

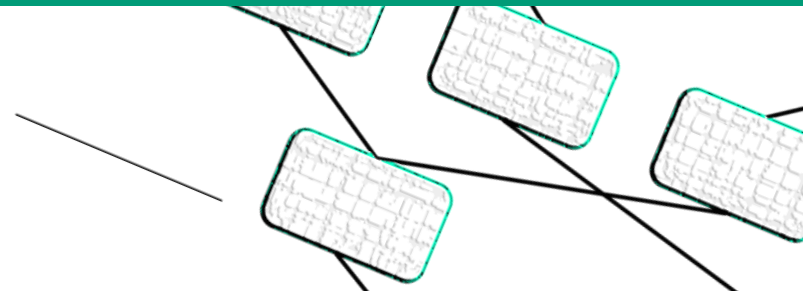
# Wie Ihre Schüler\*innen bedingte Wahrscheinlichkeiten und Schnittwahrscheinlichkeiten besser unterscheiden können

Regionale Fortbildung in den MINT-Labs Regensburg,  
8. Oktober 2021

Dr. Karin Binder und Nicole Steib  
Didaktik der Mathematik  
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK



Universität Regensburg



# Verwirrende Anteilswerte



# Entdecken

⚙ Einstellungen



Twittern



sushibrain\_5 #WirSindAlleLinX 🦋🇩🇪 @sushibrain\_5 · 28. Apr.  
WAS IST DAS????? 🤔🤔🤔🤔



💬 414

🔄 1.244

❤️ 4.162



## Antworten



rachel-kim ( vaccinated) @rachelk44138983 · 28. Apr.  
Antwort an @sushibrain\_5  
ich bin schon schlecht in Mathe

💬 1



❤️ 21



ulli.fast.forward @Ulli\_FFWD · 28. Apr.  
Antwort an @sushibrain\_5

🔍 Twitter durchsuchen

## Neu bei Twitter?

Registriere dich jetzt, um deine eigene personalisierte Timeline zu erhalten!

[Registrieren](#)

## Relevante Personen



sushibrain\_5 #Wirsin...  
@sushibrain\_5

[Folgen](#)

♠️ #noafd #refugeeswelcome  
#AufstehenGegenAntisemitismus ❤️  
yesterday is history tomorrow is a  
mystery today is a gift. that's why they  
call it the present. ❤️

## Trends für dich



Trend in Deutschland  
**Lupine**

...

Trend in Deutschland  
**Travis Scott**  
29.900 Tweets

...

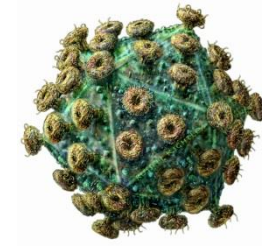
Trend in Deutschland

# Folgen des statistischen Analphabetismus



➤ Fehlentscheidungen vor Gericht  
SCHNEPS & COLMEZ (2013)

➤ Fälle von Überdiagnosen und Überbehandlungen  
WEGWARTH & GIGERENZER (2013)



## Folgen positiver HIV-Tests

Kurz nach Einführung der HIV-Tests (1985) erhielten 22 Blutspender in Florida die Information, dass ihr HIV-Test positiv war.



7 von diesen 22 Personen begingen Selbstmord, ohne zu wissen, ob das Ergebnis stimmte.



Stine (1996)



# Gliederung



## Teil 1

Numerische  
Darstellungsarten  
von Anteilswerten



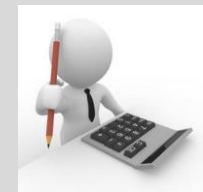
## Teil 2

Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Schnittwahrscheinlichkeiten,  
Bayesianische Aufgaben



## Teil 3

Förderung eines  
Kovariations-  
verständnisses



# Abschnitt 1

## Numerische Darstellungsarten von Anteilswerten



# Darstellungen von Anteilswerten in Zeitungen

## Jeder Achte fuhr schon Fernbus statt Bahn

Parallel zu vielen ICE-Strecken fahren immer mehr Fernbusse. Es steigt der Anteil derjenigen, die statt in den Zug auch mal in den Bus steigen.



BERLIN. Die Fernbusse machen der Deutschen Bahn nach einer Umfrage zunehmend mögliche Kunden abspanstig. Knapp jeder achte Deutsche (12 Prozent) ist seit Januar 2013 schon einmal in einen Fernbus statt in die Züge der Bahn gestiegen, wie das Meinungsforschungsinstitut YouGov in einer Online-Umfrage ermittelte. Vor einem Jahr waren es noch 5 Prozent.

Quelle: Mittelbayerische Zeitung (26.04.2014)

## Jeder Fünfte sucht einen neuen Job

Der Trend bei der Bewerbung geht dabei derzeit immer mehr in Richtung E-Mail. Als Informationsgeber bei der Jobsuche werden Tageszeitungen bevorzugt.



Fast jeder Fünfte – 18 Prozent der Befragten – sucht derzeit dringend einen neuen Job. Foto: dpa

FRANKFURT/MAIN. Neues Jahr, neues Glück: Das denken nicht wenige auch im Hinblick auf die Karriere. Fast jeder Fünfte (18 Prozent) sucht derzeit dringend einen neuen Job. Das zeigt eine bevölkerungsrepräsentative Umfrage des Marktforschungsinstituts Toluna. Jeder Neunte (11 Prozent) gibt als Grund an, keinen festen Job zu haben. Jeder Fünfzehnte (7 Prozent) ist momentan beschäftigt, will aber möglichst bald wechseln. Etwas mehr als jeder Fünfte (22 Prozent) schaut sich hin und wieder

Quelle: Mittelbayerische Zeitung (18.12.2013)

## Jurastudenten für drakonische Strafen

Jeder dritte Jurastudent am Anfang seiner Ausbildung will die Todesstrafe zurück. Der Wunsch nach hohen Strafen wächst.



