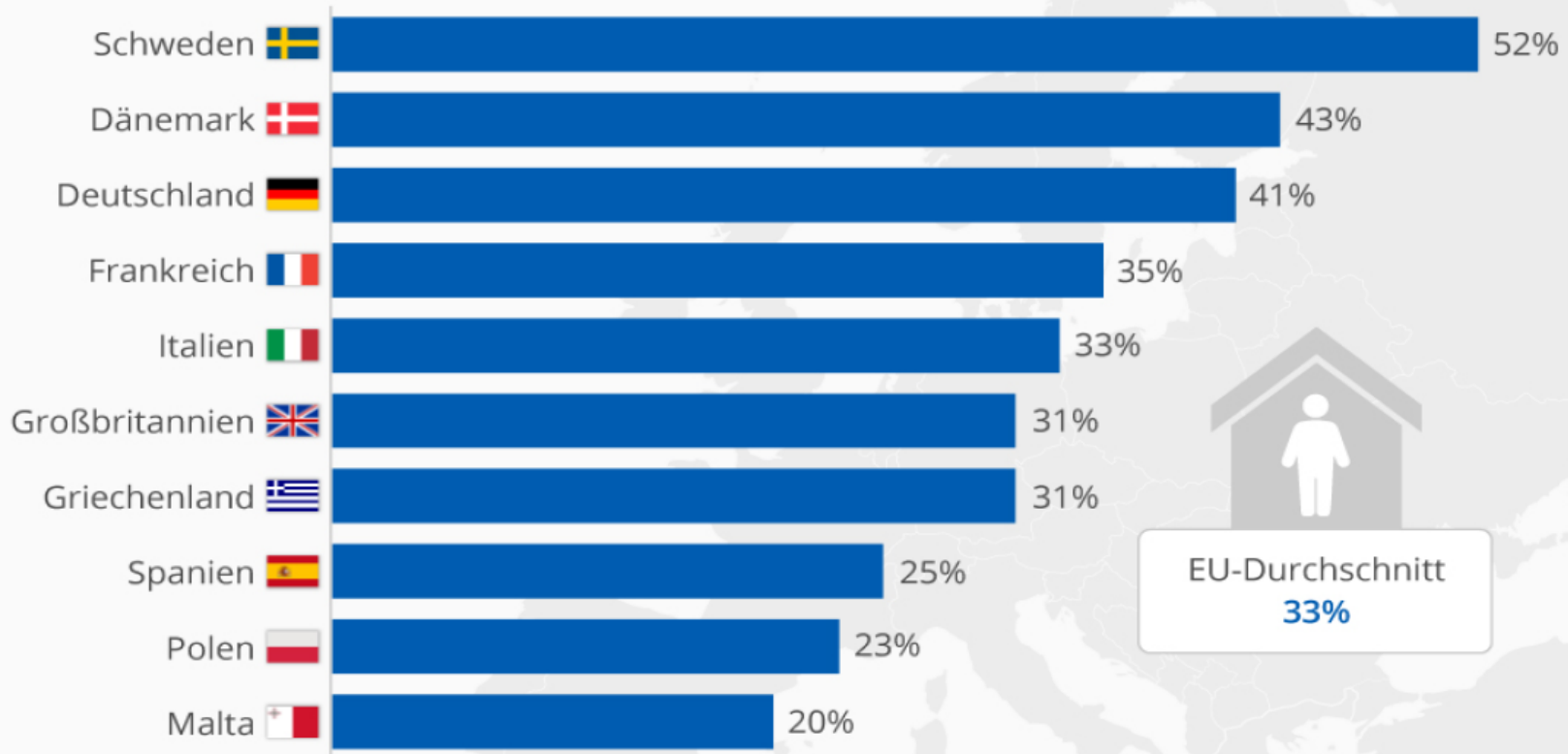
- Welcher statistische Fehler findet sich in diesem Artikel?
- Wenn wirklich ca. 50% der Haushalte Single-Haushalte sind, wie viele Personen leben dann maximal in Regensburg alleine?

Jeder dritte Europäer lebt allein



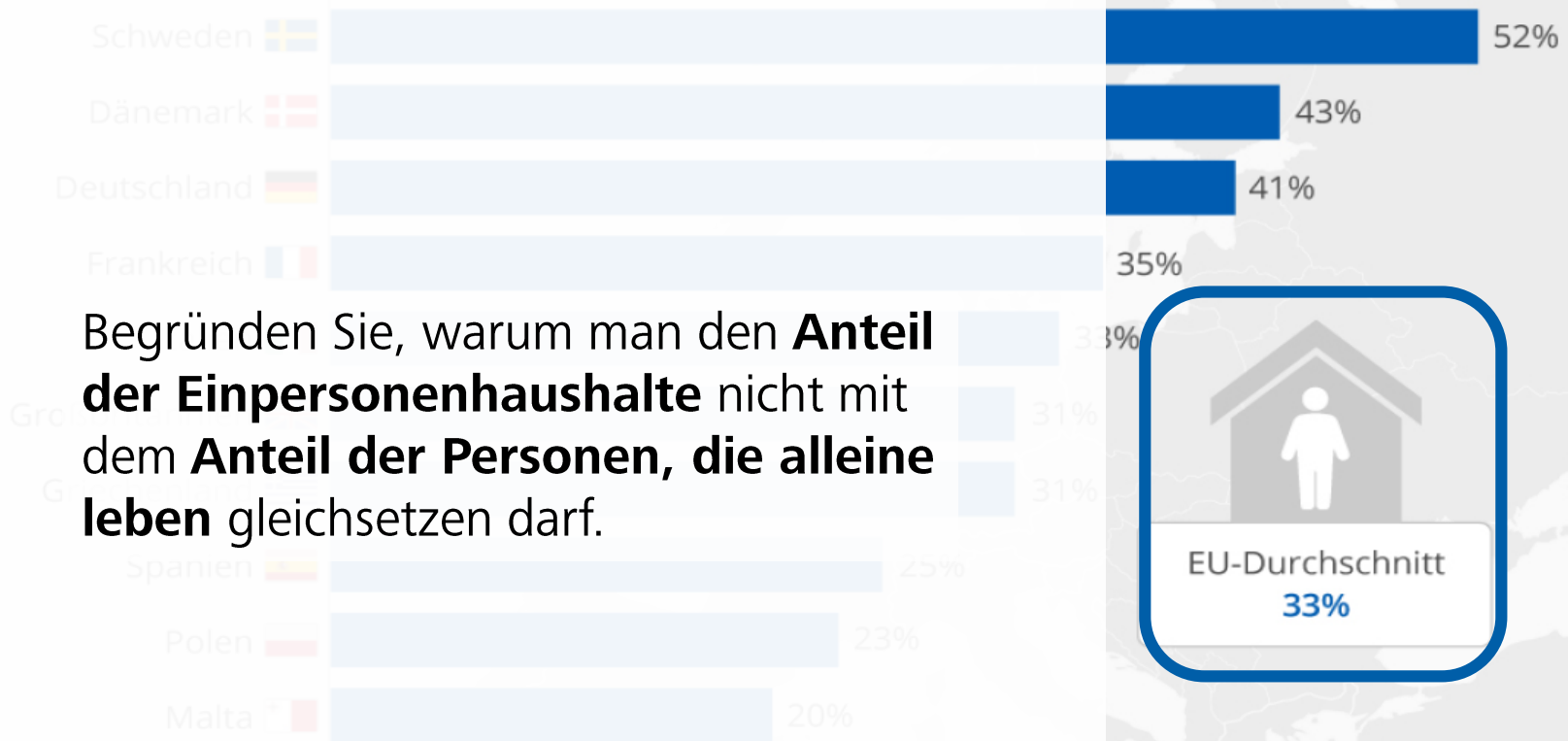
Jeder dritte Europäer lebt alleine

Anteil der Einpersonenhaushalte in ausgewählten EU-Ländern 2016



Jeder dritte Europäer lebt alleine

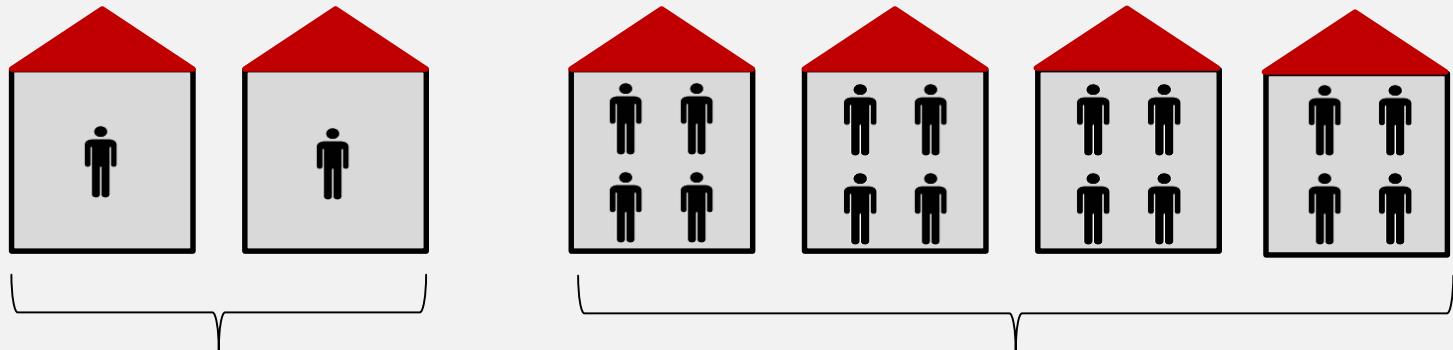
Anteil der Einpersonenhaushalte in ausgewählten EU-Ländern 2016



Begründen Sie, warum man den **Anteil der Einpersonenhaushalte** nicht mit dem **Anteil der Personen, die alleine leben** gleichsetzen darf.

ERKLÄRUNG: Einpersonenhaushalte \neq Personen leben alleine

Fiktive kleine Ortschaft mit **18 Personen**, die wie folgt aussieht:



2 Haushalte mit je einer Person

4 Haushalte mit je vier Personen

In Haushalten gedacht:

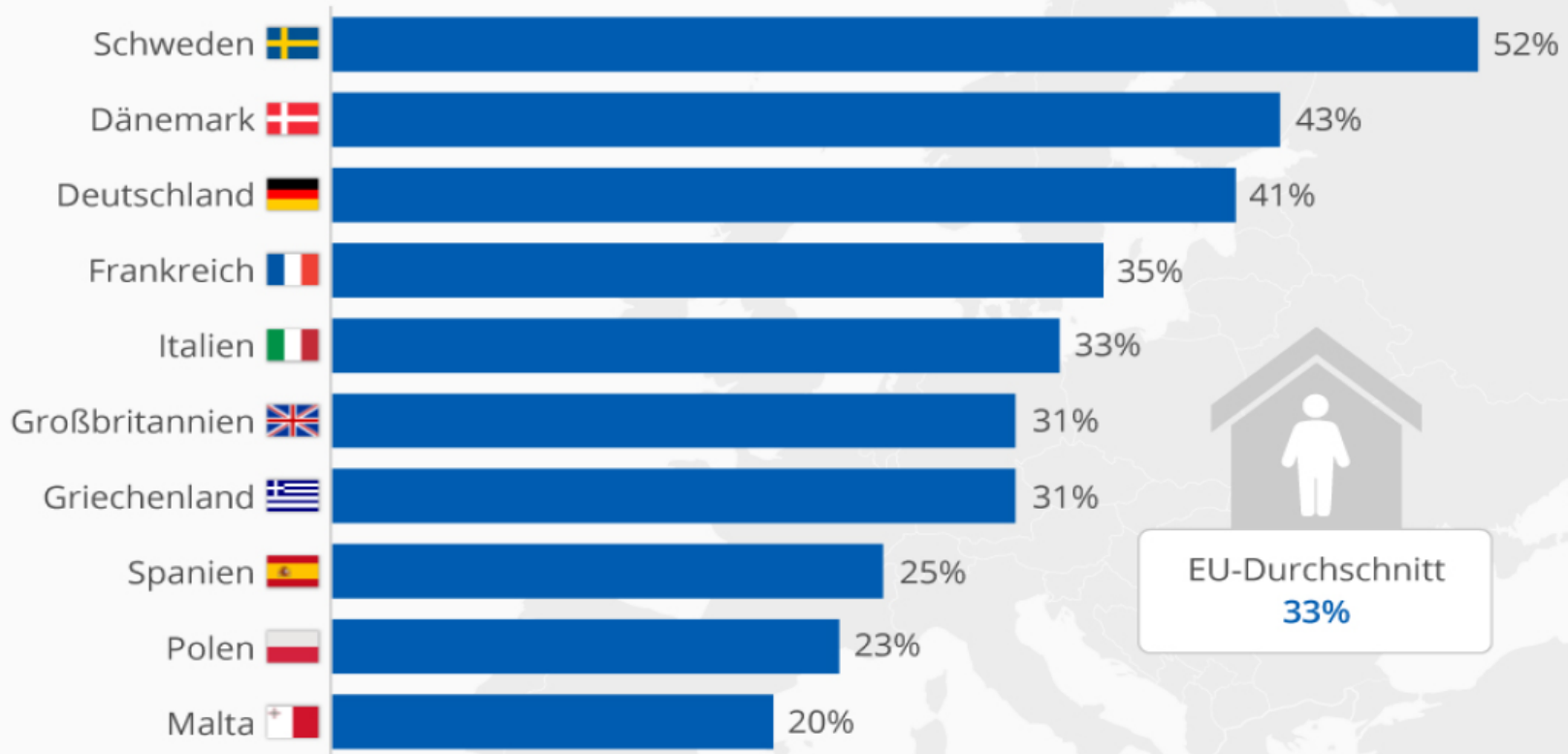
2 von **6 Haushalten** sind Einpersonenhaushalte: Also $33,\overline{3}\%$ sind Einpersonenhaushalte.

In Personen gedacht:

2 von **18 Personen** leben alleine: Also $11,\overline{1}\%$ der Menschen leben allein.

~~Jeder dritte Europäer lebt alleine~~ ?

Anteil der Einpersonenhaushalte in ausgewählten EU-Ländern 2016



Workshop-Phase I

Beispiel 3

PANORAMA



MITTWOCH, 13. FEBRUAR 2019

Eldorado für Alleinlebende

Regensburg ist Deutschlands Single-Hochburg

Keine andere Stadt in Deutschland hat mehr Singlehaushalte als Regensburg: 56 Prozent aller Einwohner der bayerischen Stadt leben allein in ihrer Wohnung. Der Bundesschnitt liegt lediglich bei 38 Prozent, wie Konsumforscher herausfanden.

Nirgendwo in Deutschland ist der Anteil an Singlehaushalten höher als im bayerischen Stadtkreis Regensburg. Eine **Analyse des Marktforschungsinstituts GFK** hat ergeben, dass in 56,5 Prozent der Regensburger Haushalte 2018 nur ein Mensch lebte. Der Bundesschnitt lag bei 38,1 Prozent.

Wiederkehrende Statistik-Fehler in den Medien

Manche statistische Fehler tauchen in den Medien regelmäßig auf und können so unterrichtlich auch sehr gut eingesetzt werden: Man findet immer eine passende **aktuelle** Zeitungsmeldung dazu!

Wiederkehrende Themen (siehe Binder, Krauss & Krämer, 2019):

- **Equal Pay Day:** Immer im März/April
- **Polizeiliche Kriminalitätsstatistik:** Immer im Ende April oder Anfang Mai
- **Brustkrebsmonat:** Oktober
- **„Jeder zweite lebt allein“:** Mindestens zweimal im Jahr. :-)
- **Mehrwertsteuer geschenkt bei MediaMarkt oder Saturn:** Immer im September



tagesschau

Frauen verdienen 18 Prozent weniger

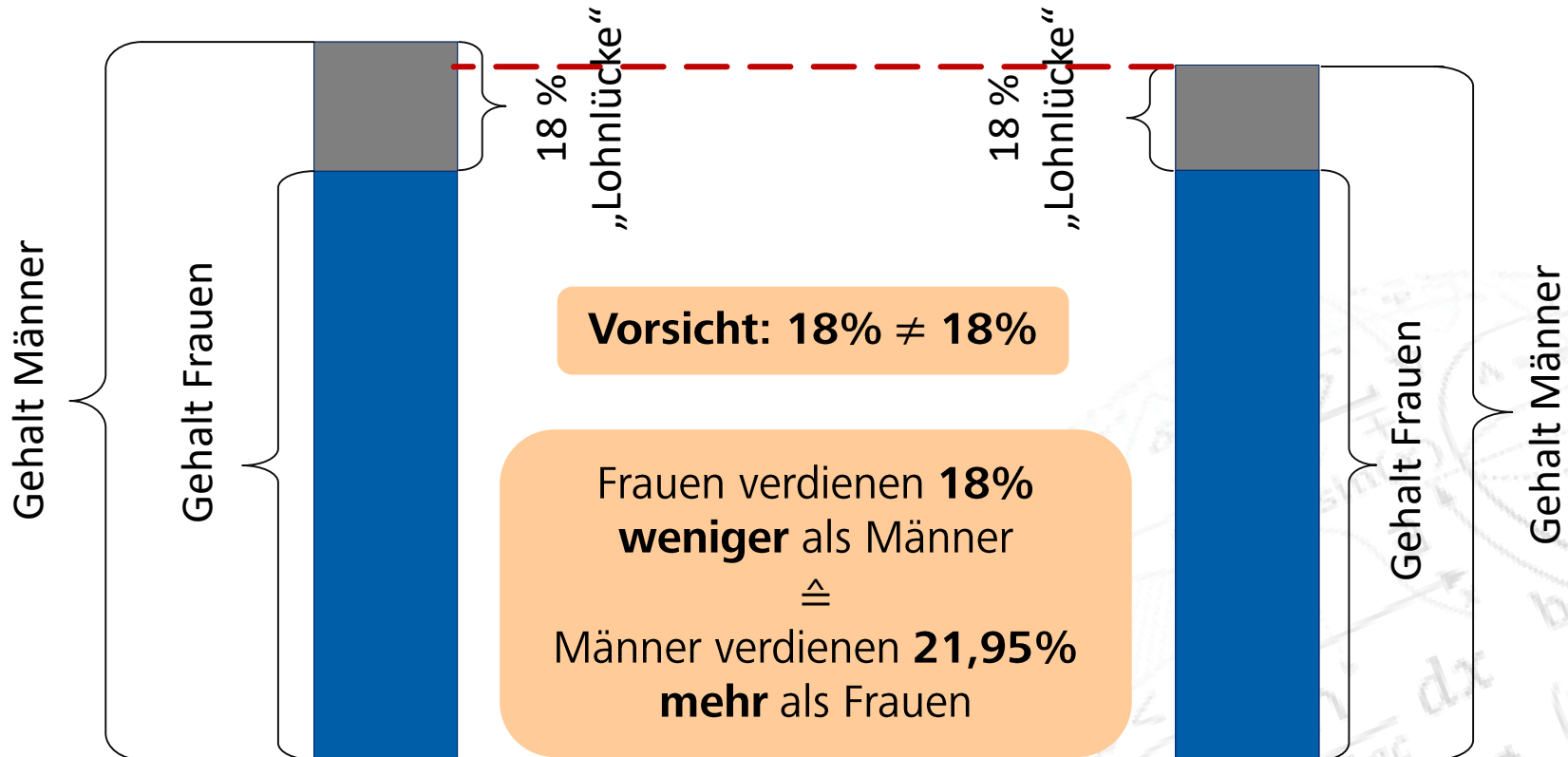
Stand: 07.03.2022 10:30 Uhr

Der Gender Pay Gap in Deutschland hat sich 2021 kaum verändert. Auch im vergangenen Jahr lag der durchschnittliche Stundenlohn von Männern 18 Prozent höher als der von Frauen. Das hat viele Gründe.

Wie groß ist denn nun die „Lohnlücke“?

Frauen verdienen **18 % weniger** als Männer

Männer verdienen **18 % mehr** als Frauen



Wo findet man solche „Unstatistiken“?

Die beste Seite für aktuelle
Unstatistiken:

<http://www.rwi-essen.de/unstatistik/>

Auch diese hier ist gut:

<http://www.achtung-statistik.de/>

Empfehlenswert sind außerdem die Bücher:

Bauer, T., Gigerenzer, G., & Krämer, W. (2014).
Warum dick nicht doof macht und Genmais nicht tötet: Über Risiken und Nebenwirkungen der Unstatistik. Campus Verlag.



Christensen, B., & Christensen, S. (2015).
Achtung: Statistik. Springer Berlin Heidelberg.



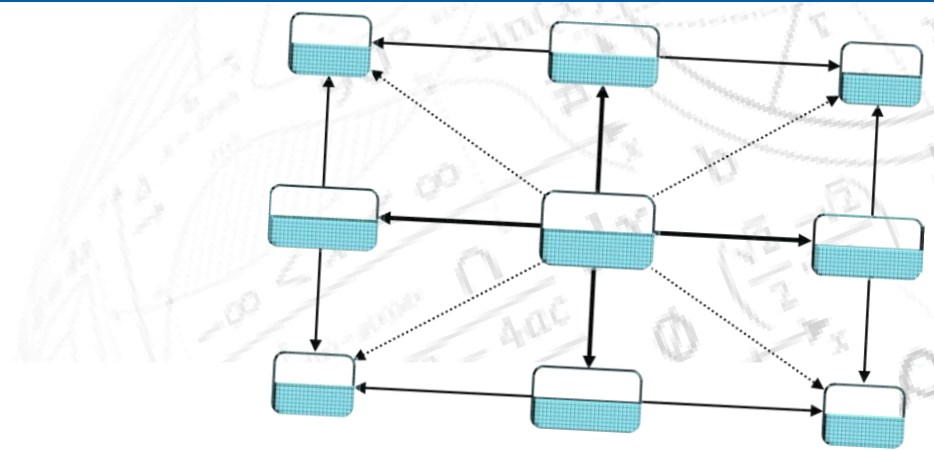


Pause



Abschnitt 2

Häufigkeitsnetze zur Visualisierung bedingter Wahrscheinlichkeiten



Relativ neu in Deutschland: HIV-Selbsttests

Seit dem **29. September 2018** kann man in Deutschland HIV-Selbsttests kaufen.

1. Dezember 2018: „Welt-AIDS-Tag“ mit dem Motto: „Know your status“ – also „Kenne deinen Gesundheitsstatus“

Ziel: Bis zum Jahr 2020 sollen 90% aller HIV-infizierten Menschen ihren Immunstatus kennen.

Was würde das bedeuten, wenn wir tatsächlich
ALLE den Selbsttest machen, um unseren
Gesundheitsstatus zu kennen?



Wie gut sind die HIV-Tests?

Sensitivität: Die Sensitivität dieses Tests wurde berechnet und beträgt **100%** mit einem Konfidenzintervall von 99,1% bis 100%. Alle HIV-positiven Personen in dieser Studie erhielten ein richtiges Ergebnis. Es gab keine falsch negativen Ergebnisse.

Zuverlässigkeit: Eine Durchführbarkeitsstudie zur Validierung dieses Tests durch Laien ergab, dass mehr als 99,2% der Teilnehmer ein interpretierbares Ergebnis erzielten und mehr als 98,1% des Ergebnis korrekt interpretierten. Positive Ergebnisse wurden in 100 % der Fälle korrekt interpretiert.

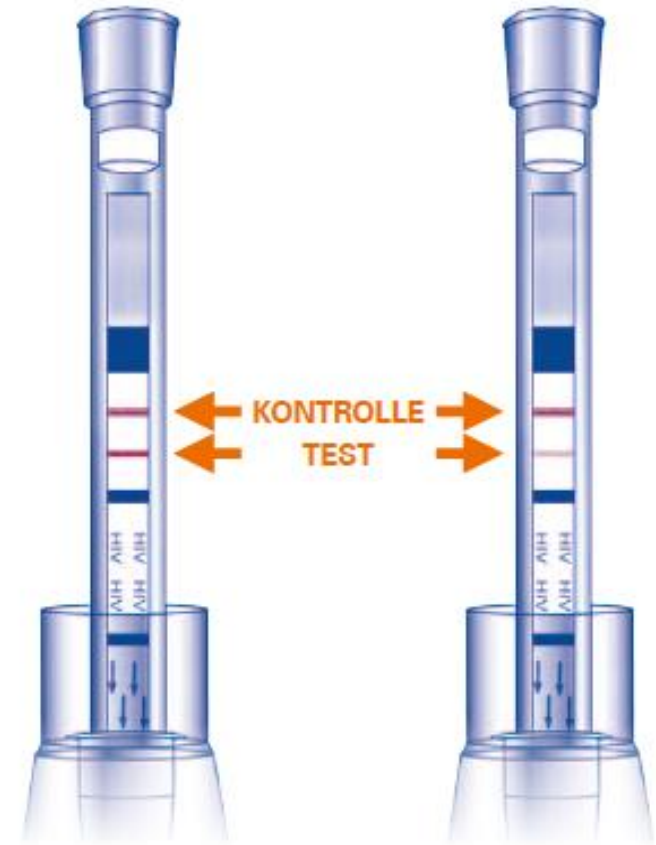
Interferenz: Bei der Prüfung von Proben, die – auch aufgrund von Erkrankungen – Stoffe enthalten, die die Ergebnisse dieses Tests möglicherweise beeinflussen, wurden keine Interferenzen beobachtet.

Spezifität: Die Spezifität dieses Tests wurde berechnet und beträgt **99,8%** mit einem Konfidenzintervall von 99,5% bis 100%. 0,2% der HIV-negativen Personen erhielten ein falsches Resultat, d.h., 0,2% der Ergebnisse waren falsch positiv.

Wie gut sind die HIV-Tests?

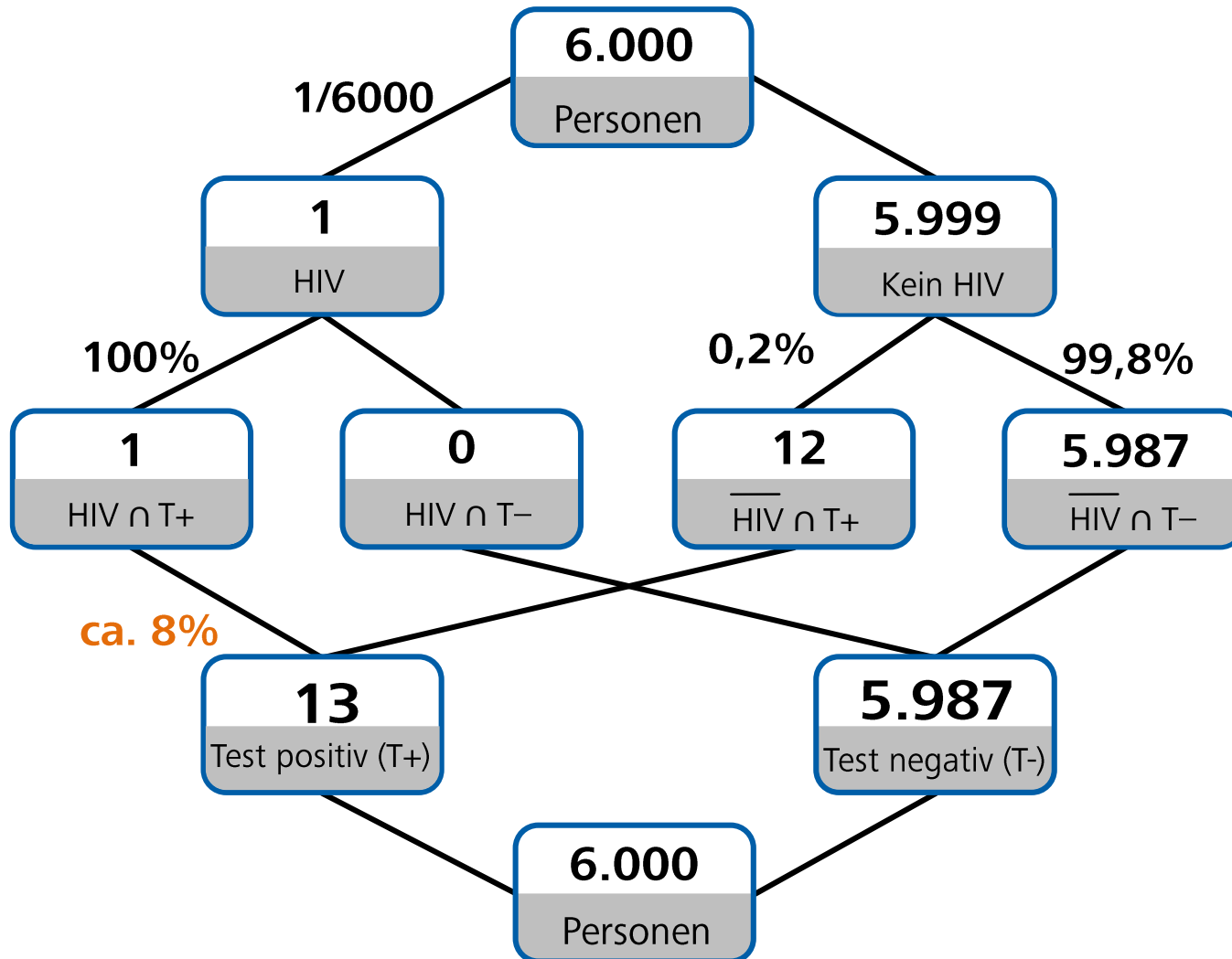
Wie hoch ist die Sensitivität dieses Tests? Die Wahrscheinlichkeit denn nun wirklich, dass man erkrankt ist, wenn der Test positiv ist?

Diese Wahrscheinlichkeit steht nirgendwo in der Gebrauchsanweisung!

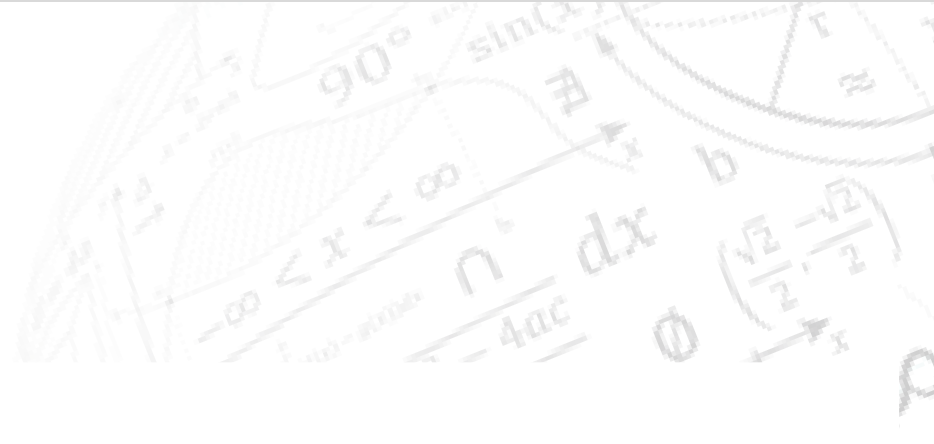
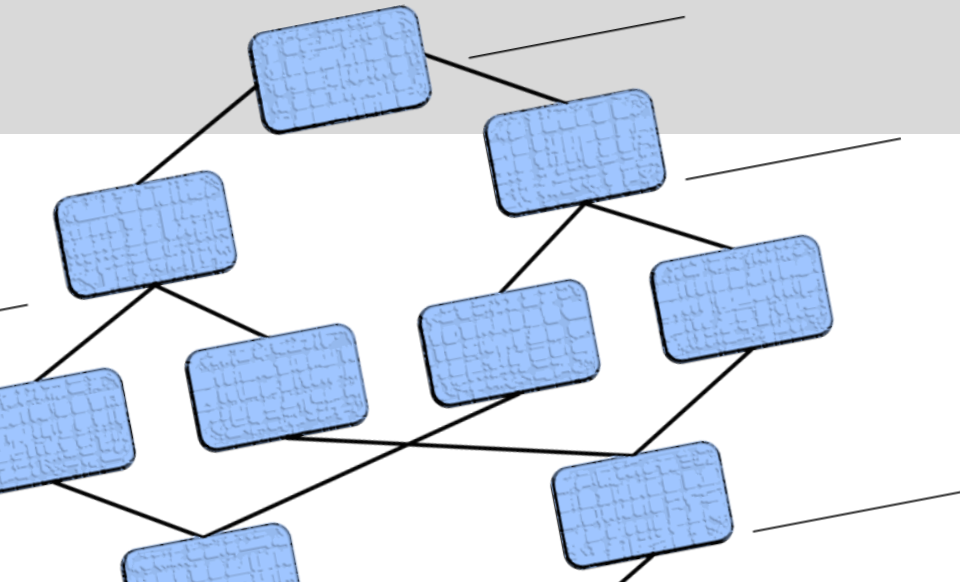


**IHR SELBSTTEST HAT REAGIERT
SIE SIND WAHRSCHEINLICH
HIV-POSITIV**

Häufigkeitsdoppelbaum



Bayesianische Aufgaben



Bayesianische Aufgabe: Früherkennung von Brustkrebs



EREIGNISSE

B

Frau hat Brustkrebs

\bar{B}

Frau hat keinen Brustkrebs

M+

Frau hat einen positiven Befund in der Mammographie erhalten

M-

Frau hat einen negativen Befund in der Mammographie erhalten

WAHRSCHEIN- LICHKEITEN

P(B)

Prävalenz

$P_B(M+)$

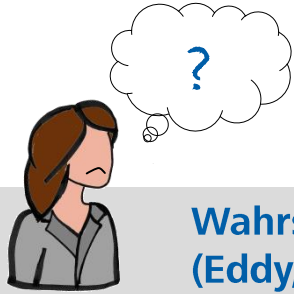
Sensitivität des Diagnoseverfahrens

$P_{\bar{B}}(M+)$

Falsch-Positiv-Rate

FORMEL VON BAYES

$$P_{M+}(B) = \frac{P_B(M+) \cdot P(B)}{P_B(M+) \cdot P(B) + P_{\bar{B}}(M+) \cdot P(\bar{B})}$$



Bayesianische Aufgabe

Wahrscheinlichkeiten vs. absolute Häufigkeiten

Wahrscheinlichkeitsvariante (Eddy, 1982)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt **1 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **80 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **9,6 %**.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, wenn sie dort ein positives Mammogramm erhält?

Antwort: knapp **8 %**

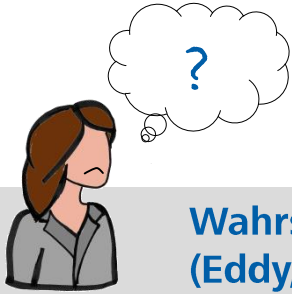
Prävalenz $P(B)$

Sensitivität $P_B(M+)$

Falsch-Positiv-Rate $P_{\bar{B}}(M+)$

Bayesianische Aufgabe

Wahrscheinlichkeiten vs. absolute Häufigkeiten



Wahrscheinlichkeitsvariante (Eddy, 1982)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt **1 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **80 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **9,6 %**.

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, wenn sie dort ein positives Mammogramm erhält?

Antwort: knapp **8 %**



Häufigkeitsvariante (Gigerenzer & Hoffrage, 1995)

100 von 10.000 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs.

80 von **100** Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten ein positives Mammogramm.

950 von **9.900** Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten ein positives Mammogramm.

Frage: Wie viele der Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und ein positives Mammogramm erhalten, haben Brustkrebs?

Antwort: **80** von **1.030**

Häufigkeitsbaum

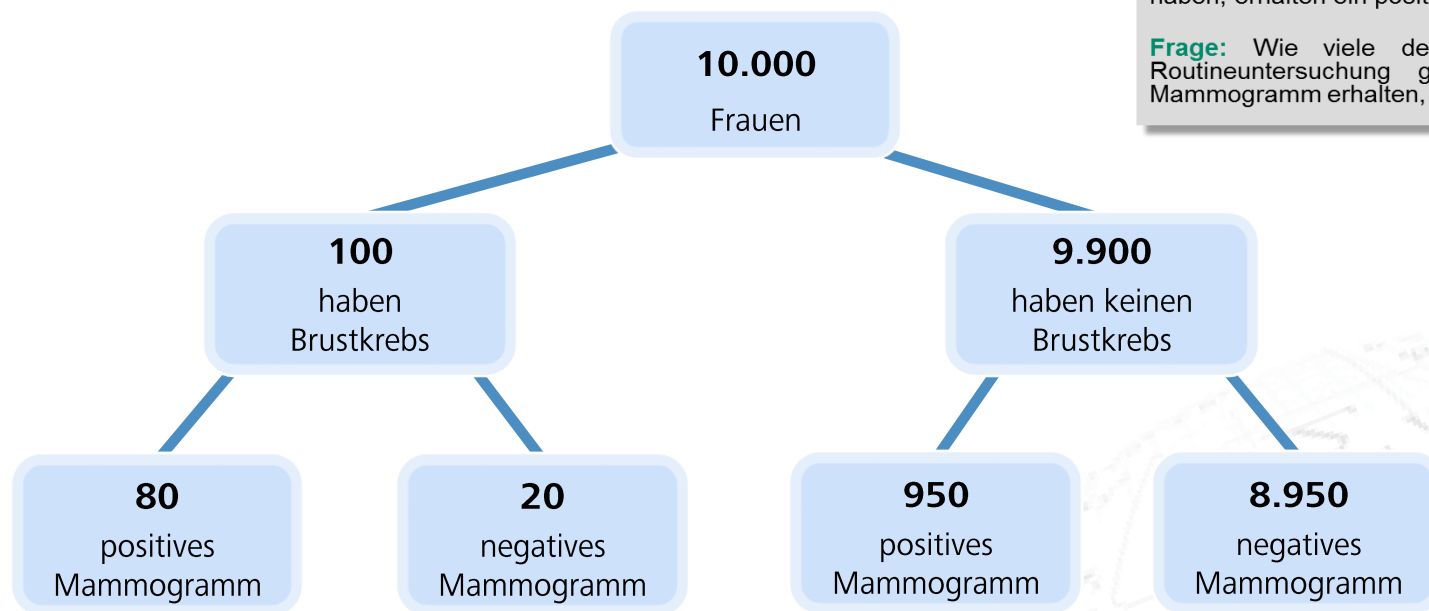
Häufigkeitsvariante (Gigerenzer & Hoffrage, 1995)

100 von 10.000 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs.

80 von 100 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten ein positives Mammogramm.

950 von 9.900 Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten ein positives Mammogramm.

Frage: Wie viele der Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und ein positives Mammogramm erhalten, haben Brustkrebs?



Frage: Wie viele der Frauen mit positivem Mammogramm haben tatsächlich Brustkrebs?