Jeder dritte Jurastudent am Anfang seiner Ausbildung will heute die Todesstrafe zurück. Foto: dpa

VON CATHERINE SIMON, DPA

ERLANGEN Es ist paradox: Die Zahl der Morde und Totschläge sinkt in Deutschland seit Jahren. Die Leute fühlen sich so sicher wie fast nie zuvor. Und dennoch wächst bei jungen Jurastudenten der Wunsch nach immer härteren Strafen. Ein Drittel von ihnen befürwortet laut einer Studie sogar die Todesstrafe. Etwa gleich viele finden, dass selbst eine lebenslange Haft bei manchen Straftaten noch zu mild ist. Und die Hälfte der Befragten würde einen

Quelle: Mittelbayerische Zeitung (26.11.2014)



Quelle: BILD (28.11.2014)

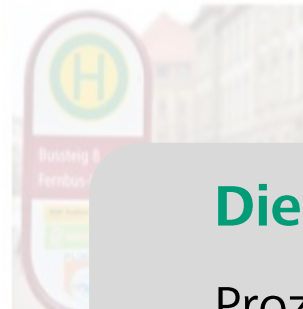


Quelle: Die Welt (09.03.2014)

# Darstellungen von Anteilswerten in Zeitungen

## Jeder Achte fuhr schon Fernbus statt Bahn

Parallel zu vielen ICE-Strecken fahren immer mehr Fernbusse. Es steigt der Anteil derjenigen, die statt in den Zug auch mal in den Bus steigen.



BERLIN Die Fernbusse machen der Deutschen Bahn nach einer Umfrage zunehmend mögliche Kunden abspenstig. Knapp jeder achte Deutsche (12 Prozent) ist seit Januar 2014

## Jeder Fünfte sucht einen neuen Job

Der Trend bei der Bewerbung geht dabei derzeit immer mehr in Richtung E-Mail. Als Informationsgeber bei der Jobsuche werden Tageszeitungen bevorzugt.



FRANKFURT/MAIN. Neues Jahr, neues Glück: Das denken nicht wenige auch im Hinblick auf die Karriere. Fast jeder Fünfte (18 Prozent) sucht derzeit dringend einen neuen Job. Das zeigt eine bevölkerungsrepräsentative

## Jurastudenten für drakonische Strafen

Jeder dritte Jurastudent am Anfang seiner Ausbildung will die Todesstrafe zurück. Der Wunsch nach hohen Strafen wächst.



VON CATHERINE SIMON, DPA

ERLANGEN Es ist paradox: Die Zahl der Morde und Totschläge sinkt in Deutschland seit Jahren. Die Leute fühlen sich so sicher wie fast nie zuvor. Und dennoch wächst bei jungen Jurastudenten der Wunsch nach immer härteren Strafen. Ein Drittel von ihnen antwortet laut einer Studie sogar die Todesstrafe. Etwa gleich viele finden, dass selbst eine lebenslange Haft bei manchen Straftaten noch zu mild ist. Und die Hälfte der Befragten würde einen

## Die drei Klassiker in Zeitungen:

Prozent, absolute Häufigkeiten und „jeder Wievielte“ – und in der Schule?

Zeitung (26.11.2014)

**LOTTO 6 aus 49**

**Jackpot**

**ca. 4 Mio. €**

Chance 1:140 Millionen Spielteilnahme ab 18. Glücksspiel kann süchtig machen. Infos unter kostenloser Hotline 0800 137 27 00 und www.lotto.de

Quelle: BILD  
(28.11.2014)

**Zwei von fünf Alleinerziehenden beziehen Hartz IV**

In etwa jeder fünften deutschen Familie ist nur ein Erwachsener allein für die Kinder verantwortlich, mit steigender Tendenz. Und für sie ist das Armutsrisiko besonders hoch: Rund 40 Prozent aller Alleinerziehenden beziehen Hartz IV – während bei Familien mit zwei Elternteilen nur acht Prozent auf die Grundsicherung angewiesen sind. Die Kinderarmut in der Bundesrepublik sei damit zum großen Teil darauf zurückzuführen, dass die betroffenen Kinder in Familien mit nur einem Elternteil aufwachsen – zu diesem Ergebnis kommt eine Studie im Auftrag der Bertelsmann-Stiftung, die der "Welt am Sonntag" vorliegt.

**Politik könnte Dilemma lösen**

Die Lage der Kinder und ihrer Mütter hat sich der Studie zufolge in den vergangenen zehn Jahren noch verschärft. Zum einen, weil sich

Quelle: Die Welt  
(09.03.2014)



## Studie: Darstellungsarten von Daten in Print-, Audio und visuellen Medien

Darstellungsart	Beispiel	Zeitungen $N = 19$ (Ausgaben)	Radio $N = 6$ (1 h)	Fernsehen $N = 6$ (Nachrichten)	Gesamt
Prozent	25 %	2106	54	29	2189
Dezimalbrüche	0,25	0	0	0	0
Gewöhnliche Brüche numerisch	$\frac{1}{4}$	0	17*	18*	0
Zahlwort	Ein Viertel	76			111
Absolute Häufigkeiten	1 von 4	97	4	4	105
„Jeder Wievielte“	Jeder Vierte	42	2	2	46
Chancen(verhältnisse)	1:3 (1 zu 3)	18	0	0	18

\* In mündlicher Kommunikation kann nicht zwischen numerischem Bruch und Zahlwort unterschieden werden

## Verschiedene numerische Darstellungen von Anteilswerten

Prozente	25 %	Schule & Medien
Dezimalbrüche	0,25	Schule
Gewöhnliche Brüche	$\frac{1}{4}$	Schule
Absolute Häufigkeiten	1 von 4	Medien
„Jeder Wievielte“	jeder vierte	Medien
Chancenverhältnisse	1 : 3 („1 zu 3“)	Medien (selten)

Erstaunlicherweise ist die Umrechnung dieser Darstellungen nicht selbstverständlich!

“

Die Schülerinnen und Schüler ...

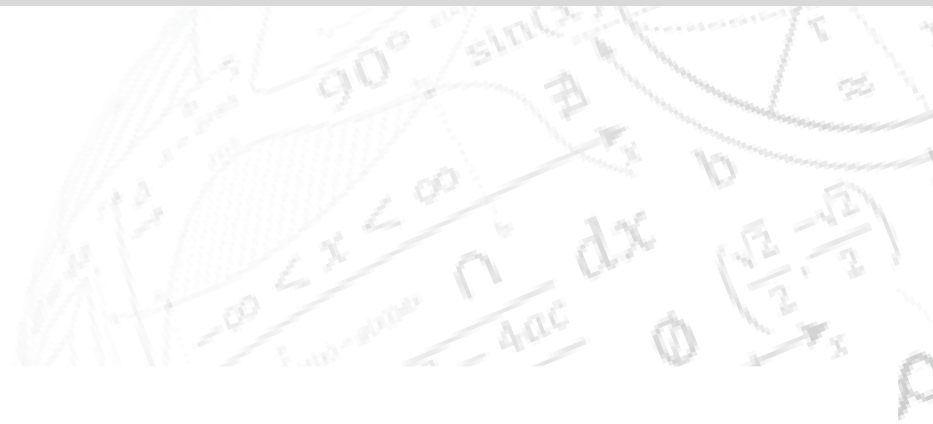
entnehmen einfachen Texten (z. B. aus Zeitungen), die Prozentangaben enthalten, die wesentlichen mathematischen Informationen und prüfen diese auf Korrektheit (auch: Unterscheidung von „Prozent“ und „Prozentpunkten“); **dabei gehen sie flexibel mit in den Medien häufig verwendeten alternativen Darstellungen von Prozentangaben um (z. B. „jeder Siebte“, „drei von fünf“).**

*LehrplanPlus Gymnasium Bayern, Klasse 6*





# Workshop-Phase I



## Workshop-Phase I

### Aufgabe 1:

- (a) Rechnen Sie die beiden im Artikel markierten Informationen in jede der fünf anderen numerischen Darstellungsarten um.

Numerische Darstellung	Beispiel	„Zwei von fünf“	„Jeder Fünfte“
Prozente	25 %	40 %	20 %
Dezimalbrüche	0,25	0,4	0,2
Gewöhnliche Brüche	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
Absolute Häufigkeiten	1 von 4	2 von 5	1 von 5
„Jeder Wievielte“	jeder Vierte	—————	jeder Fünfte
Chancenverhältnisse	1 zu 3	2 zu 3	1 zu 4



## Workshop-Phase I

### Aufgabe 1:

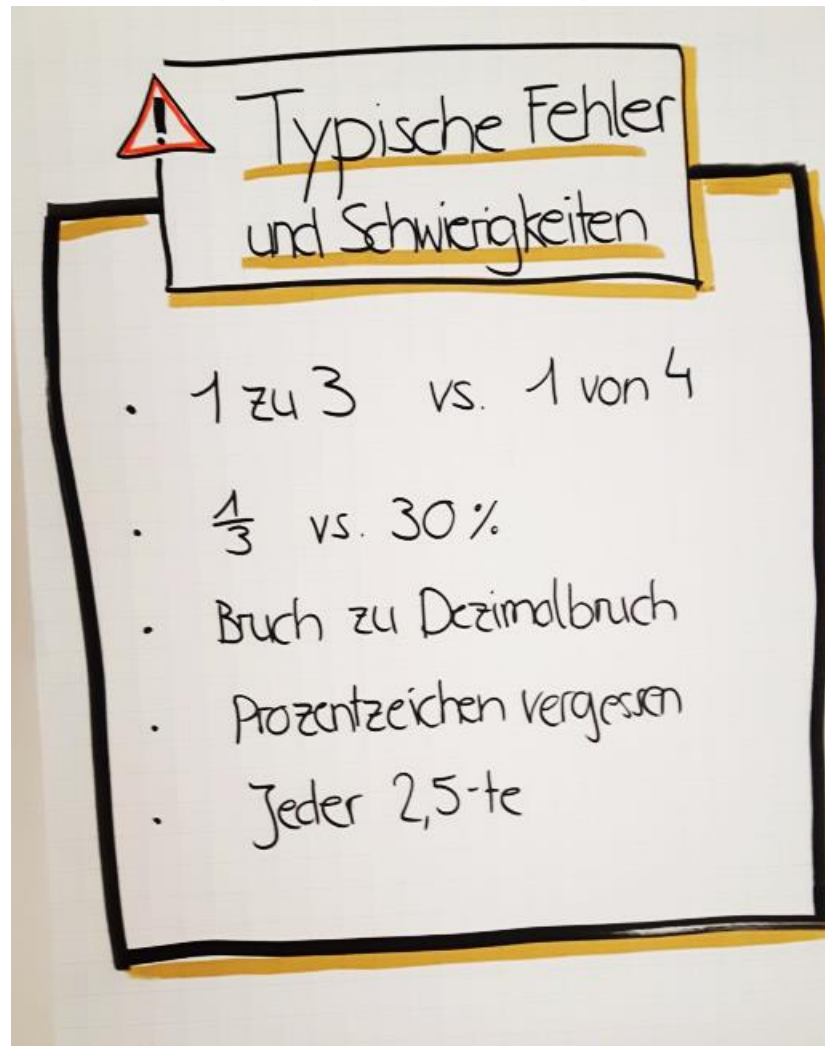
- (b) Sammeln Sie möglichst viele Fehler, die Sie sich bei Schülerinnen und Schülern bei den Umrechnungen vorstellen können.

#### Überblick über mögliche Fehler:

- Umrechnung von „x %“ in „jeder x-te“:  
Bsp.: 5 %  $\triangleq$  „jeder 5-te“ (nur für „10 %“ gültig)
- Umrechnung von Chancenverhältnissen „1 zu x“ in gewöhnliche Brüche „1/x“ (und umgekehrt):  
Bsp.:  $\frac{1}{4}$  (=1:4)  $\triangleq$  Chancenverhältnis „1 zu 4“ (statt „1 zu 3“)
- Umrechnung von „x von y“ in „jeder z-te“:  
Bsp.: „3 von 10“  $\triangleq$  „jeder  $3\frac{1}{3}$  -te“ (nur für Stammbrüche möglich)
- Umrechnung von Prozentangaben größer als 50 % in „jeder x-te“:  
Bsp.: 80 %  $\triangleq$  „jeder ?-te“ (nur für  $\leq 50$  % sinnvoll)

## Workshop-Phase I

### Ihre Ideen und Überlegungen zu Aufgabe 1:



## Typische Fehler von Schülerinnen und Schülern aus einer aktuellen Studie

Was bedeutet 40%?

4 von 10

☒ ja

☐ nein

Jeder Vierzigste

☐ ja

☒ nein

$\frac{2}{5}$

☒ ja

☐ nein

0,4

☒ ja

☐ nein

Ein Vierzigstel

☐ ja

☒ nein

Vierhundert von Tausend

☒ ja

☐ nein

Eine Chance von „4 zu 10“

☐ ja

☒ nein

1.

Lösen Sie die Aufgabe!

2.

Welche Antwortmöglichkeit war für die Schülerinnen und Schüler vermutlich am schwierigsten?