Antwort: 80 von 1.030

Visualisierung Bayesianischer Aufgaben in der Schule

Visuali-
sierungen

Wahrscheinlichkeiten

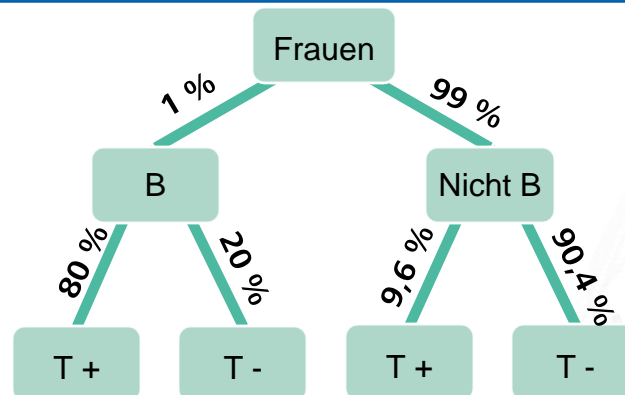
Absolute Häufigkeiten

Vierfelder-
tafel

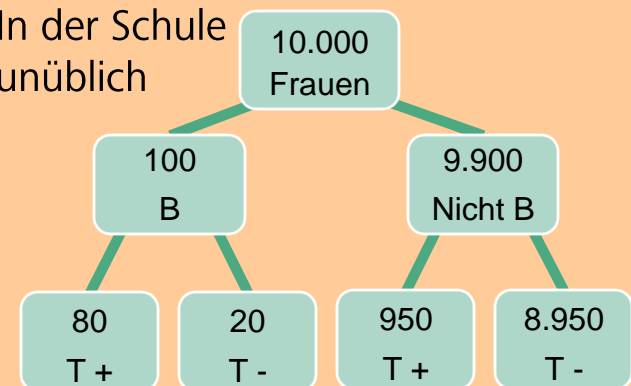
	T +	T -	
B	0,8 %	0,2 %	1 %
Nicht B	9,5 %	89,5 %	99 %
	10,3 %	89,7 %	100 %

Frauen	T +	T -	
B	80	20	100
Nicht B	950	8.950	9.900
	1.030	8.970	10.000

Baum-
diagramm



In der Schule
unüblich



Studie mit Schülerinnen und Schülern ■ Untersuchte Versionen

Untersuchung von **Schülerinnen und Schülern der 11. Klasse Gymnasium;**
N=259 (12 Klassen aus 2 verschiedenen Gymnasien)

- 2x3x2-Design (Format x Visualisierung x Kontext)
- Schüler bearbeiten je **2 Aufgaben** zu 2 verschiedenen Kontexten (Früherkennung, Persönlichkeitseigenschaft)

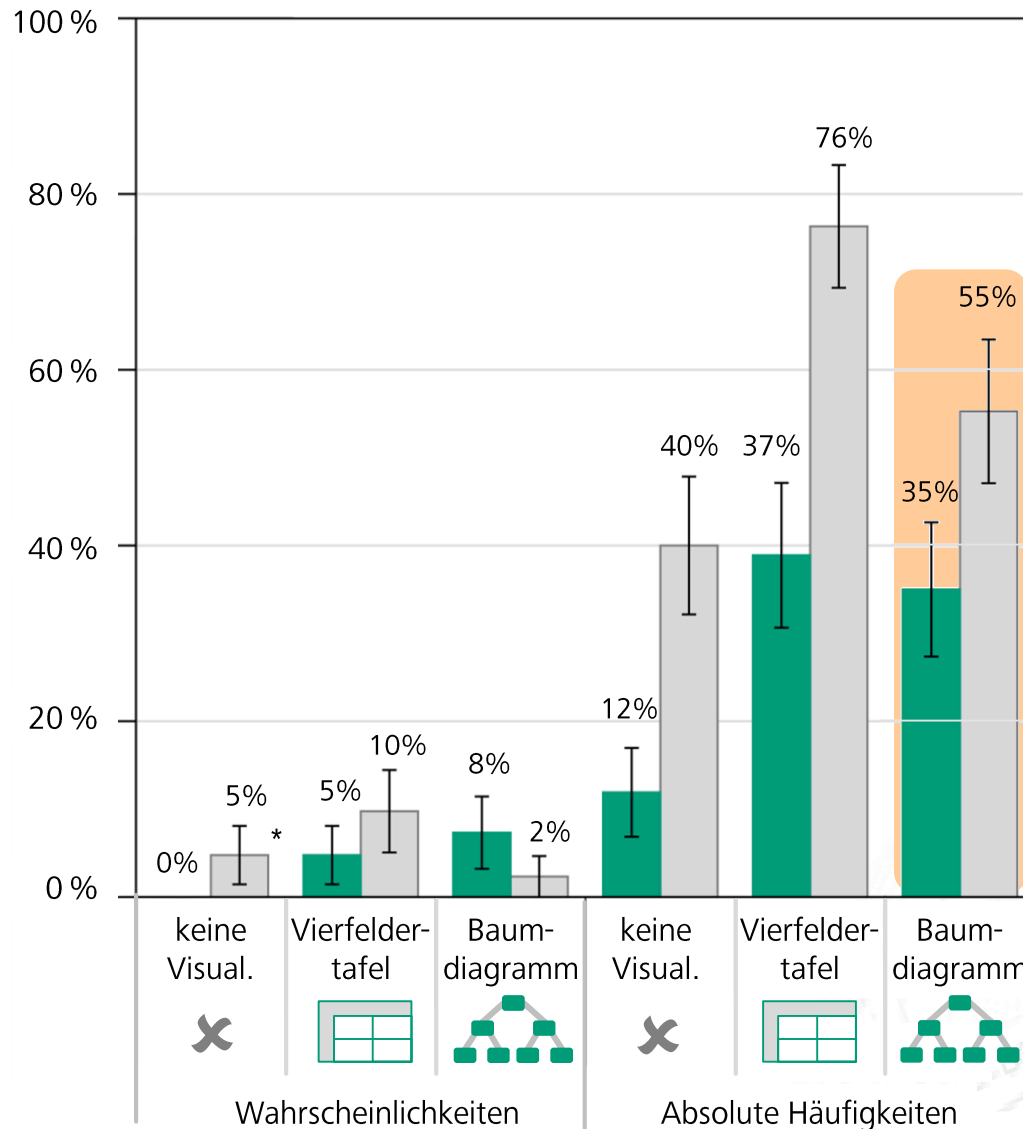
Nr.	Format der Informationen	Visualisierung	Kontext: Früherkennung
1	Wahrscheinlichkeit	keine	
2		Vierfeldertafel	
3		Baumdiagramm	
4	Häufigkeit	keine	
5		Vierfeldertafel	
6		Baumdiagramm	

Nr.	Format der Informationen	Visualisierung	Kontext: Persönlichkeitseig.
7	Wahrscheinlichkeit	keine	
8		Vierfeldertafel	
9		Baumdiagramm	
10	Häufigkeit	keine	
11		Vierfeldertafel	
12		Baumdiagramm	

Ergebnisse ■ Wirksamkeit dieser vier Visualisierungen

Binder, Krauss & Bruckmaier (2015)

Anteil korrekter Antworten



Studienteilnehmer:

259 Schüler (Gymnasium, 11. Klasse)

Früherkennung von Brustkrebs

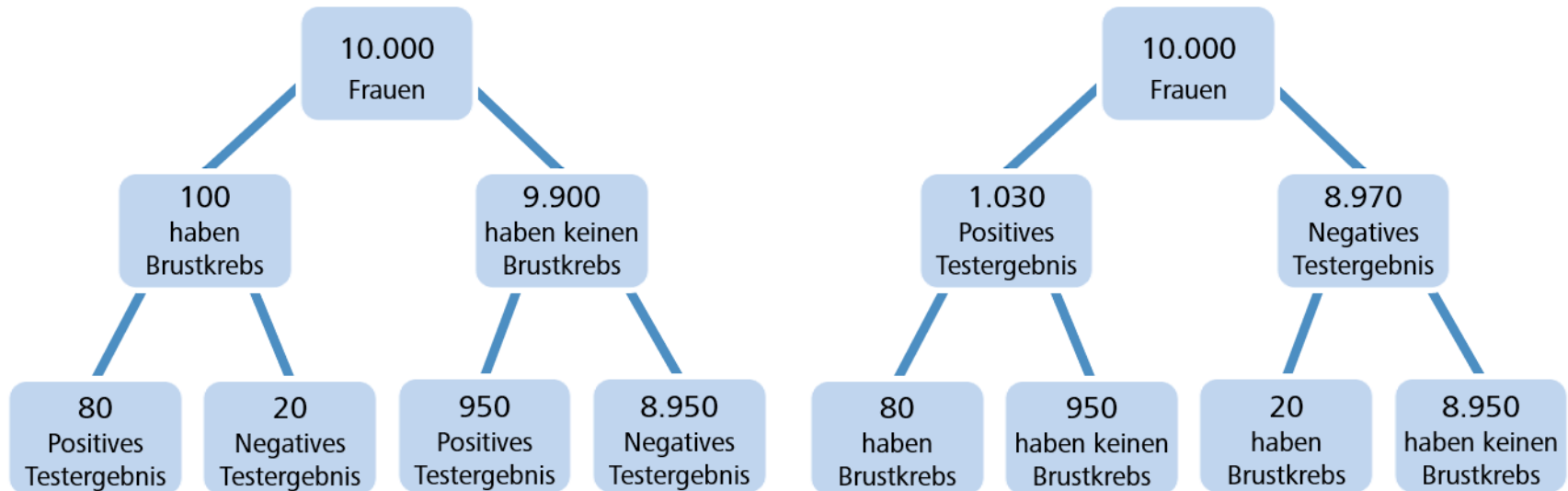
Persönlichkeitseigenschaft

* Fehlerbalken zeigen den einfachen Standardfehler

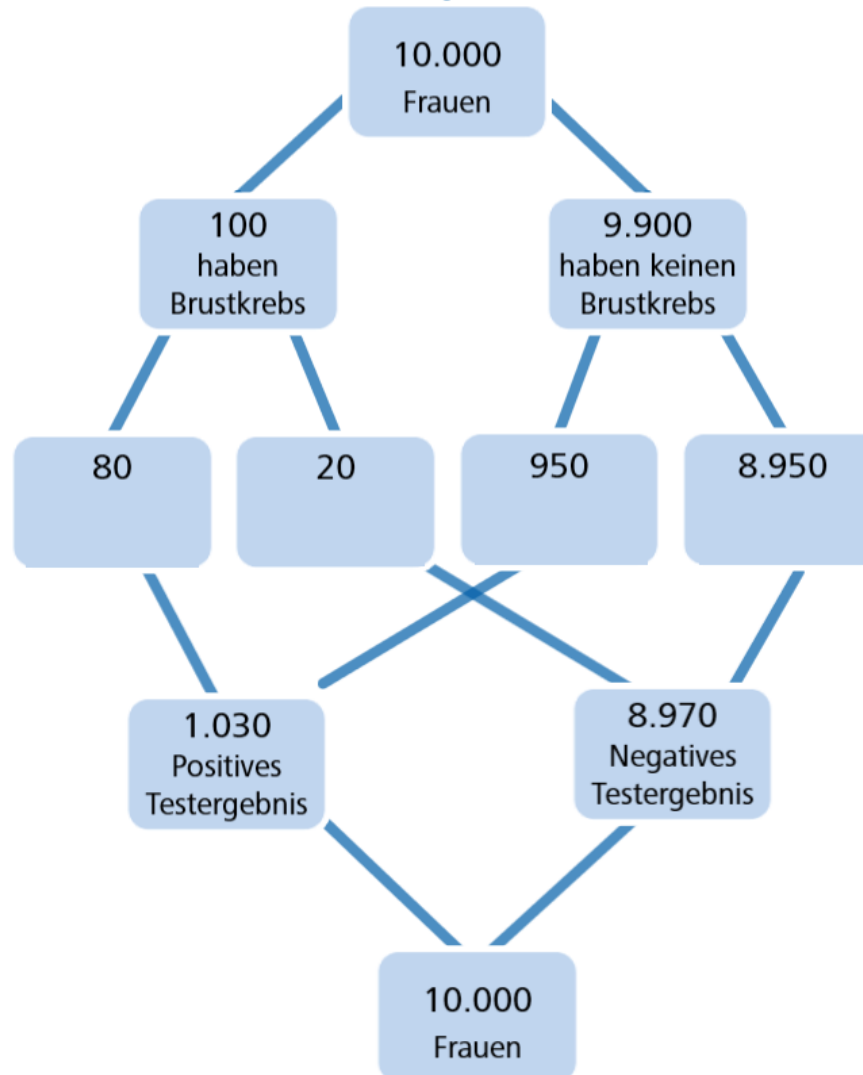
Visualisierung

Format der Aufgabe

Vom Häufigkeitsbaum zum Doppelbaum



Vom Häufigkeitsbaum zum Doppelbaum



Bayesianische Aufgaben sind nur ein
**Spezialfall. 16 elementare
Wahrscheinlichkeiten** sind interessant!



Wahrscheinlichkeiten in der Vierfeldertafel

	Brustkrebs	Kein Brustkrebs	
Test positiv	1,6%	9,8%	11,4%
Test negativ	0,4%	88,2%	88,6%
	2%	98%	100%



Vier Randwahrscheinlichkeiten:

$P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(T+)$, $P(T-)$



Vier Schnittwahrscheinlichkeiten:

$P(B \cap T+)$, $P(\bar{B} \cap T+)$,
 $P(B \cap T-)$, $P(\bar{B} \cap T-)$



**Acht bedingte
Wahrscheinlichkeiten:**

$P(B|T+)$, $P(\bar{B}|T+)$,
 $P(B|T-)$, $P(\bar{B}|T-)$,
 $P(T+|B)$, $P(T-|B)$,
 $P(T+|\bar{B})$, $P(T-|\bar{B})$

Bayesianische Aufgaben sind nur ein
**Spezialfall. 16 elementare
Wahrscheinlichkeiten** sind interessant!



Wahrscheinlichkeiten in der Vierfeldertafel

	Brustkrebs	Kein Brustkrebs	
Test positiv	1,6%	9,8%	11,4%
Test negativ	0,4%	88,2%	88,6%
	2%	98%	100%

Red annotations on the table:

- 14% (above 'Kein Brustkrebs' column)
- 86% (above '9,8%' cell)
- 0,5% (between '9,8%' and '88,2%' cells)
- 99,5% (above '88,2%' cell)
- 10% (between '0,4%' and '88,2%' cells)
- 90% (between '88,2%' and '98%' cells)
- 80% (next to 'Test positiv' row)
- 20% (next to 'Test negativ' row)

Vier Randwahrscheinlichkeiten:

$P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(T+)$, $P(T-)$

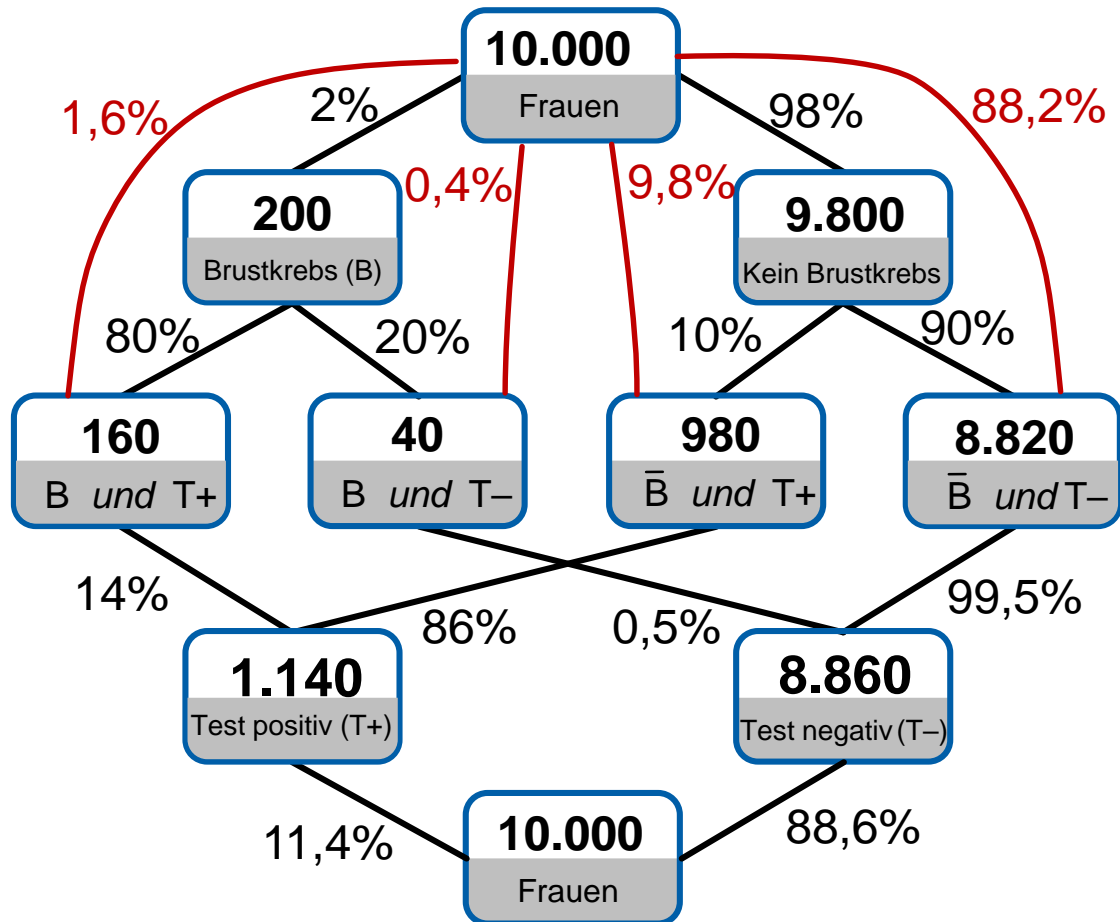
Vier Schnittwahrscheinlichkeiten:

$P(B \cap T+)$, $P(\bar{B} \cap T+)$,
 $P(B \cap T-)$, $P(\bar{B} \cap T-)$

**Acht bedingte
Wahrscheinlichkeiten:**

$P(B|T+)$, $P(\bar{B}|T+)$,
 $P(B|T-)$, $P(\bar{B}|T-)$,
 $P(T+|B)$, $P(T-|B)$,
 $P(T+|\bar{B})$, $P(T-|\bar{B})$

Wahrscheinlichkeiten im Doppelbaum



Vier Randwahrscheinlichkeiten:

$P(B)$, $P(\bar{B})$, $P(T+)$, $P(T-)$

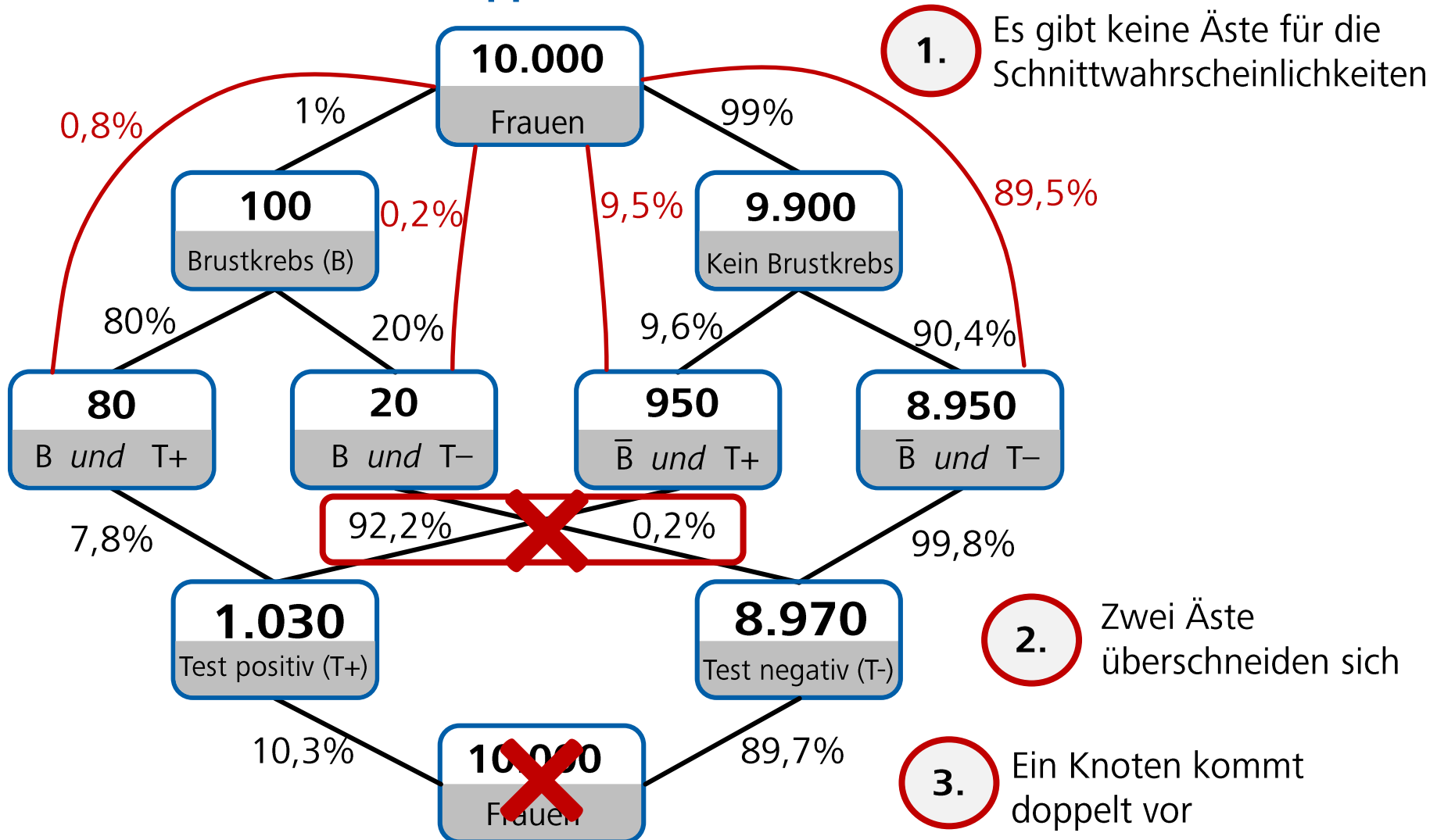
Vier Schnittwahrscheinlichkeiten:

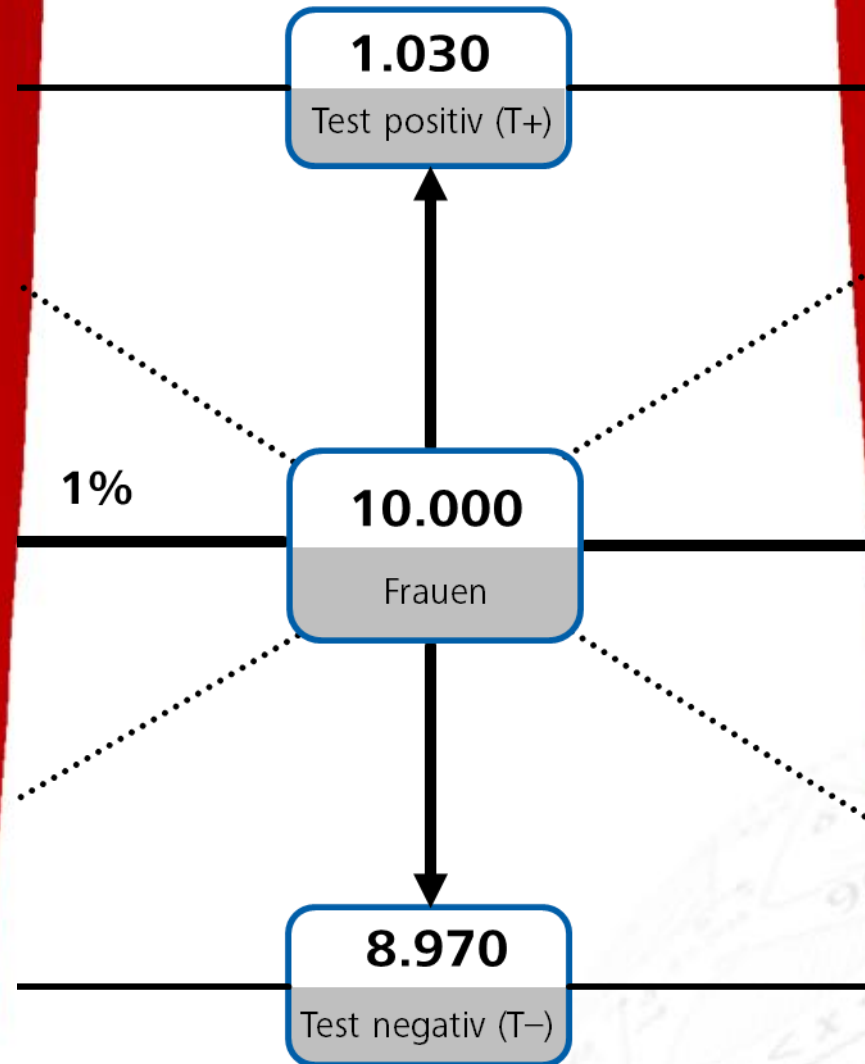
$P(B \cap T+)$, $P(\bar{B} \cap T+)$,
 $P(B \cap T-)$, $P(\bar{B} \cap T-)$

Acht bedingte
Wahrscheinlichkeiten:

$P(B|T+)$, $P(\bar{B}|T+)$,
 $P(B|T-)$, $P(\bar{B}|T-)$,
 $P(T+|B)$, $P(T-|B)$,
 $P(T+|\bar{B})$, $P(T-|\bar{B})$

Drei Nachteile des Doppelbaumes



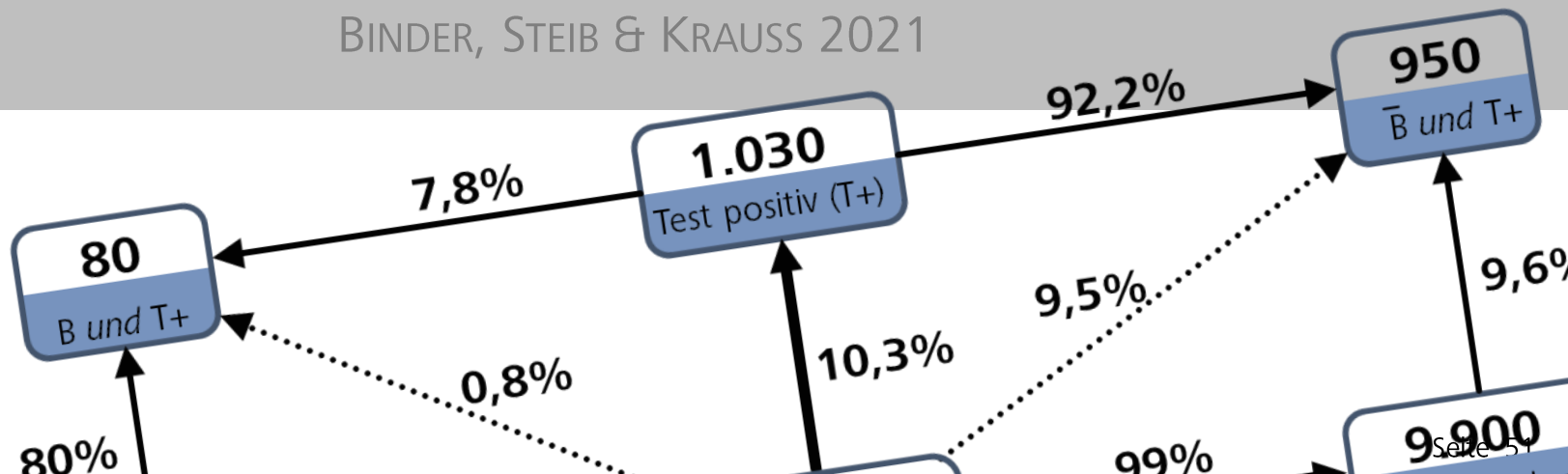


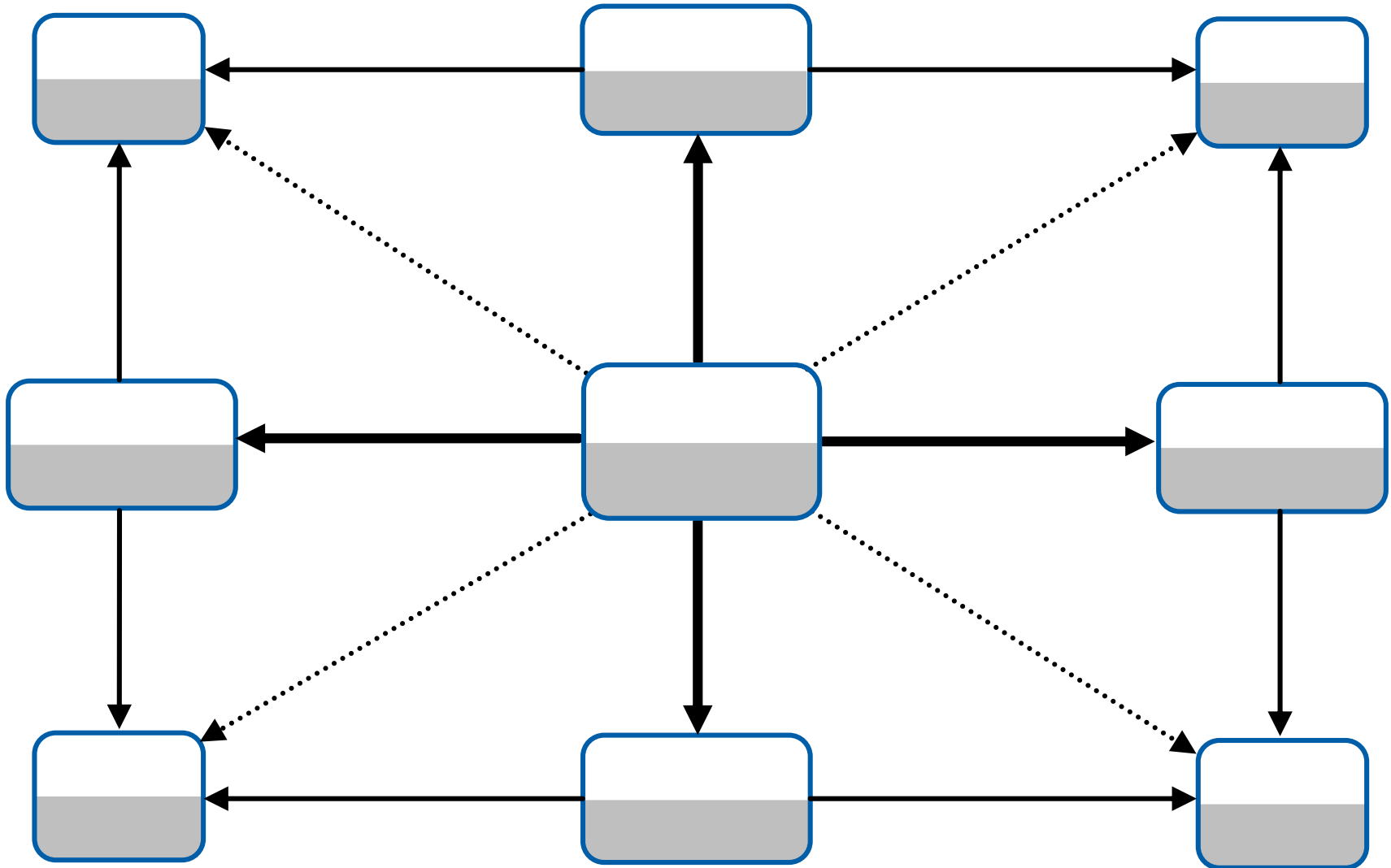
6 Schritte zur Erstellung eines Häufigkeitsnetzes