## Typischer Fehler von Schülerinnen und Schülern aus einer aktuellen Studie

Bitte übertrage die Angabe „jeder Zwanzigste“

... in eine entsprechende Prozentangabe! 20 %

F

... in einen gewöhnlichen Bruch (z.B.  $\frac{1}{2}$ ):  $\frac{1}{20}$

✓



## Workshop-Phase I

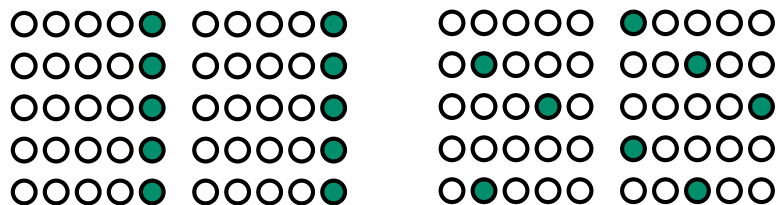
### Aufgabe 2:

- Finden Sie die Fehler in den Zeitungsausschnitten.
- Erstellen Sie zu jedem Zeitungsausschnitt mögliche Aufgabenstellungen.

### Beispiel 1

~~Jeder Fünfte < Jeder Sechste~~ ?

Jeder Fünfte > Jeder Sechste



Leipziger Volkszeitung (09.10.2013)

#### Erschreckende Wissenslücken

Erwachsene in Deutschland können im internationalen Vergleich nur mittelmäßig lesen und Texte verstehen. Gleiches gilt für Grundrechenarten wie Prozentrechnen. Dies zeigt der erste PISA-Test zu den Alltagskompetenzen von Erwachsenen in 24 wichtigen Industrienationen der Welt.

Die „PISA für Große“-Studie verschärft die Aussage früherer Studien: **Jeder Sechste** liest nur so gut wie ein zehnjähriges Kind. Das ist beim Kopfrechnen nur unwesentlich besser, schließlich hapert es hier bei **jedem Fünften** mit dem Einmaleins. Der erfreulichste Teil der Studie:



## Beispiel 1

### Erschreckende Wissenslücken

Erwachsene in Deutschland können im internationalen Vergleich nur mittelmäßig lesen und Texte verstehen. Gleiches gilt für Grundrechenarten wie Prozentrechnen. Dies zeigt der erste PISA-Test zu den Alltagskompetenzen von Erwachsenen in 24 wichtigen Industrienationen der Welt.

Die „PISA für Große“-Studie verschärft die Aussage früherer Studien: Jeder Sechste liest nur so gut wie ein zehnjähriges Kind. Das ist beim Kopfrechnen nur unwesentlich besser, schließlich hapert es hier bei jedem Fünften mit dem Einmaleins. Der erfreulichste Teil der Studie:



### Mögliche Aufgabenstellung

In dieser Zeitungsmeldung findet sich ein Fehler. Erkläre diesen Fehler deinem Banknachbarn bzw. deiner Banknachbarin und überlege, warum dem Journalisten dieser Fehler vermutlich passiert ist.

## Beispiel 2

Aus der *Norderneyer Badezeitung*:  
„Fuhr vor einigen Jahren noch jeder zehnte Autofahrer zu schnell, so ist es mittlerweile heute ‚nur noch‘ jeder fünfte. Doch auch fünf Prozent sind zu viele, und so wird weiterhin kontrolliert, und die Schnelfahrer haben zu zahlen.“

### Mögliche Aufgabenstellungen

- In dieser Zeitungsmeldung finden sich zwei Fehler! Finde diese Fehler.
- Korrigiere eine der drei Zahlenangaben, so dass beide Fehler „gleichzeitig verschwinden“.

## Workshop-Phase I

## Beispiel 3

## PANORAMA

MITTWOCH, 13. FEBRUAR 2019

**Eldorado für Alleinlebende****Regensburg ist Deutschlands Single-Hochburg**

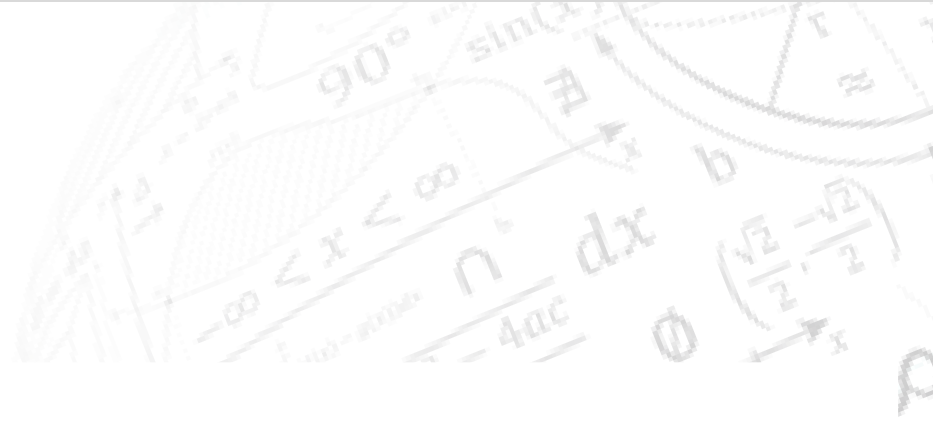
**Keine andere Stadt in Deutschland hat mehr Singlehaushalte als Regensburg: 56 Prozent aller Einwohner der bayerischen Stadt leben allein in ihrer Wohnung. Der Bundesschnitt liegt lediglich bei 38 Prozent, wie Konsumforscher herausfanden.**

Nirgendwo in Deutschland ist der Anteil an Singlehaushalten höher als im bayerischen Stadtkreis Regensburg. Eine **Analyse des Marktforschungsinstituts GfK** hat ergeben, dass in 56,5 Prozent der Regensburger Haushalte 2018 nur ein Mensch lebte. Der Bundesschnitt lag bei 38,1 Prozent.

**Mögliche Aufgabenstellungen**

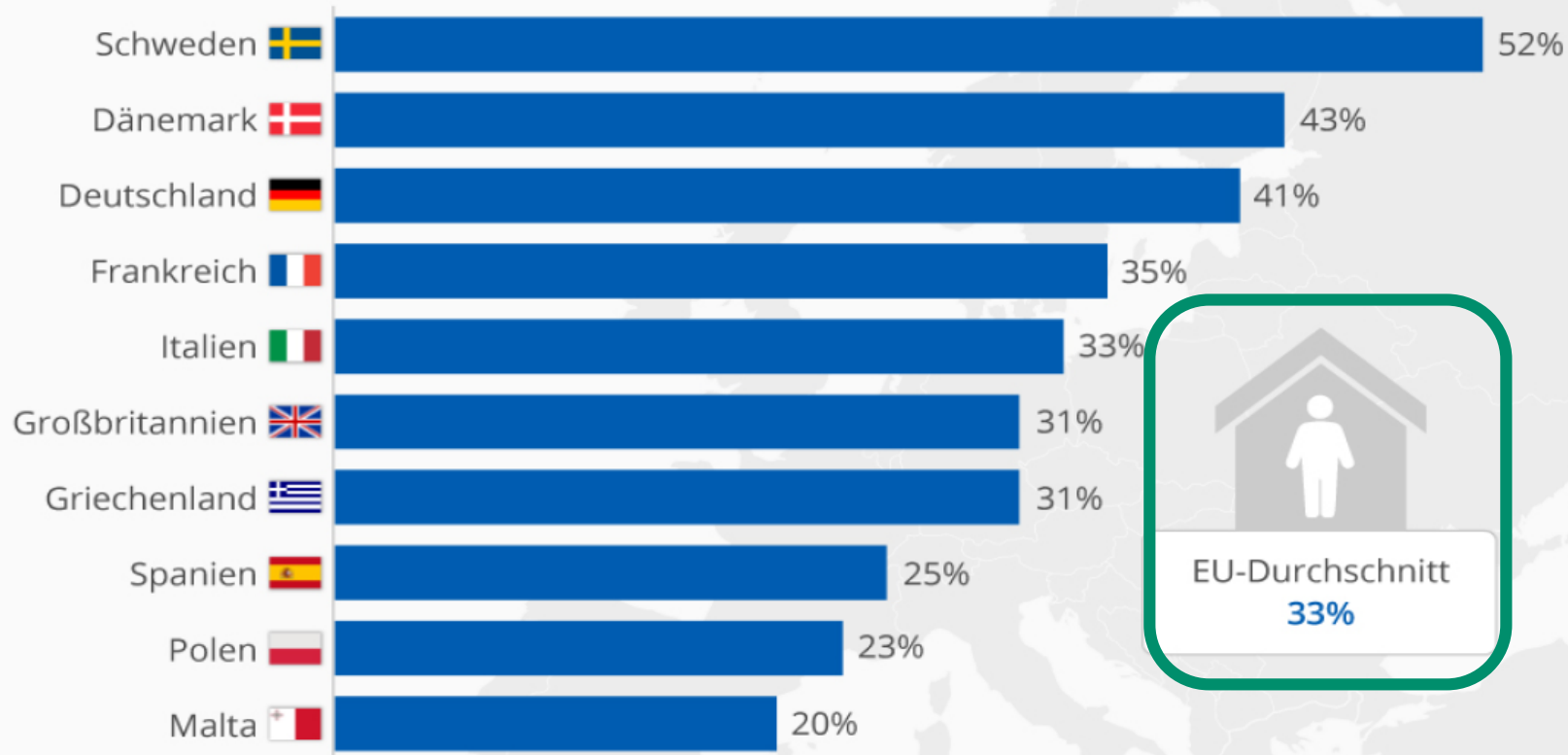
- Welcher statistische Fehler findet sich in diesem Artikel?
- Wenn wirklich ca. 50% der Haushalte Single-Haushalte sind, wie viele Personen leben dann maximal in Regensburg alleine?