am Beispiel Mammographie

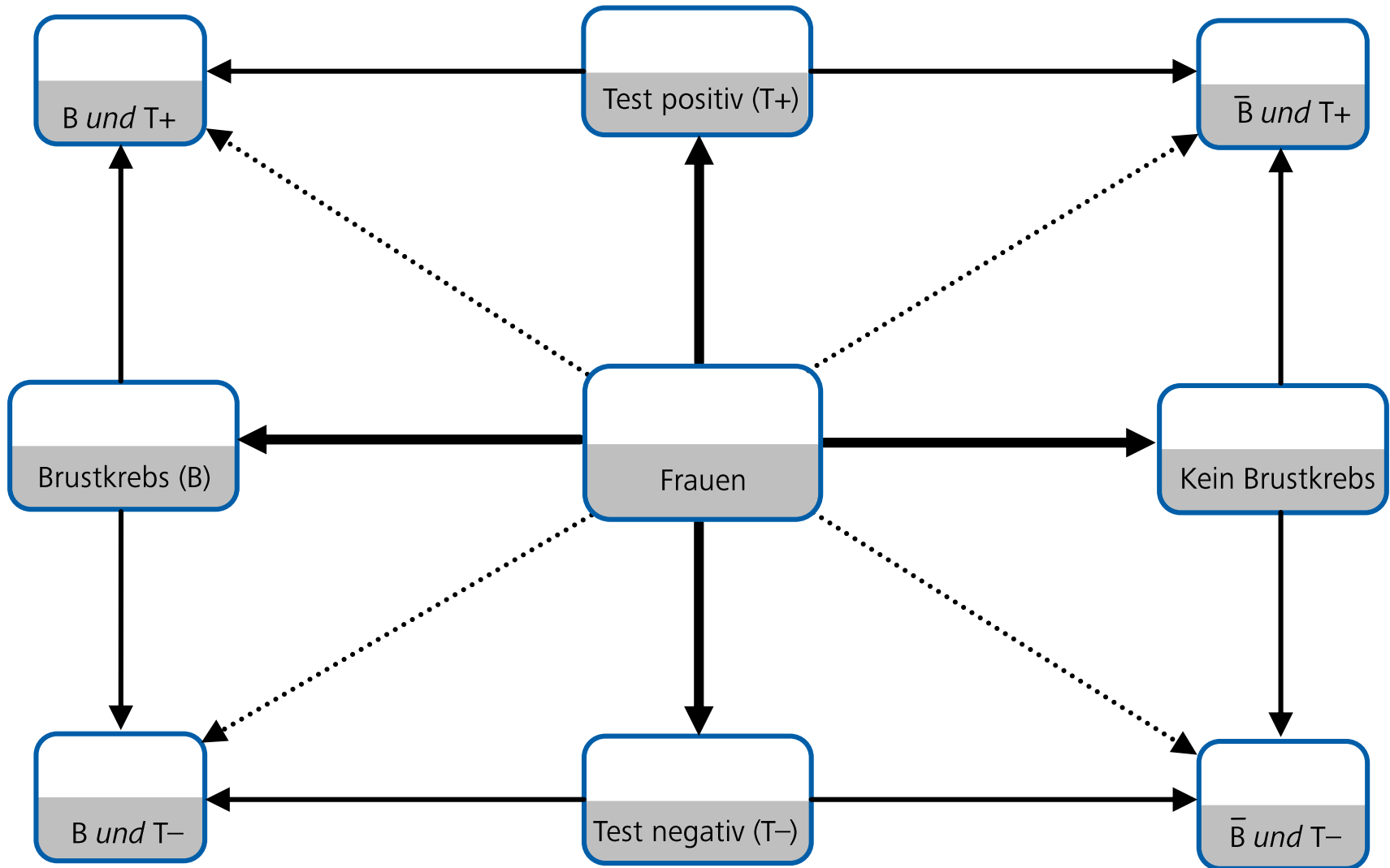
BINDER, KRAUSS & STEIB, 2020

BINDER, STEIB & KRAUSS 2021

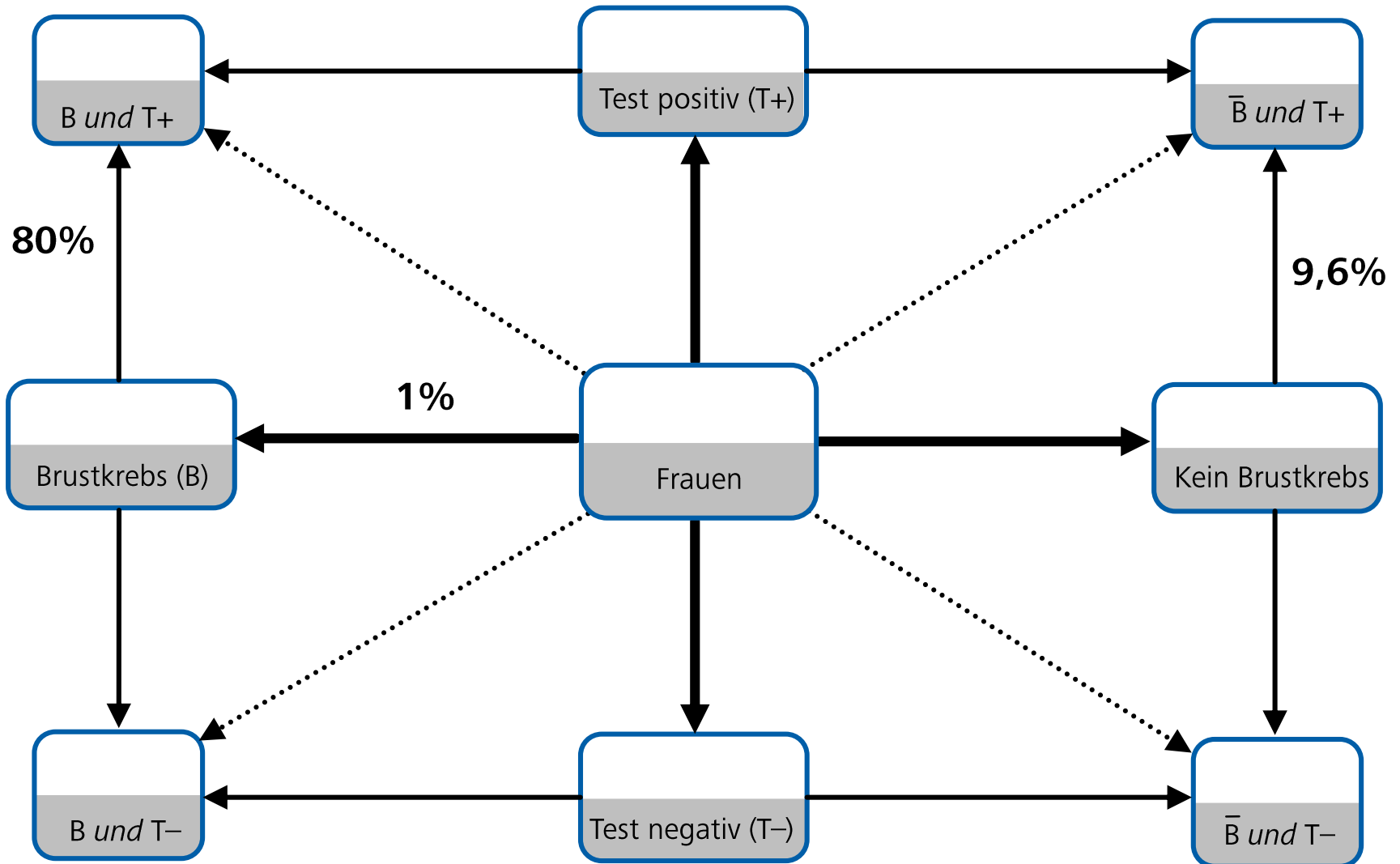




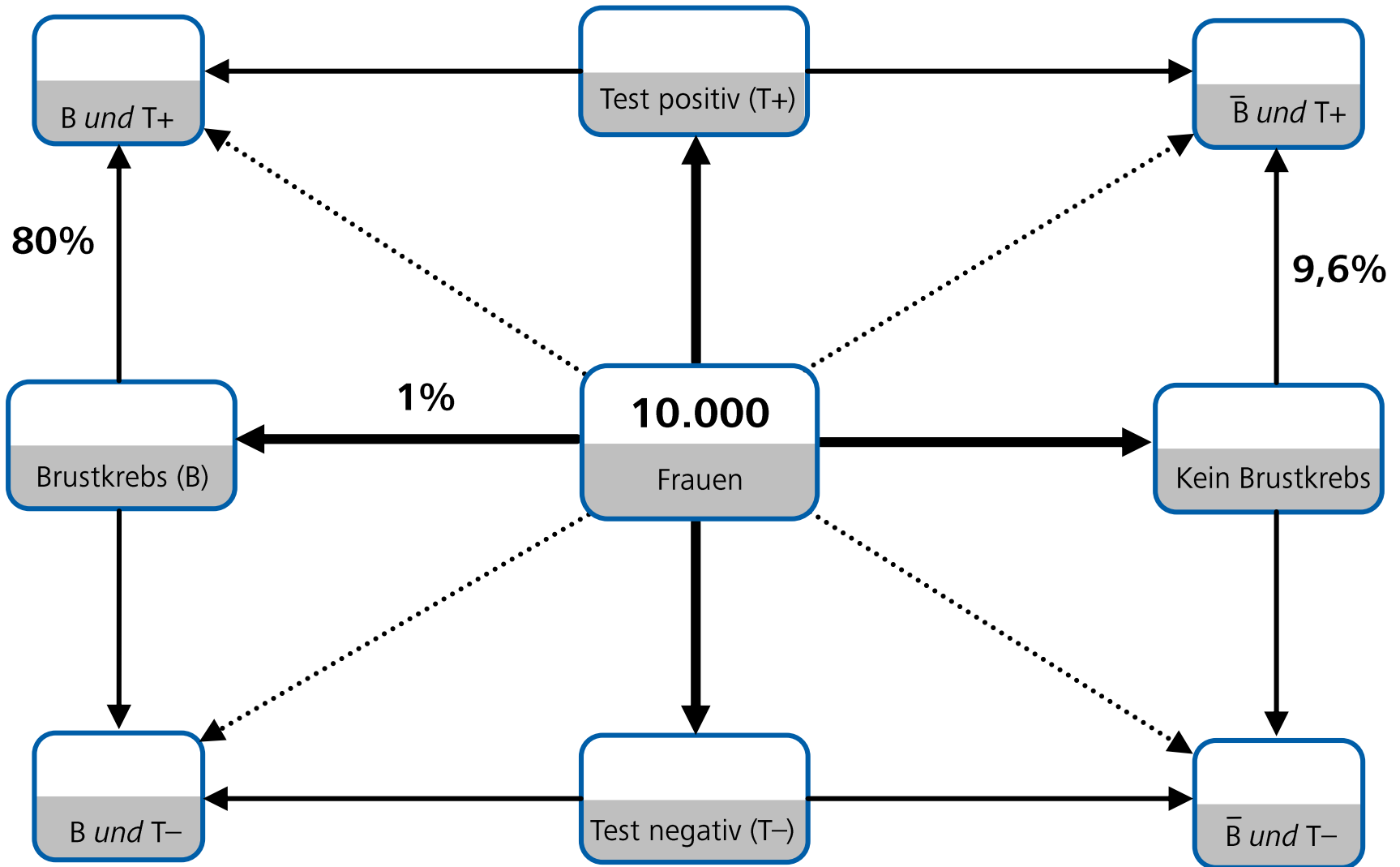
SCHRITT 2: Beschriftung der Struktur



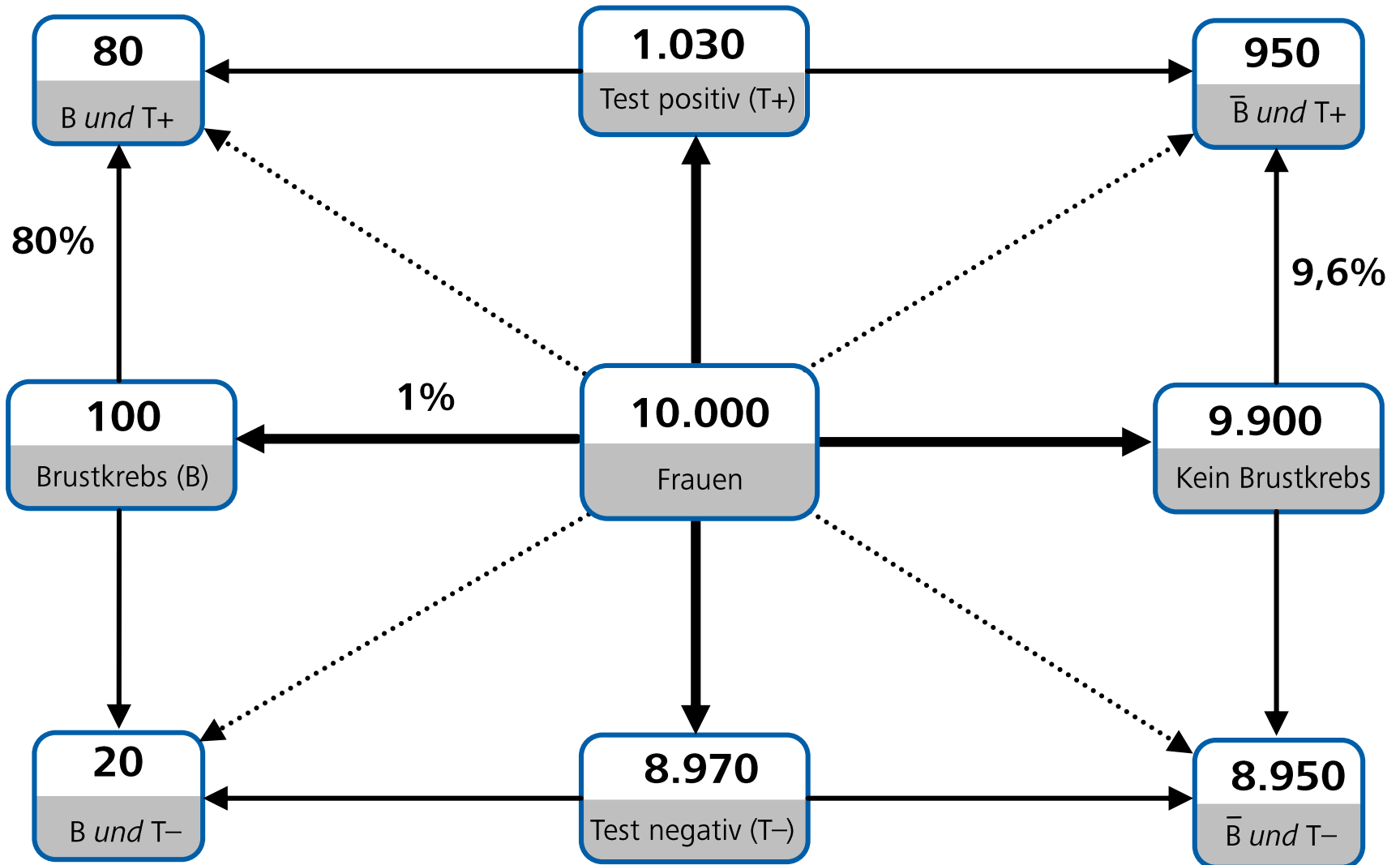
SCHRITT 3: Eintragen der gegebenen Informationen



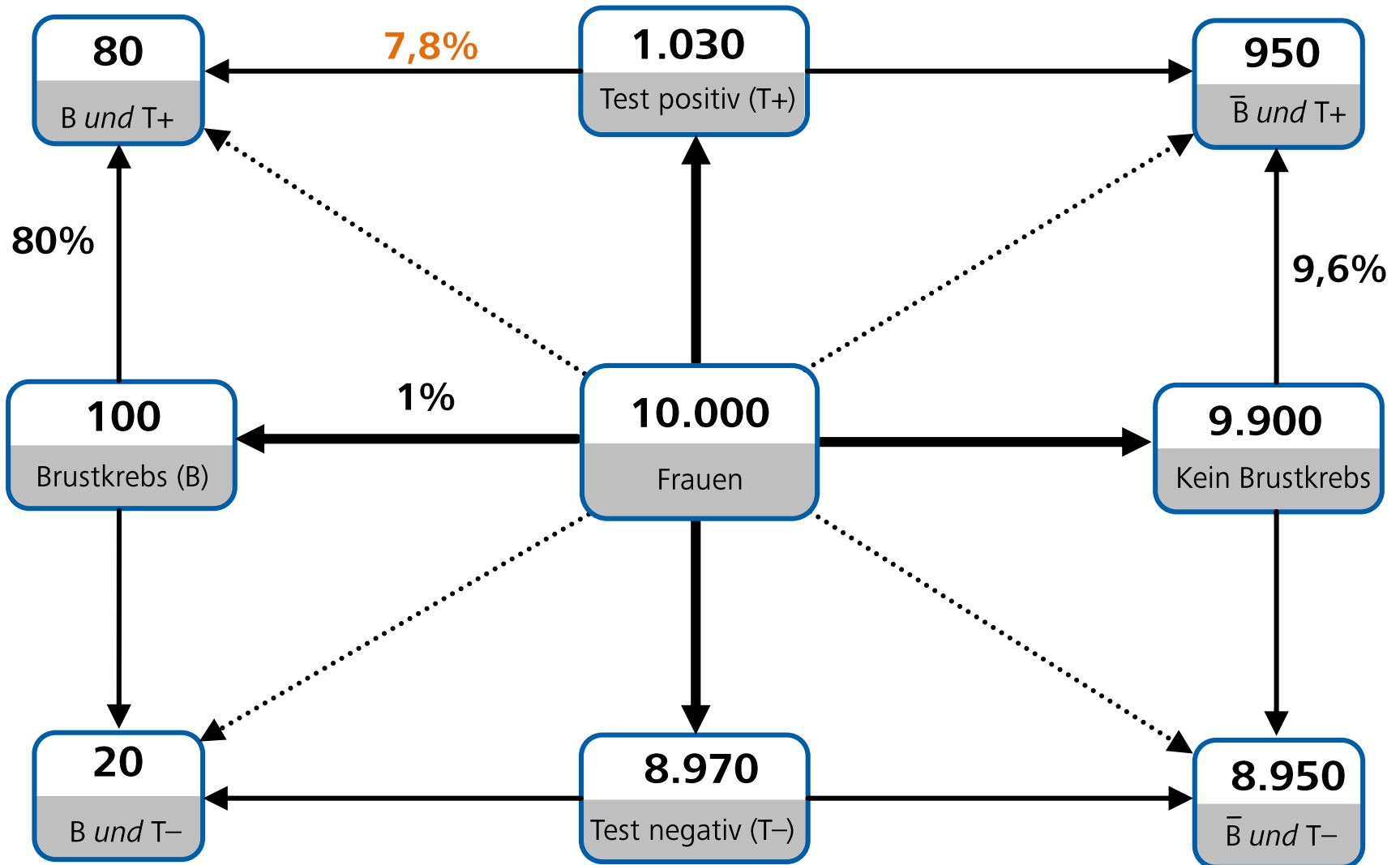
SCHRITT 4: Ausdenken einer Stichprobe



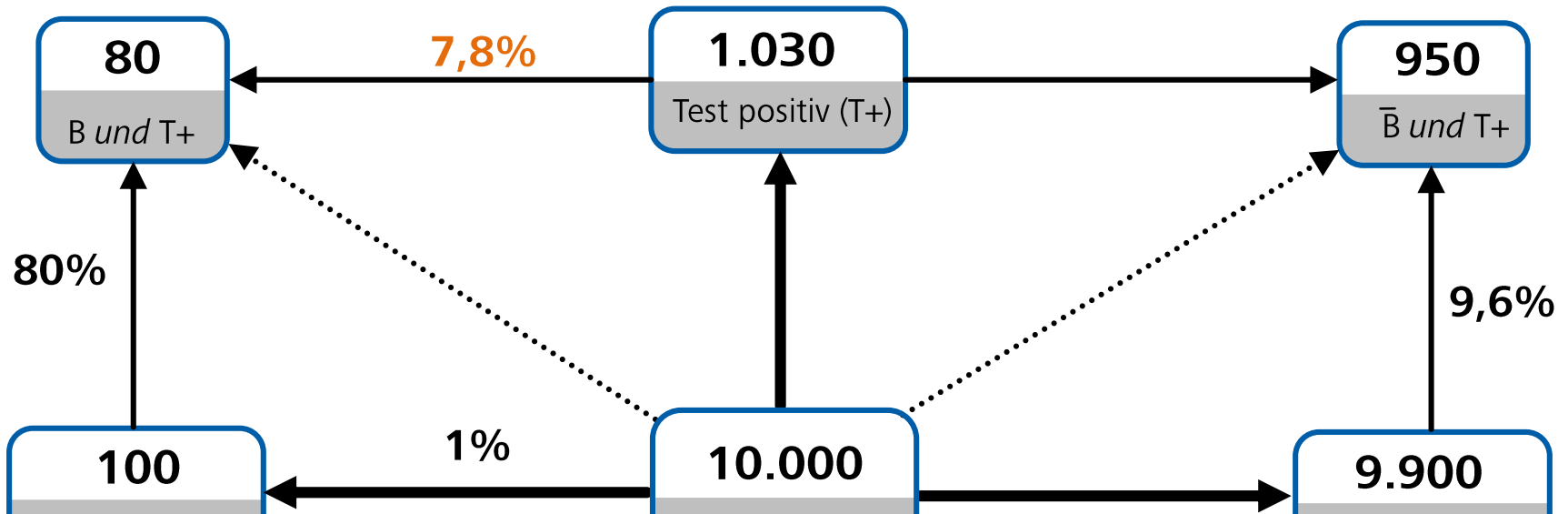
SCHRITT 5: Übersetzung in Häufigkeiten



SCHRITT 6: Ablesen der Lösung



SCHRITT 6: Ablesen der Lösung

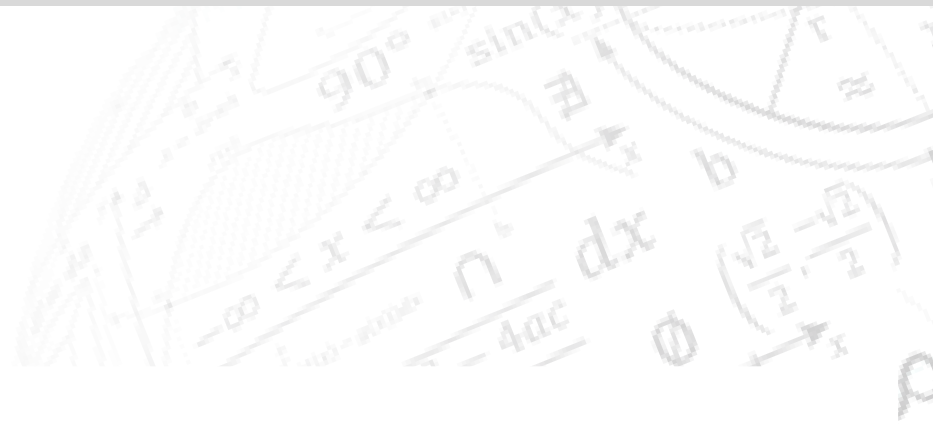


Antwort:

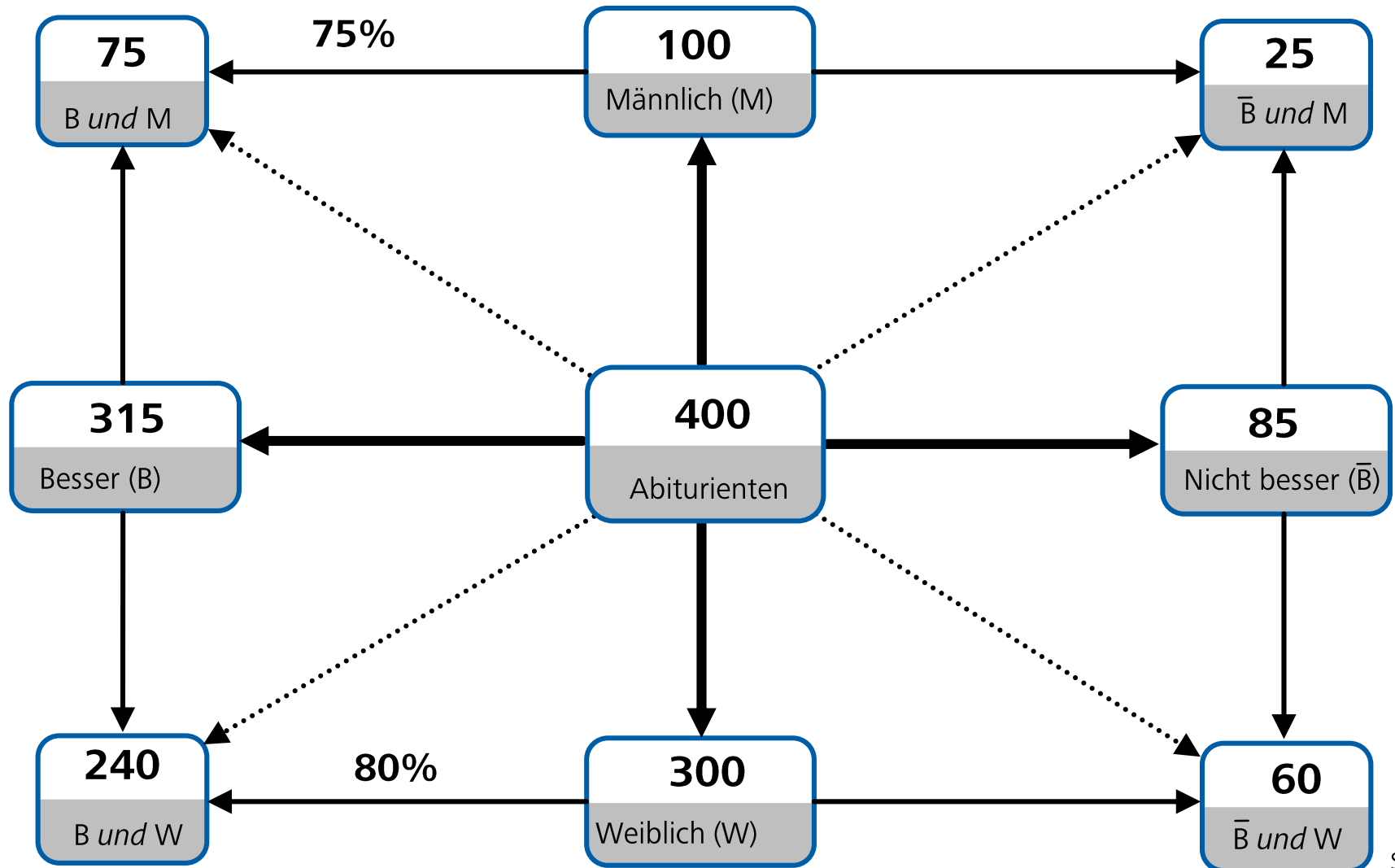
- I: 80 von 1.030 Frauen mit positivem Test sind tatsächlich an Brustkrebs erkrankt.
- II: Der Anteil der Frauen mit Brustkrebs unter den Frauen mit positivem Testergebnis beträgt $80/1.030$ bzw. 7,8 %.
- III: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgesuchte Frau mit positivem Test Brustkrebs hat, beträgt 7,8 %.



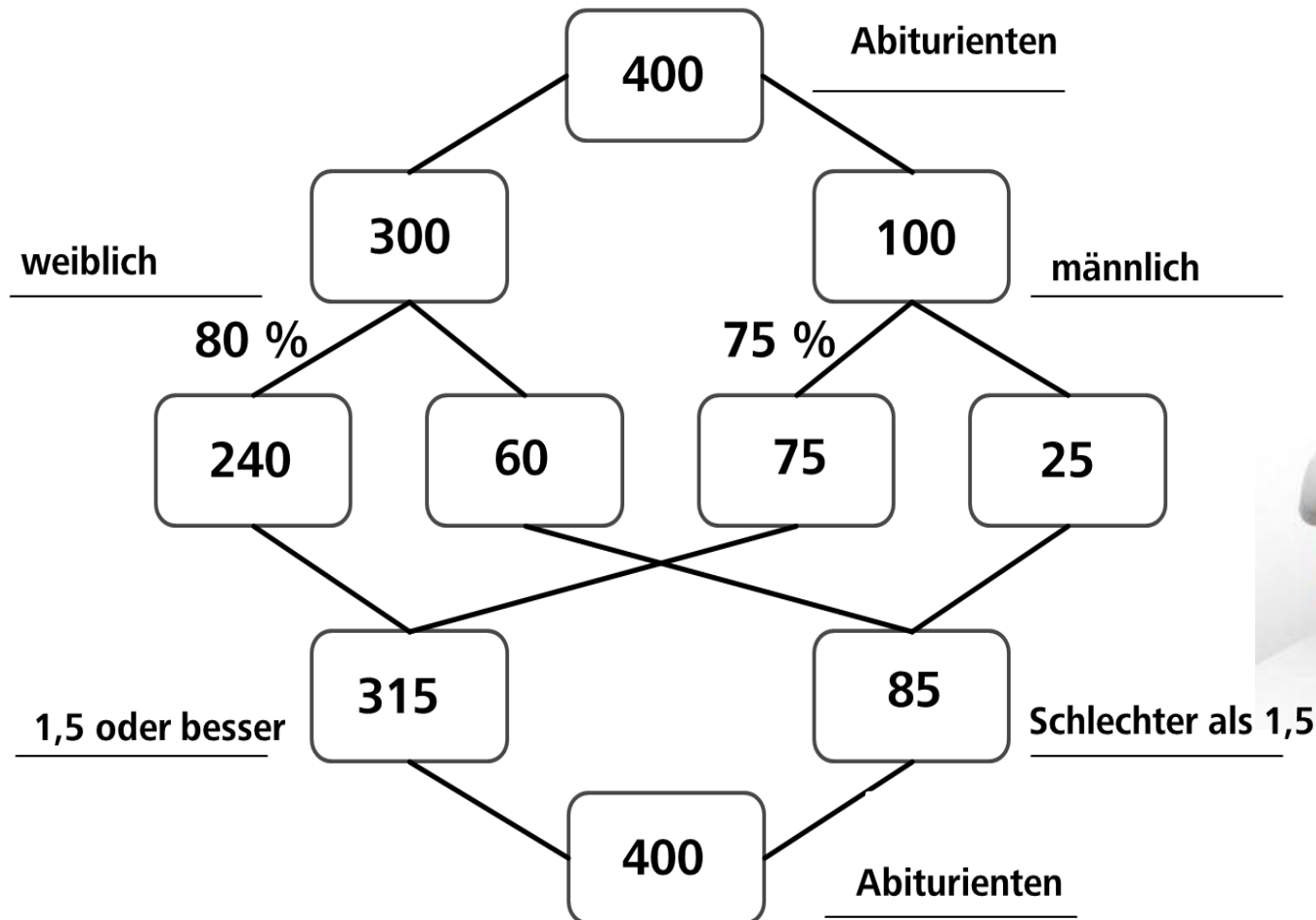
Workshop-Phase II



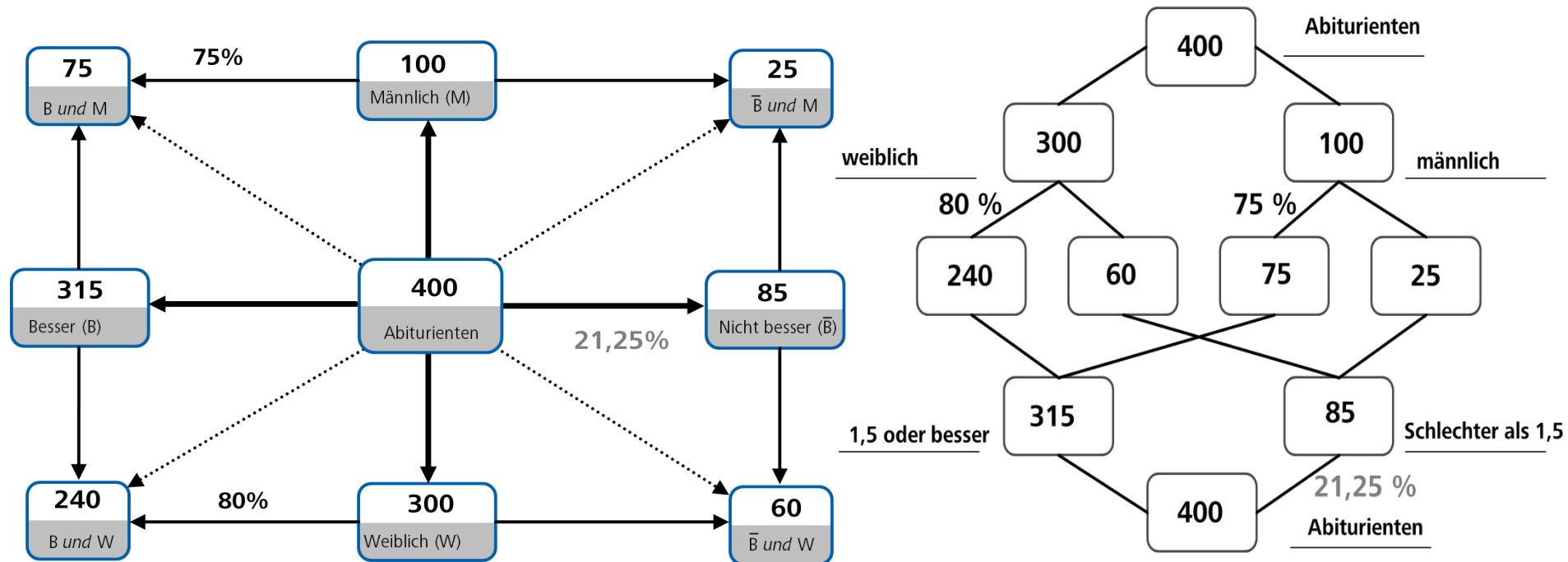
a) Zeichnen Sie ein **Häufigkeitsnetz** mit allen absoluten Häufigkeiten und den gegebenen Wahrscheinlichkeiten.