# Jeder dritte Europäer lebt allein



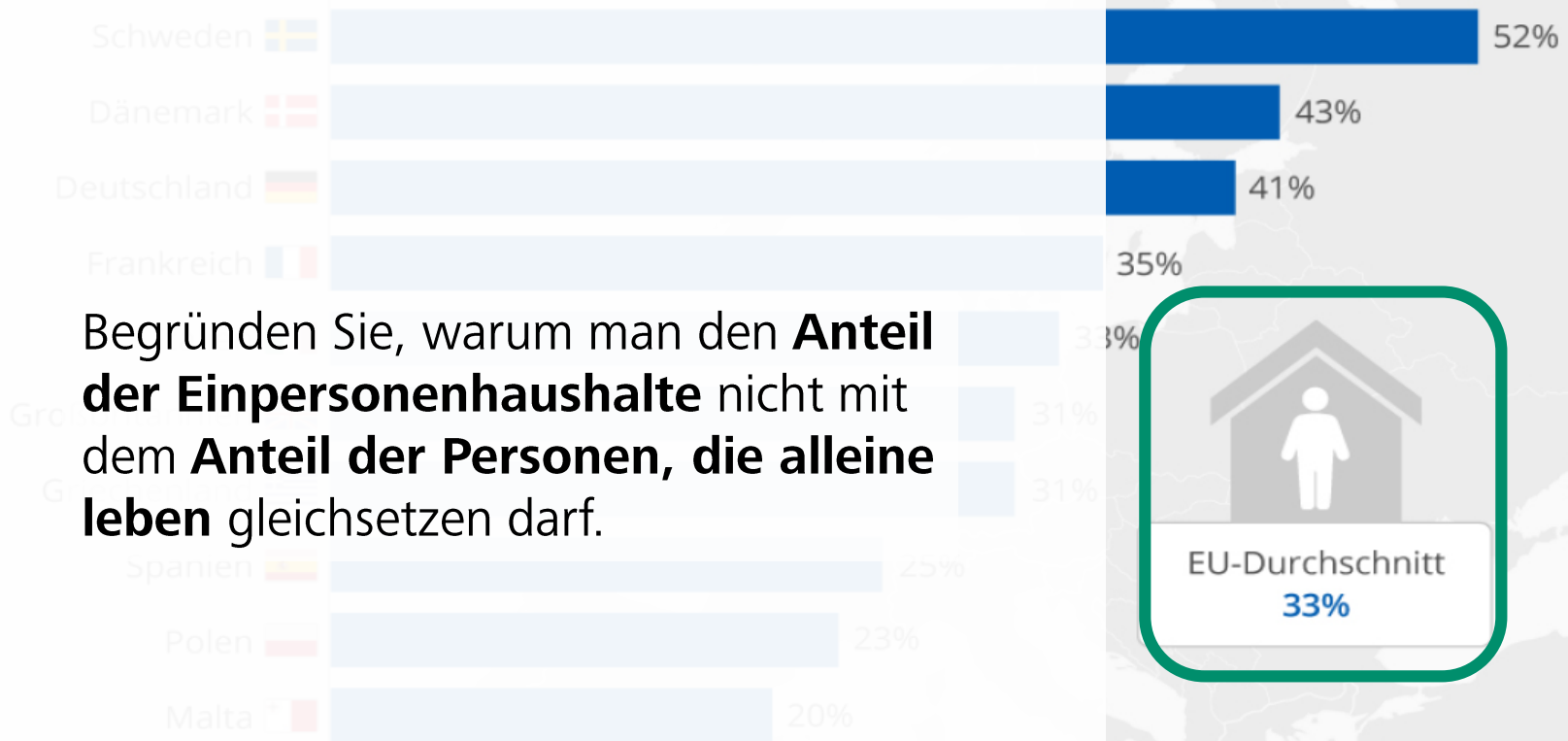
## Jeder dritte Europäer lebt alleine

Anteil der Einpersonenhaushalte in ausgewählten EU-Ländern 2016



## Jeder dritte Europäer lebt alleine

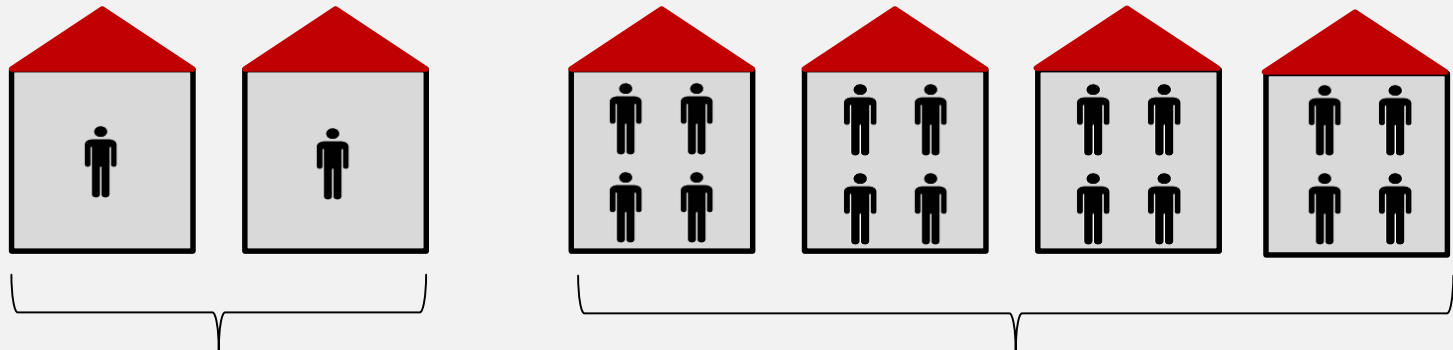
Anteil der Einpersonenhaushalte in ausgewählten EU-Ländern 2016



Begründen Sie, warum man den **Anteil der Einpersonenhaushalte** nicht mit dem **Anteil der Personen, die alleine leben** gleichsetzen darf.

## ERKLÄRUNG: Einpersonenhaushalte $\neq$ Personen leben alleine

Fiktive kleine Ortschaft mit **18 Personen**, die wie folgt aussieht:



2 Haushalte mit je einer Person

4 Haushalte mit je vier Personen

**In Haushalten gedacht:**

2 von **6 Haushalten** sind Einpersonenhaushalte: Also  $33,3\%$  sind Einpersonenhaushalte.

**In Personen gedacht:**

2 von **18 Personen** leben alleine: Also  $11,1\%$  der Menschen leben allein.



## Wiederkehrende Statistik-Fehler in den Medien

Manche statistische Fehler tauchen in den Medien regelmäßig auf und können so unterrichtlich auch sehr gut eingesetzt werden: Man findet immer eine passende **aktuelle** Zeitungsmeldung dazu!

### Wiederkehrende Themen (siehe Binder, Krauss & Krämer, 2019):

- **Equal Pay Day:** Immer im März/April
- **Polizeiliche Kriminalitätsstatistik:** Immer im Ende April oder Anfang Mai
- **Brustkrebsmonat:** Oktober
- **„Jeder zweite lebt allein“:** Mindestens zweimal im Jahr. :-)
- **Mehrwertsteuer geschenkt bei MediaMarkt oder Saturn:** Immer im September

## Wo findet man solche „Unstatistiken“?

Die beste Seite für aktuelle Unstatistiken:

<http://www.rwi-essen.de/unstatistik/>

Auch diese hier ist gut:

<http://www.achtung-statistik.de/>

### Empfehlenswert sind außerdem die Bücher:

Bauer, T., Gigerenzer, G., & Krämer, W. (2014). *Warum dick nicht doof macht und Genmais nicht tötet: Über Risiken und Nebenwirkungen der Unstatistik*. Campus Verlag.



Christensen, B., & Christensen, S. (2015). *Achtung: Statistik*. Springer Berlin Heidelberg.



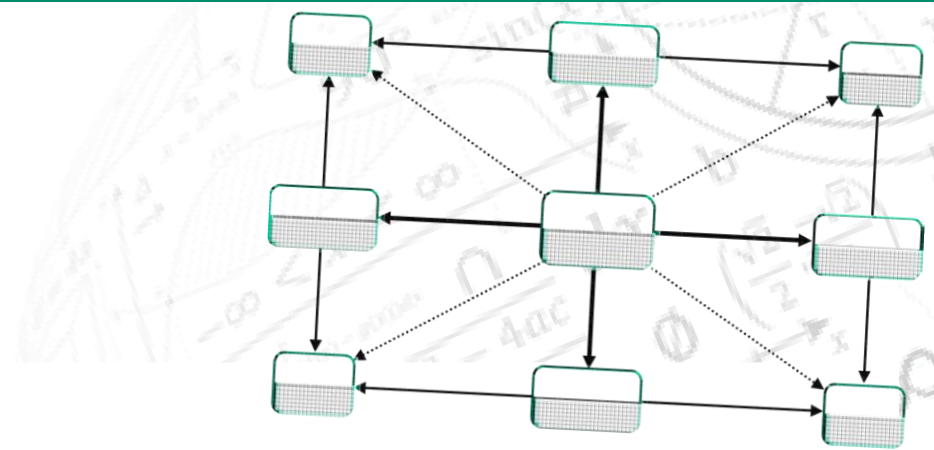


# Pause



# Abschnitt 2

## Häufigkeitsnetze zur Visualisierung bedingter Wahrscheinlichkeiten



## Neu in Deutschland: HIV-Selbsttests

Seit dem **29. September 2018** kann man in Deutschland HIV-Selbsttests kaufen.

**1. Dezember 2018:** „Welt-AIDS-Tag“ mit dem Motto: „Know your status“ – also „Kenne deinen Gesundheitsstatus“

**Ziel:** Bis zum Jahr 2020 sollen 90% aller HIV-infizierten Menschen ihren Immunstatus kennen.

Was würde das bedeuten, wenn wir tatsächlich ALLE den Selbsttest machen, um unseren Gesundheitsstatus zu kennen?



# Wie gut sind die HIV-Tests?

## FUNKTION UND LEISTUNG DES TESTS

**autotest VIH®** ist ein immunchromatografischer Test, der Antikörper im menschlichen Blut erfasst, die nach einer HIV-Infektion produziert werden.

Die Kontrolllinie, die bei Verwendung des Tests erscheint, dient zur Bestätigung der ordnungsgemäßen Funktion des Tests.

**Sensitivität\*:** Die Sensitivität dieses Tests wurde berechnet und beträgt 100 % mit einem Konfidenzintervall von 99,1 % bis 100 %.

Alle HIV-positiven Personen in dieser Studie erhielten ein richtiges Ergebnis. Es gab keine falsch negativen Ergebnisse.\*\*

**Spezifität\*:** Die Spezifität dieses Tests wurde berechnet und beträgt 99,8 % mit einem Konfidenzintervall von 99,5 % bis 100 %.

0,2 % der HIV-negativen Personen erhielten ein falsches Resultat, d. h., 0,2 % der Ergebnisse waren falsch positiv.\*\*\*

**Zuverlässigkeit:** Eine Durchführbarkeitsstudie zur Handhabung dieses Tests durch Laien ergab, dass mehr als 99,2 % der Teilnehmer ein interpretierbares Ergebnis erzielten und mehr als 98,1 % das Ergebnis korrekt interpretierten. Positive Ergebnisse wurden in 100 % der Fälle korrekt interpretiert.

**Interferenz:** Bei der Prüfung von Proben, die – auch aufgrund von Erkrankungen – Stoffe enthalten, die die Ergebnisse dieses Tests möglicherweise beeinflussen, wurden keine signifikanten Interferenzen beobachtet.

Detaillierte Informationen über Ergebnisse aus den oben genannten Studien sind auf Anfrage auf [www.autotest-sante.com](http://www.autotest-sante.com) erhältlich.

\*Studien an 503 Menschen (Sensitivität) und 2.051 Menschen (Spezifität) aus den Vereinigten Staaten und der Europäischen Union.

\*\*Falsch negativ: Eine Probe, die den Zielmarker enthält und durch den Test fälschlicherweise als negativ eingestuft wird.

\*\*\*Falsch positiv: Eine Probe, die den Zielmarker nicht enthält und durch den Test fälschlicherweise als positiv eingestuft wird.

## Wie gut sind die HIV-Tests?

**Sensitivität:** Die Sensitivität dieses Tests wurde berechnet und beträgt **100%** mit einem Konfidenzintervall von 99,1% bis 100%. Alle HIV-positiven Personen in dieser Studie erhielten ein richtiges Ergebnis. Es gab keine falsch negativen Ergebnisse.

**Zuverlässigkeit:** Eine Durchföhrung des Tests durch Laien ergab, dass mehr als 99,2% der Teilnehmer ein interpretierbares Ergebnis erhielten und mehr als 98,1% des Ergebnis korrekt interpretierten. Positive Ergebnisse wurden in 100% der Fälle korrekt interpretiert.

**Interferenz:** Bei der Prüfung von Proben, die – auch aufgrund von Erkrankungen – Stoffe enthalten, die die Ergebnisse dieses Tests möglicherweise beeinflussen, wurden keine falsch positiven Ergebnisse beobachtet.

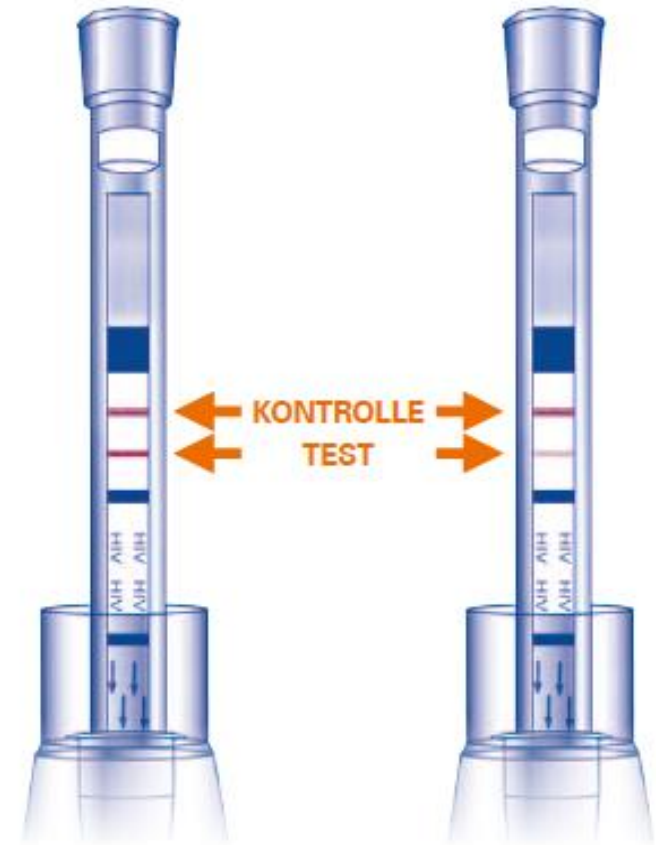
**Spezifität:** Die Spezifität dieses Tests wurde berechnet und beträgt **99,8%** mit einem Konfidenzintervall von 99,5% bis 100%. 0,2% der HIV-negativen Personen erhielten ein falsches Resultat, d.h., 0,2% der Ergebnisse waren falsch positiv.