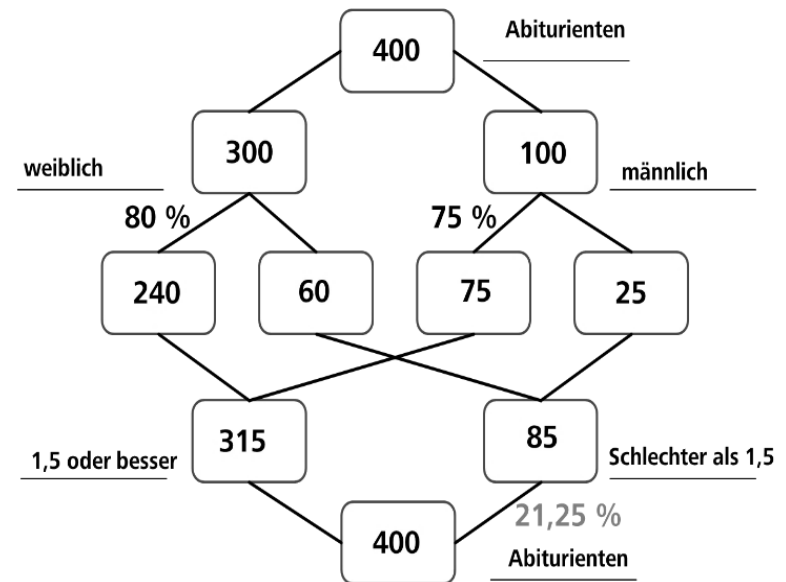
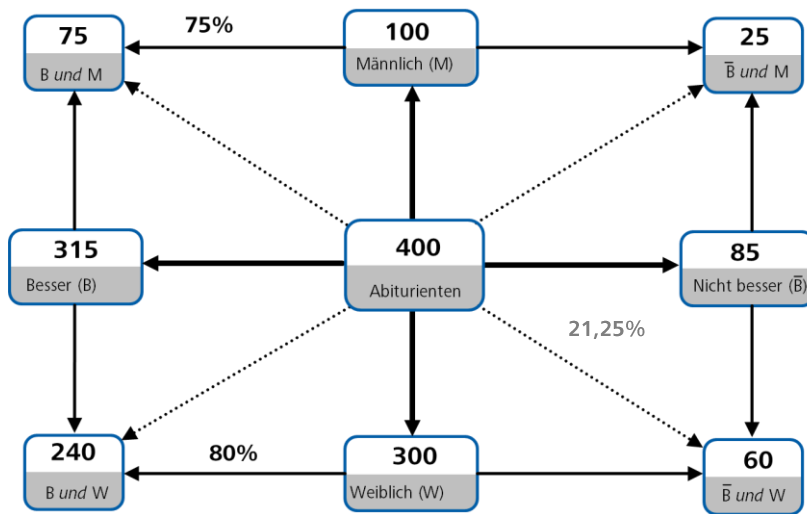
a) Zeichnen Sie einen **Doppelbaum** mit allen absoluten Häufigkeiten und den gegebenen Wahrscheinlichkeiten, der diese Situation visualisiert.



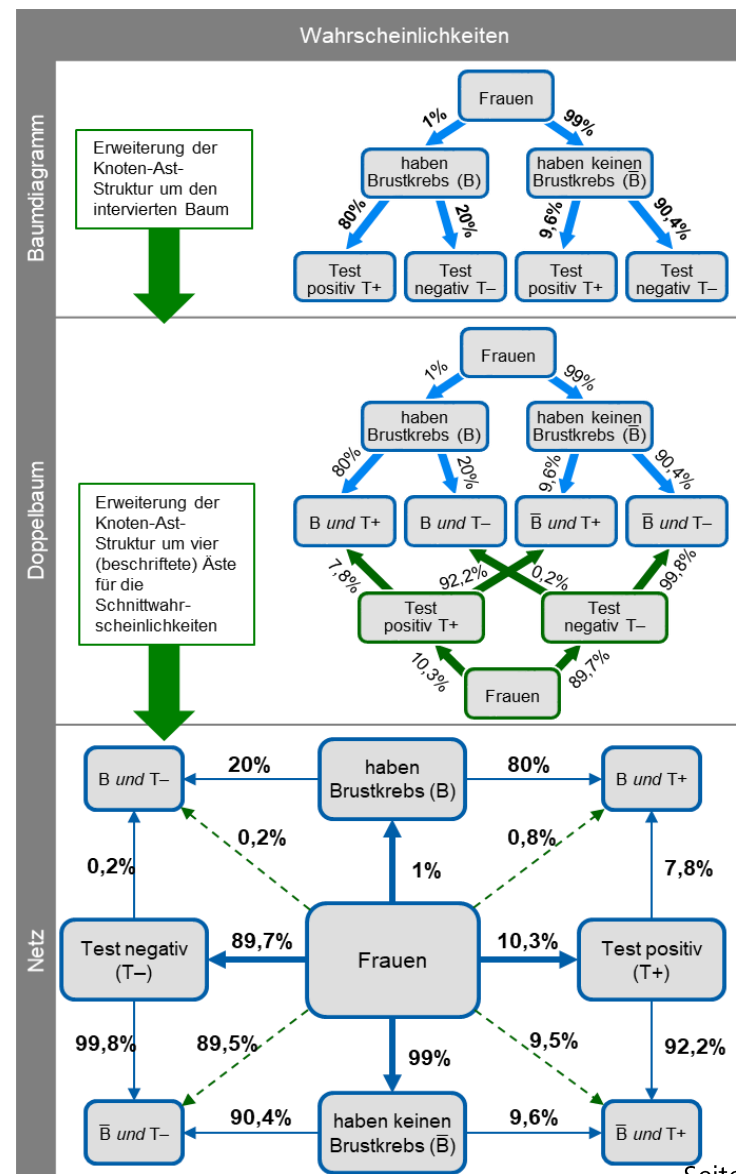
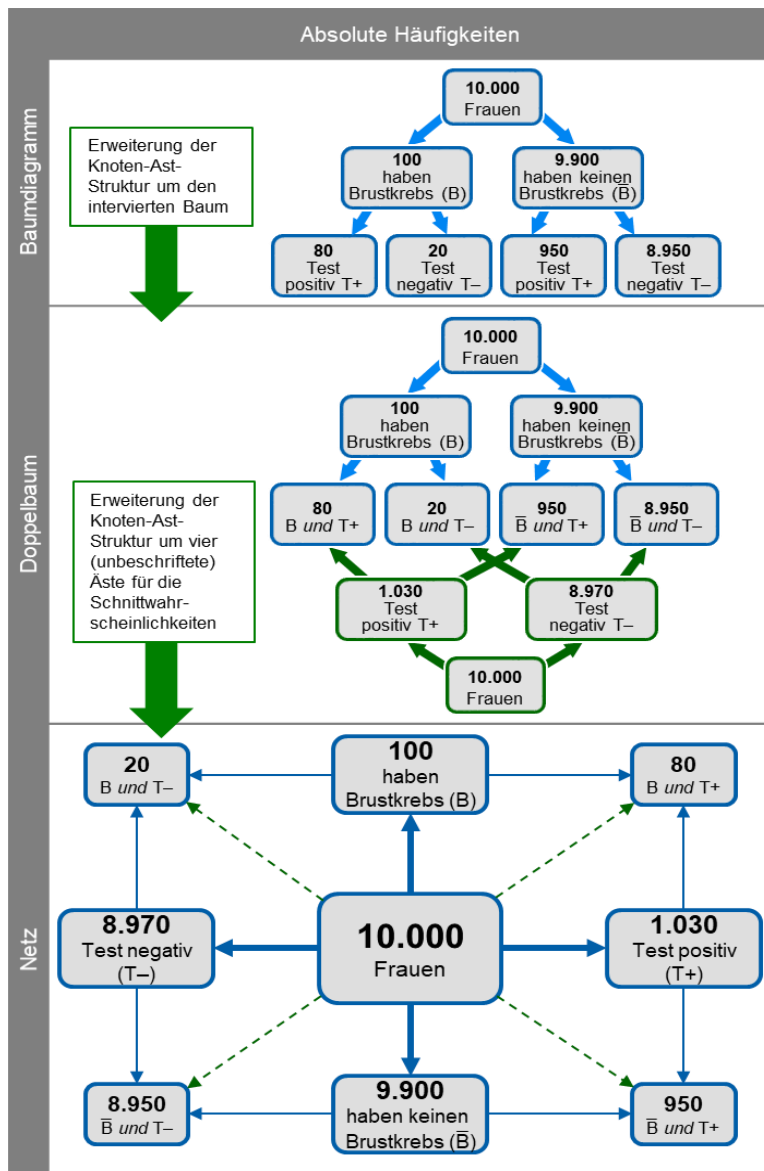
b) Bestimmen Sie den Anteil der Personen unter allen Bewerbern, die eine schlechtere Durchschnittsnote als 1,5 angeben.



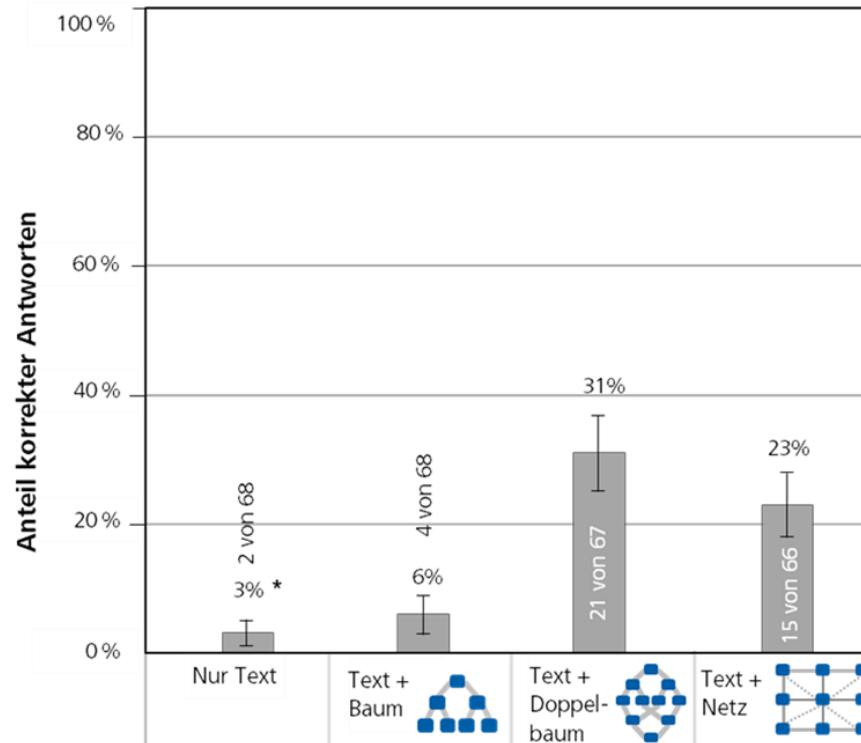
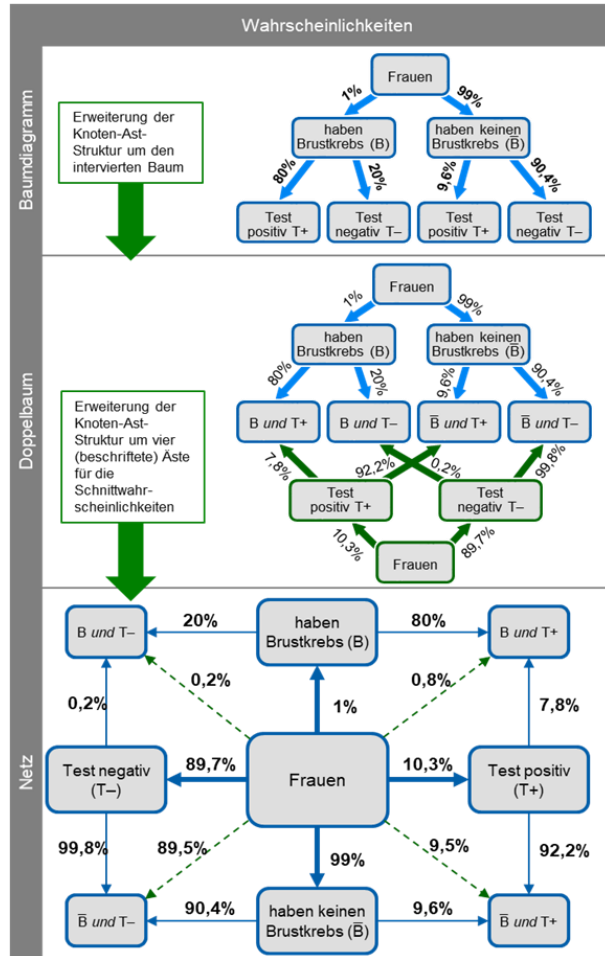
c) Wie fühlt es sich an mit dem Doppelbaum oder dem Häufigkeitsnetz zu arbeiten? Mit welcher Visualisierung fühlen Sie sich wohler? Welche Vor- und Nachteile sehen Sie jeweils in den beiden Visualisierungen.



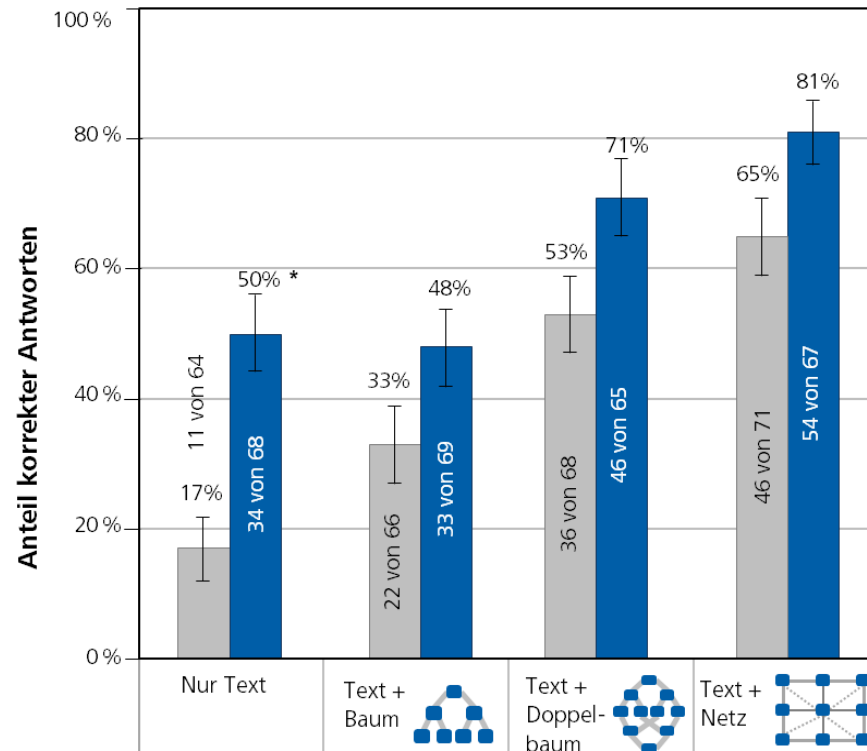
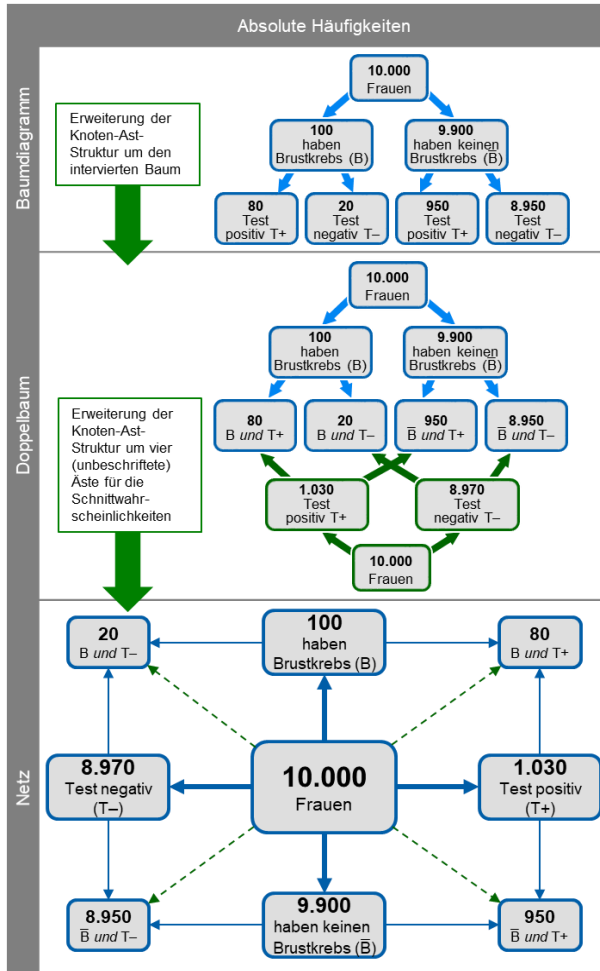
Erweiterungen von Knoten-Ast-Strukturen



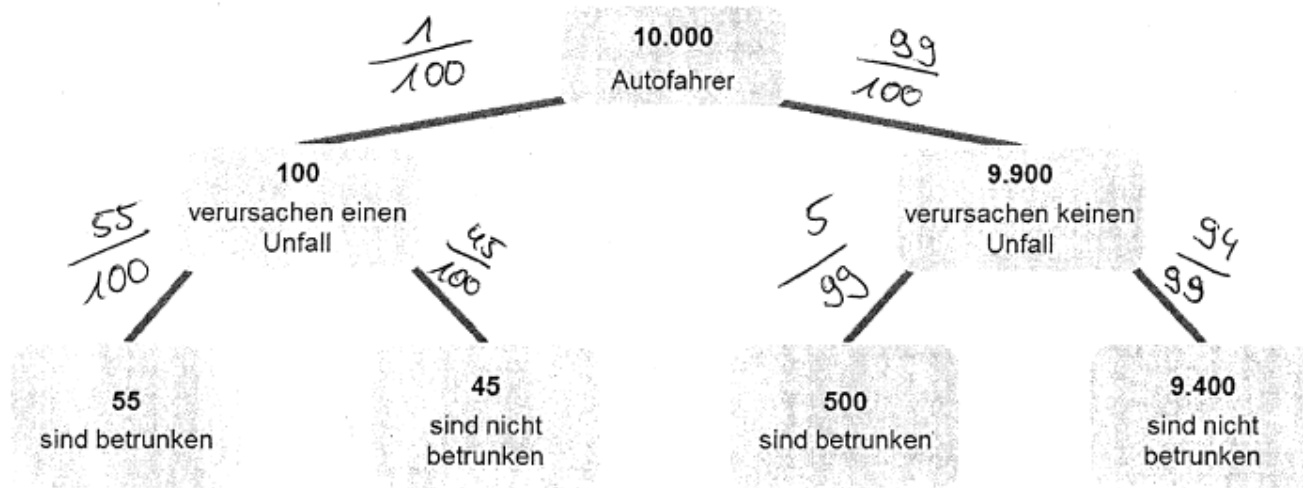
Studie ■ Ergebnisse zu Erweiterungen von Knoten-Ast-Strukturen: bedingte Wahrscheinlichkeiten



Studie ■ Ergebnisse zu Erweiterungen von Knoten-Ast-Strukturen: bedingte Wahrscheinlichkeiten



Studienergebnisse ■ Weber, Binder & Krauss (2018)



Schreiben Sie Ihren Lösungsweg auf!

$$\frac{1 \cdot 55}{100 \cdot 100} = \frac{55}{10000} = \frac{11}{2000}$$

Antwort: $\frac{11}{2000}$

➤ Viele dieser „Zurückrechner“ können dann die Aufgabe nicht mehr lösen!

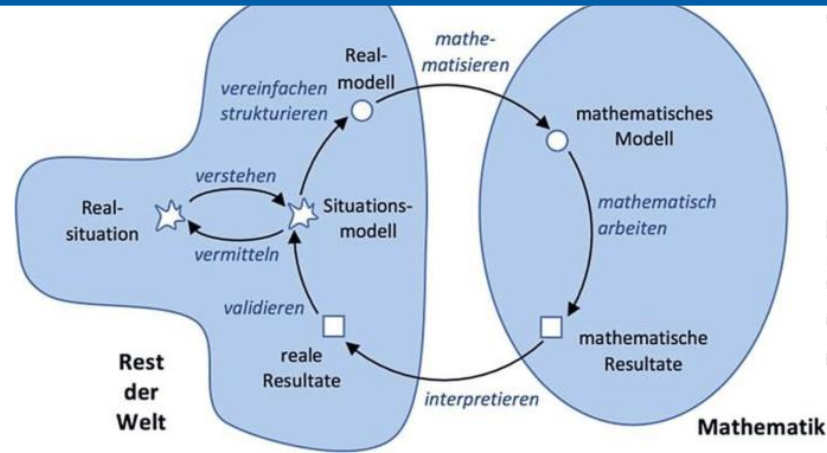


Pause

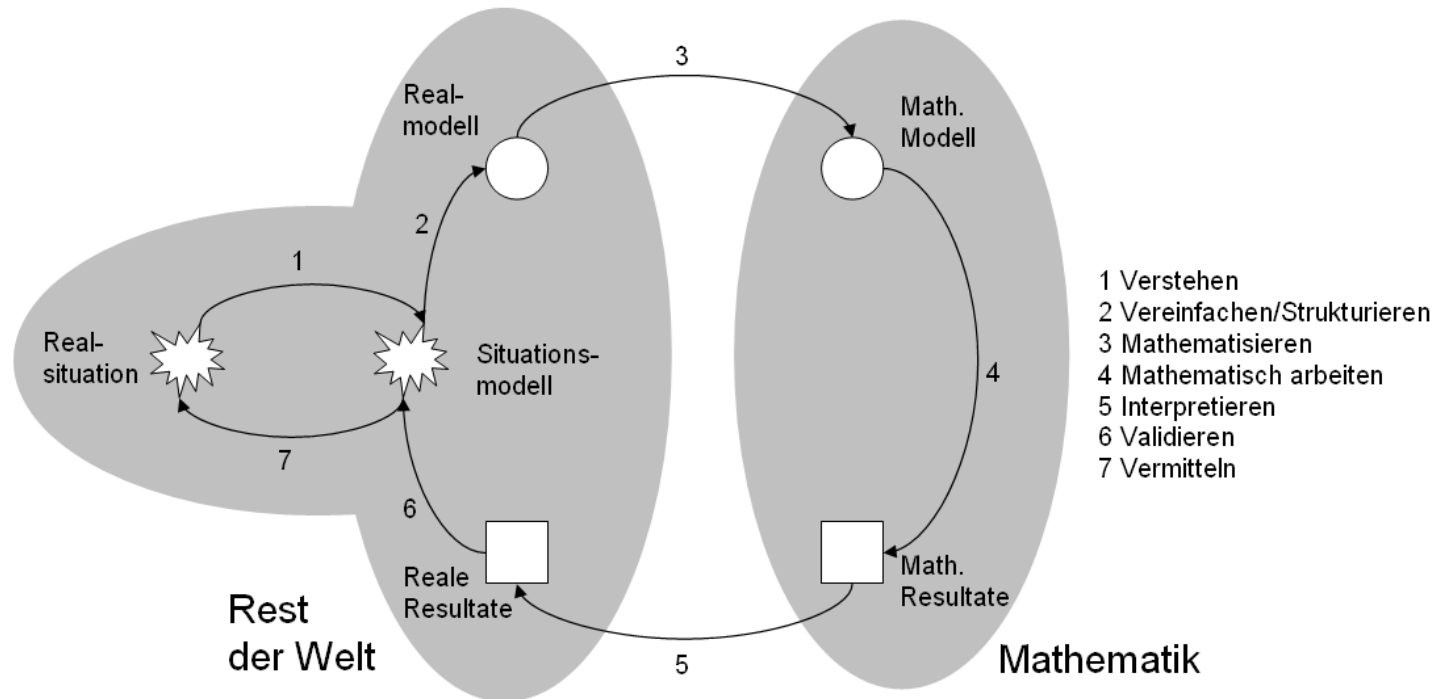


Abschnitt 3

Modellierungsaufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten



Modellierungskreislauf (nach Blum und Leiß, 2006)



Ein schöner Kontext für eine Modellierungsaufgabe zu bedingten Wahrscheinlichkeiten: **Die Gesichtserkennung**

12.10.2018 10:53 Uhr

Gesichtserkennung: Test am Bahnhof Südkreuz erfolgreich abgeschlossen

Für Bundesinnenminister Horst Seehofer haben sich die Systeme in beeindruckender Weise bewährt. Er dringt auf breite Einführung in der Polizeiarbeit.

Von Detlef Borchers

🔊 | 🖨️ | 💬 185



(Bild: dpa)

Gesichtserkennung am Bahnhof Berlin-Südkreuz (11. Oktober 2018)

PRESSEMITTEILUNG · 11.10.2018

Projekt zur Gesichtserkennung erfolgreich

Testergebnisse veröffentlicht – Systeme haben sich bewährt

Am 31. Juli 2018 endete der Test der Gesichtserkennungssysteme am Bahnhof Berlin-Südkreuz. Die jetzt abgeschlossene Auswertung der Testergebnisse zeigt, dass Gesichtserkennungssysteme in Zukunft einen wesentlichen Mehrwert für die polizeiliche Arbeit, insbesondere der Bundespolizei, darstellen können.

Egal ob eine oder mehrere Personen den Testbereich durchschreiten, die Personen eine Brille oder einen Schal tragen, die Systeme erkennen Gesichter zuverlässig. Sie funktionieren bei Tag und Nacht – sowohl mit guten Vergleichsbildern als auch mit Bildern schlechterer Qualität.

Auf Grundlage der Testergebnisse ist Bundesinnenminister Horst Seehofer im Hinblick auf eine mögliche Einführung in der Zukunft zuversichtlich: *"Die Ergebnisse zeigen, dass die Technik zur Gesichtserkennung unsere Polizistinnen und Polizisten im Alltag erheblich unterstützen kann. Die Systeme haben sich in beeindruckender Weise bewährt, so dass eine breite Einführung möglich ist. Wir können damit in bestimmten Bereichen die Polizeiarbeit noch effizienter und effektiver gestalten und damit die Sicherheit für die Bürgerinnen und Bürger verbessern."*

Die durchschnittliche Trefferrate liegt bei dem besten getesteten System unter realistischen Testbedingungen bei über 80%. Das heißt: In über 80% der Fälle wurden die Testpersonen durch die Systeme zuverlässig erkannt. Weitere Optimierungen und höhere Trefferraten sind technisch möglich.

Die Falschtrefferraten (z.B. System erkennt Person A, es handelt sich jedoch um Person B) liegen durchschnittlich bei unter 0,1%. Das bedeutet, dass bei 1000 Abgleichen auf einem Bahnhof lediglich ein einziger Abgleich durch das System fehlerhaft erkannt wird. Dieser Wert lässt sich aber durch Kombination verschiedener Systeme technisch auf bis zu 0,00018% und damit auf ein verschwindend geringes Maß reduzieren. Die Systeme haben sich damit für einen Einsatz im Polizeialltag bewährt.

Gesichtserkennung am Bahnhof Berlin-Südkreuz (11. Oktober 2018)

PRESSEMITTEILUNG · 11.10.2018

Projekt zur Gesichtserkennung erfolgreich

Testergebnisse veröffentlicht – Systeme haben sich bewährt

Am 31. Juli 2018 endete der Test der Gesichtserkennungssysteme am Bahnhof Berlin-Südkreuz. Die jetzt

“

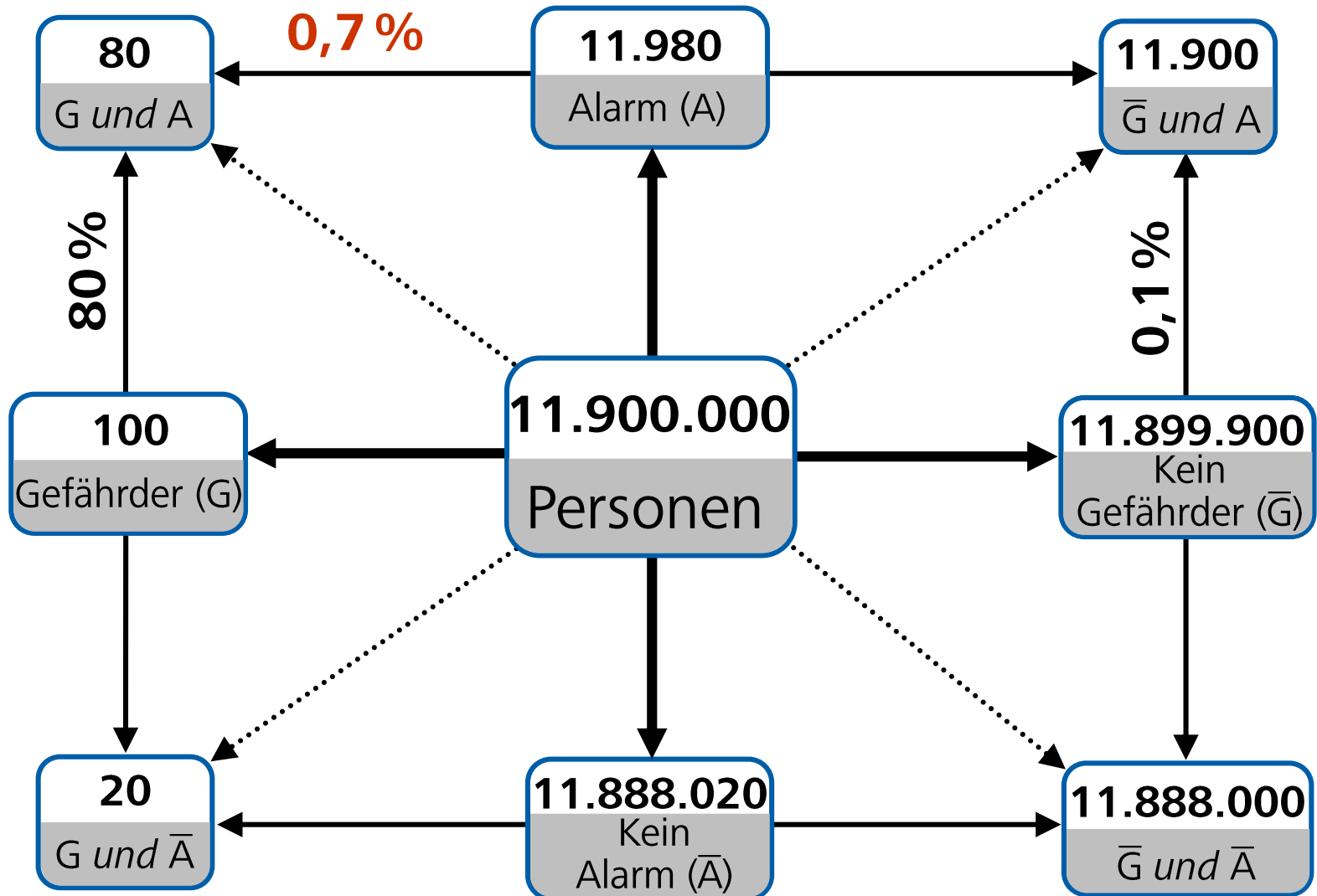
Die durchschnittliche **Trefferrate** liegt bei über 80%. [...]

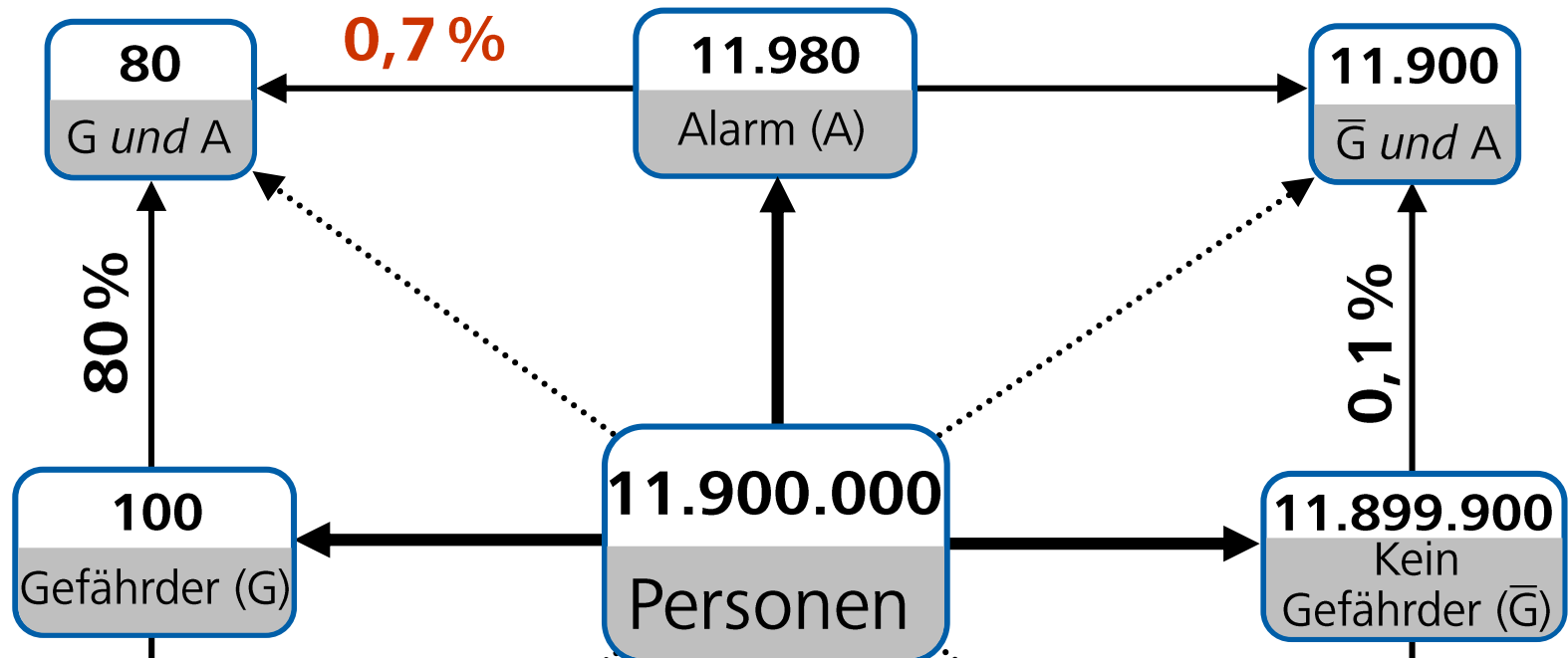
Die **Falschtrefferraten** (z.B. System erkennt Person A, es handelt sich jedoch um Person B) liegen durchschnittlich bei unter 0,1%.

dass eine breite Einführung möglich ist. Wir können damit in bestimmten Bereichen die Polizeiarbeit noch effizienter und effektiver gestalten und damit die Sicherheit für die Bürgerinnen und Bürger verbessern.“

Das klingt doch super!

Also die Gesichtserkennung am besten gleich überall einführen?

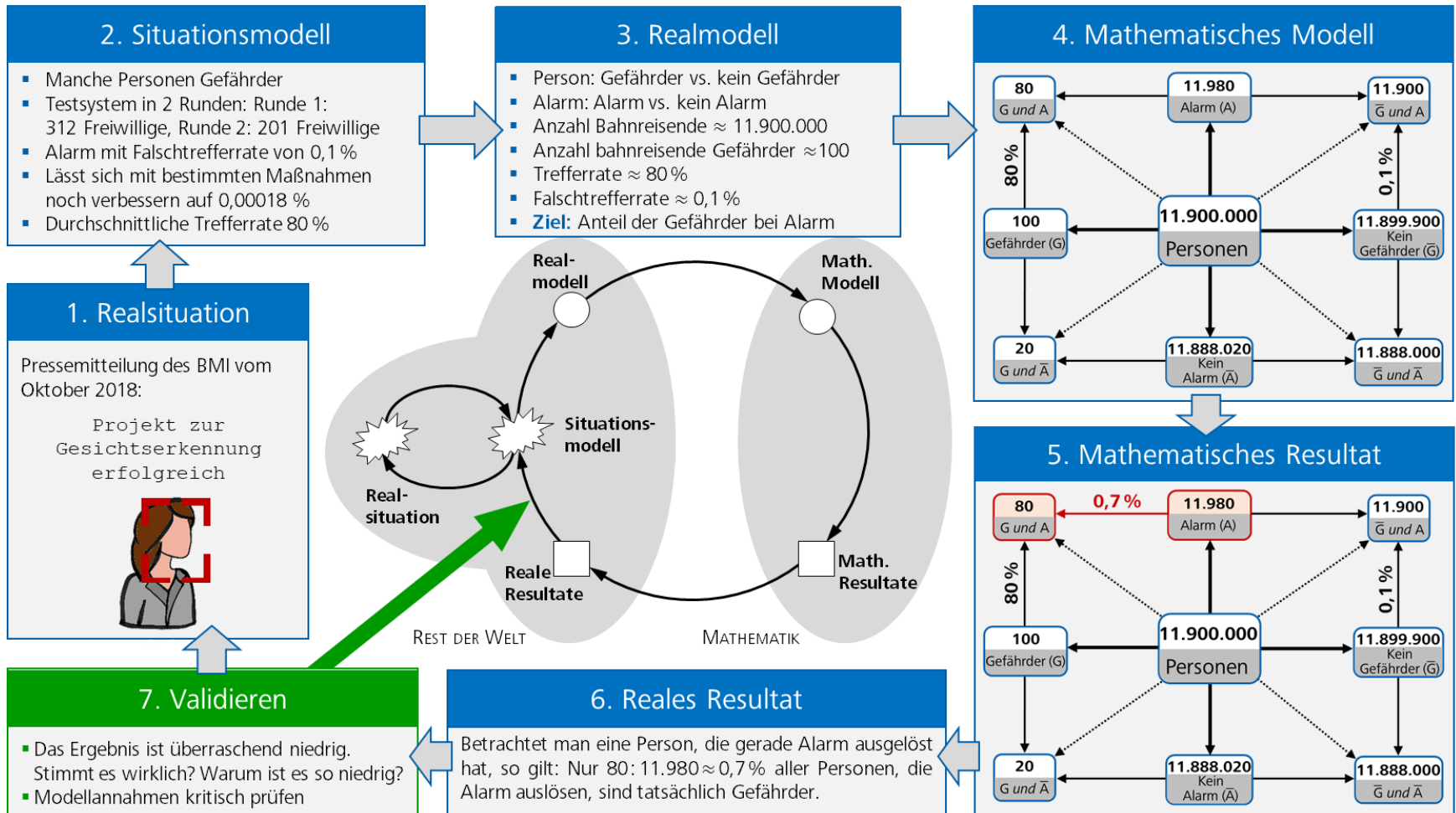




Von 11.980 Personen bei denen die Gesichtserkennung einen Alarm liefert, handelt es sich nur bei 80 Personen um Gefährder.

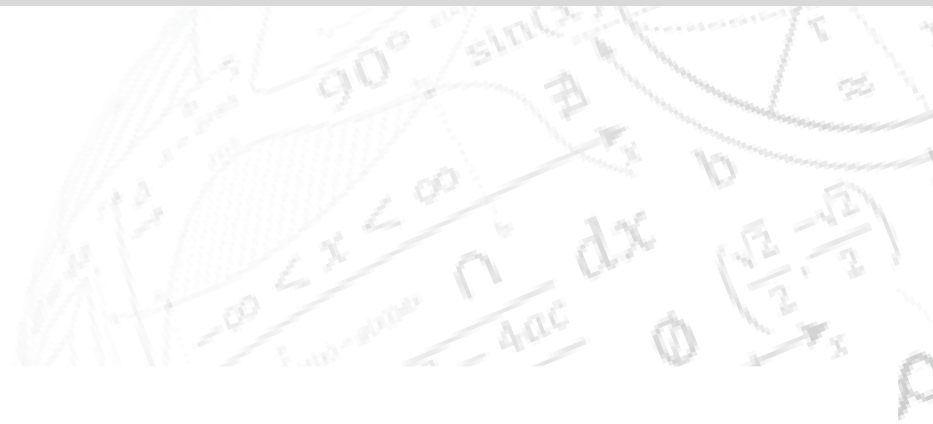
Die Wahrscheinlichkeit, einen Gefährder erwisch zu haben, wenn der Alarm anschlägt, liegt nur bei 0,7%.

Arbeitsauftrag: 2018 wurde ein Projekt zur Untersuchung der Gesichtserkennung am Bahnhof Südkreuz in Berlin abgeschlossen. Kernfrage des Projekts war: Sollte man die Gesichtserkennung an deutschen Bahnhöfen flächendeckend einführen, um potentielle Gefährder erfassen zu können? Was könnten mögliche Probleme bei einer solchen Einführung einer flächendeckenden Gesichtserkennung sein? Wie verlässlich sind die Ergebnisse? Verwende die nachfolgenden Informationen (siehe Onlinematerial).





Workshop-Phase III



Workshop-Phase III

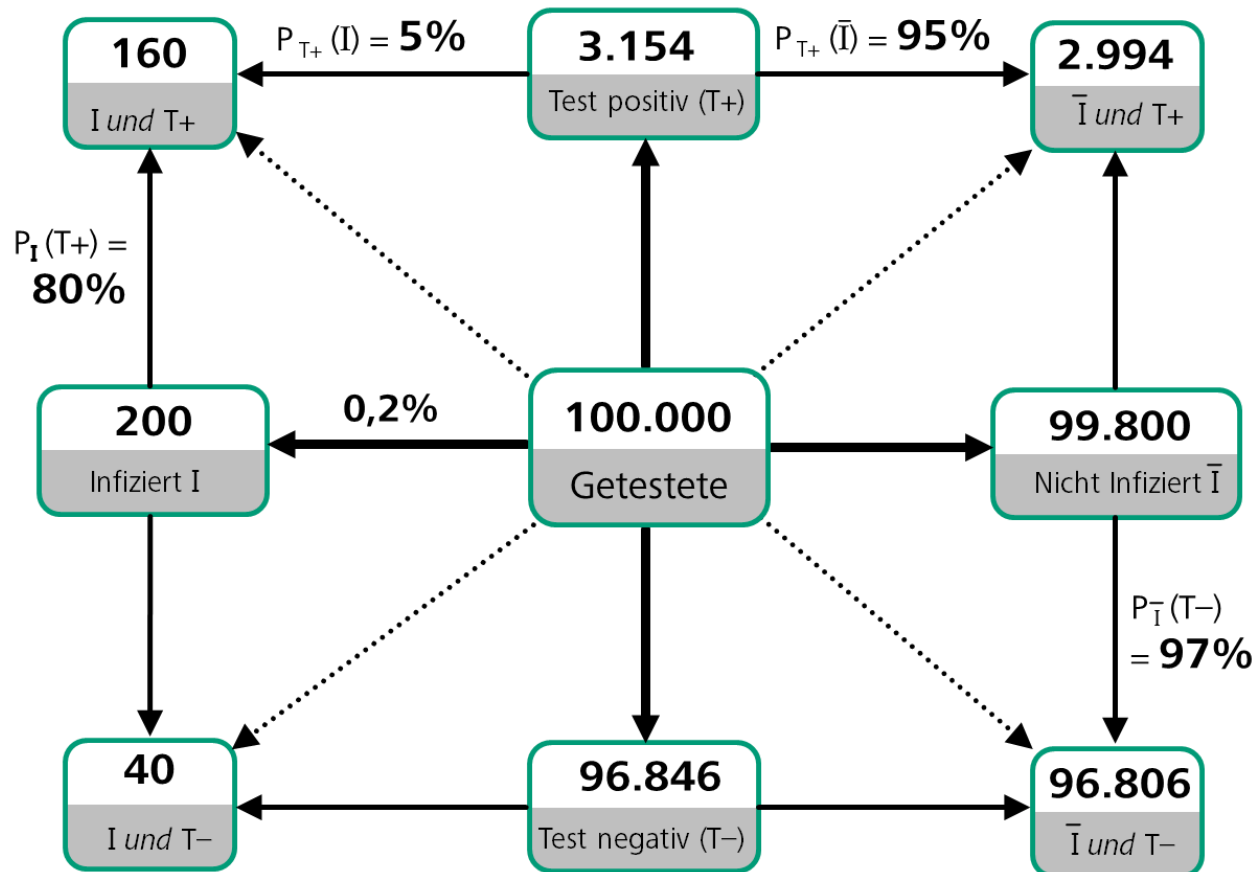
a) **Schätzen** Sie zunächst für die obige Situation die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person **nicht** mit Corona infiziert ist, wenn sie ein positives Schnelltestergebnis erhält.

Hier werden oft fälschlicherweise sehr niedrige Wahrscheinlichkeiten geschätzt, wie 10 oder 20%.



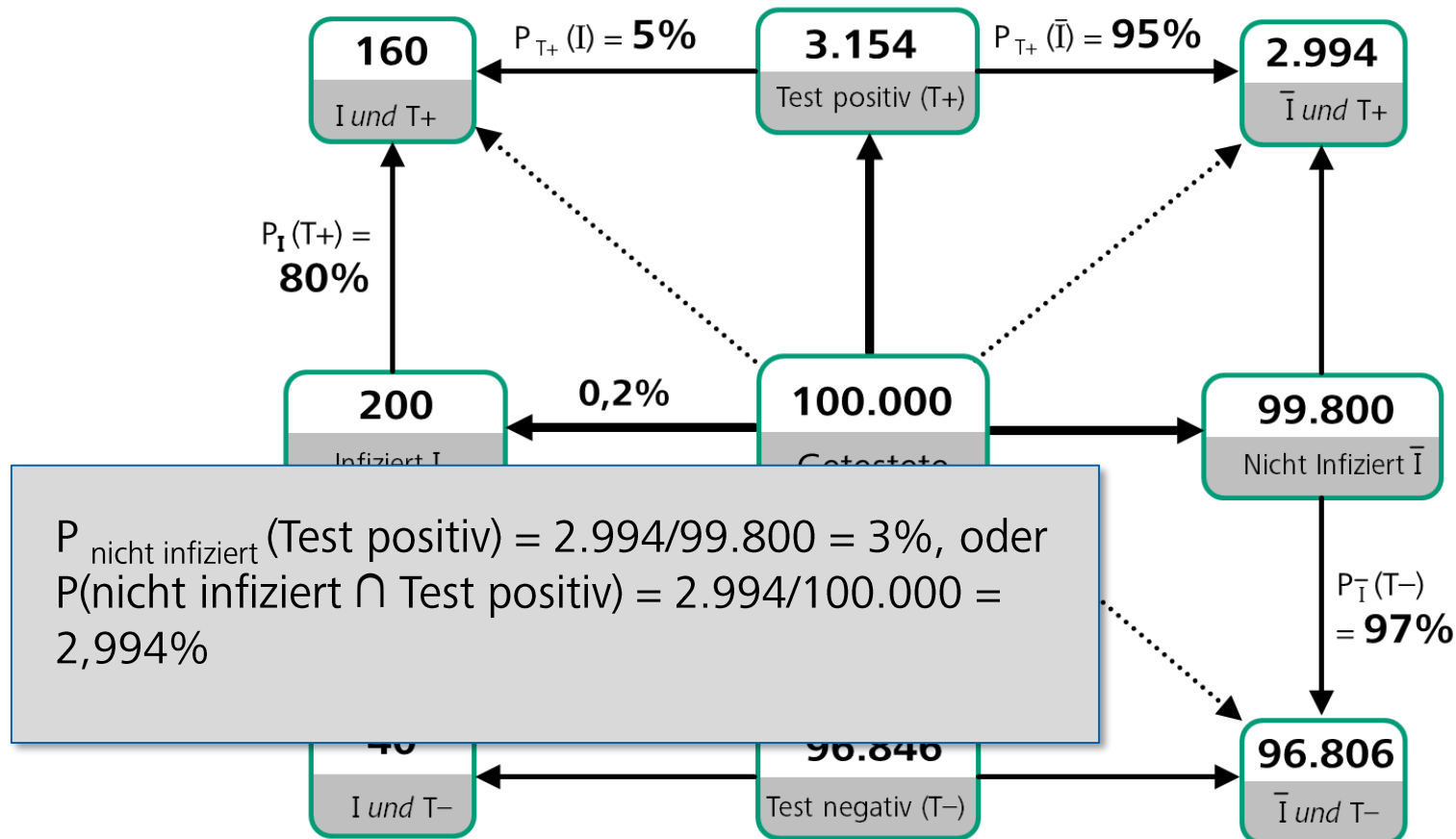
Workshop-Phase III

b) Mögliches Häufigkeitsnetz zur Visualisierung der Corona-Schnelltest-Aufgabe:

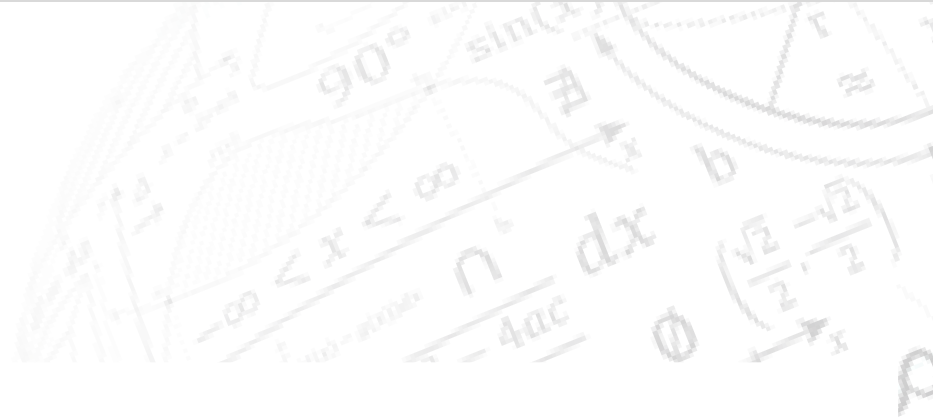


Workshop-Phase III

c) Typische Ablesefehler:



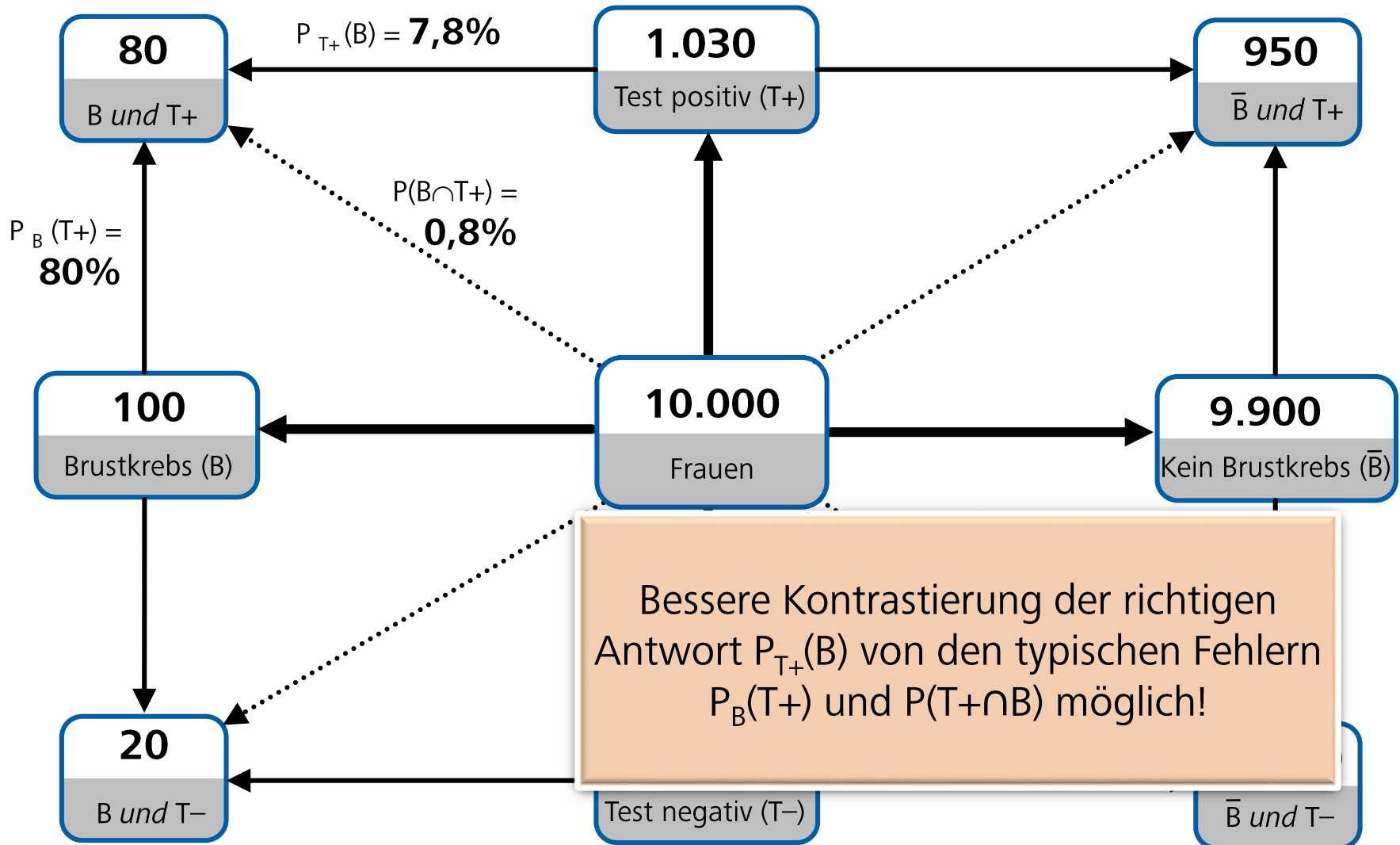
Typische Fehler beim Lösen dieses Aufgabentyps



Das Häufigkeitsnetz

BINDER, KRAUSS & STEIB (2020)

BINDER, KRAUSS & WIESNER (2020)



Essentielles Fehlerwissen für Lehrkräfte – aber auch wichtiges Abgrenzungswissen für Schülerinnen und Schüler

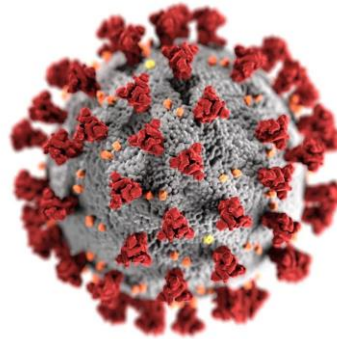
The chalkboard displays the following table:

	B	nB	
T+	1,6%	9,8%	11,4%
T-	0,4%	88,2%	88,6%
	2%	98%	100%

Below the table, the formula $P(B|T+) =$ is written.

A thought bubble from a student says: "Aber das steht doch schon da!? 💣💣💣💣 1,6%"

Auch Donald Trump unterlag schon einmal einer der typischen Wahrscheinlichkeits-Verwechslungen:



Donald Trump am 15. Oktober 2020:

„85% der Leute, die eine Maske tragen, stecken sich mit COVID an.“

$P_{\text{Maske}}(\text{COVID})$

\neq

Faktencheck am 15. Oktober 2020:

„Eine kleine Studie zeigt: 85% der Leute, die an COVID erkrankt sind, hatten zuvor regelmäßig Maske getragen.“

$P_{\text{COVID}}(\text{Maske})$

Rückblick



Teil 1

Numerische
Darstellungsarten
von Anteilen



Teil 2

Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Schnittwahrscheinlichkeiten, Bayesianische Aufgaben



Teil 3

Modellierungsaufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten



Fazit

- Beziehen Sie auch **alternative Darstellungsarten** (wie z.B. „Jeder Sechste“) in den Unterricht ein.
- Fragen Sie: Prozent **von was**? Was ist die richtige **Bezugsgröße**?
- Versuchen Sie sich die Situation für eine **konkrete Stichprobe** vorzustellen (nicht nur in Prozent und Wahrscheinlichkeiten).
- **Häufigkeitsdoppelbäume** und **Häufigkeitsnetze** sind hilfreiche Visualisierungen, um einfacher zur jeweiligen Lösung zu gelangen und statistische Sachverhalte besser zu durchdringen.
- Auch **Modellierungsaufgaben** lassen sich mithilfe dieser Visualisierungen besser durchdringen.



Literaturverzeichnis

- Binder, K., Krauss, S. und Bruckmaier, G. (2015). Visualizing the Bayesian 2-test case: The effect of tree diagrams on medical decision making. *PLoS ONE*, 13(3).
- Binder, K., Krauss, S., Bruckmaier, G. & Marienhagen, J. (2018). Effects of visualizing statistical information – An empirical study on tree diagrams and 2 x 2 tables. *Frontiers in psychology*, 6(1186).
- Brase, G. (2008). Pictorial representations in statistical reasoning. *Applied Cognitive Psychology*, 23, 369–381.
- Brase, G. (2014). The power of representation and interpretation: doubling statistical reasoning performance with icons and frequentist interpretations of ambiguous numbers. *Journal of Cognitive Psychology*, 26, 81–97.
- Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. In: Kahneman, D.; Slovic, P. und Tversky, A.: *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. S. 249-267.
- Ellis, K. M. und Brase, G. (2015). Communicating HIV Results to Low-Risk Individuals: Still Hazy After All These Years. *Current HIV research*, 13(5), 381-390.
- Garcia-Retamero, R., und Hoffrage, U. (2013). Visual representation of statistical information improves diagnostic inferences in doctors and their patients. *Social Science and Medicine*, 83, 27–33.
- Gigerenzer, G. und Hoffrage, U. (1995). *How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats*. *Psychological Review* 102(4), S. 684-704.
- Hoffrage, U. et al. (2015). Natural frequencies improve Bayesian reasoning in simple and complex inference tasks. *Frontiers in Psychology*.
- Hoffrage, U., Hafenbrädl, S., und Bouquet, C. (2015). Natural Frequencies Facilitate Diagnostic Inferences of Managers. *Frontiers in Psychology*, 6, 642.
- Krauss, S., Martignon, L. und Hoffrage, U. (1999). Simplifying Bayesian inference: The general case. In: Lorenzo Magnani, Nancy J. Nersessian, Paul Thagard: *Model-Based Reasoning in Scientific Discovery*. S. 165-179. Springer, US.
- Micallef, L. et al. (2012). Assessing the Effect of Visualizations on Bayesian Reasoning through crowdsourcing. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 18(12), S. 2536-2545.
- Ottley, A. et al. (2012). Visually communicating Bayesian Statistics to Laypersons. http://www.cs.tufts.edu/tech_reports/reports/2012-02/report.pdf.
- Prinz, R., A Feufel, M., Gigerenzer, G., und Wegwarth, O. (2015). What Counselors Tell Low-Risk Clients About HIV Test Performance. *Current HIV research*, 13(5), 369-380.
- Siegrist, M., und Keller, C. (2011). Natural frequencies and Bayesian reasoning: the impact of formal education and problem context. *J. Risk Res.* 14, 1039–1055.
- Steckelberg A., Balgenorth A., Berger J., Mühlhauser I. (2004). Explaining computation of predictive values: 2 x 2 table versus frequency tree. A randomized controlled trial [ISRCTN74278823]. *BMC Med. Educ.* 4,13.
- Wassner, C. (2004). Förderung Bayesianischen Denkens – Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen. KaDiSto Band 4, Kassel.