## Wie gut sind die HIV-Tests?

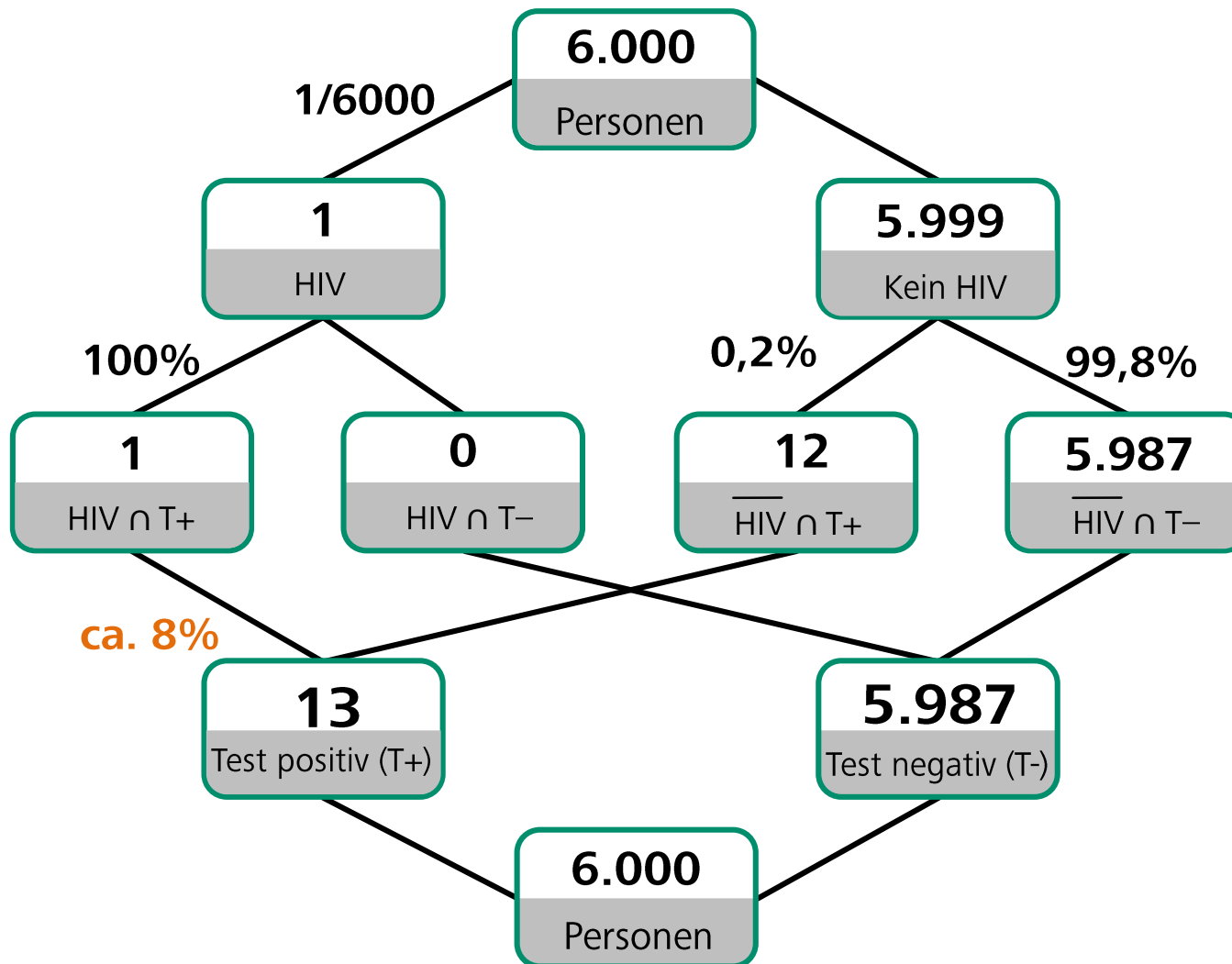
Wie hoch ist die Sensitivität dieses Tests? Die Wahrscheinlichkeit denn nun wirklich, dass man erkrankt ist, wenn der Test positiv ist?

Diese Wahrscheinlichkeit steht nirgendwo in der Gebrauchsanweisung!

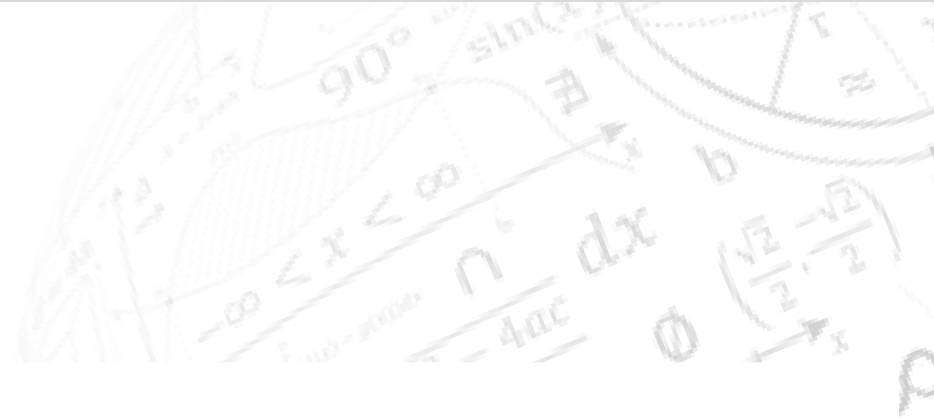
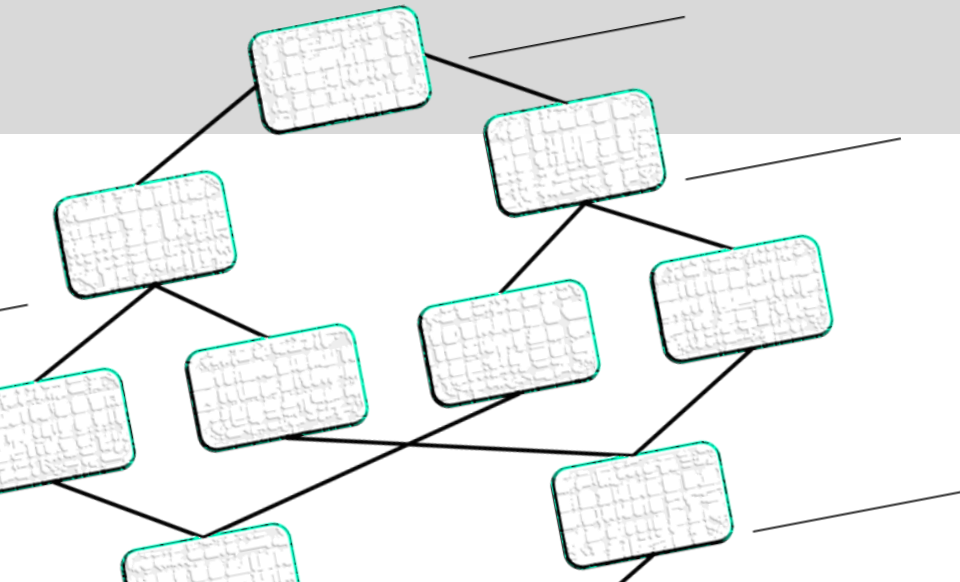


**IHR SELBSTTEST HAT REAGIERT  
SIE SIND WAHRSCHEINLICH  
HIV-POSITIV**

# Häufigkeitsdoppelbaum



# Bayesianische Aufgaben



# Bayesianische Aufgabe: Früherkennung von Brustkrebs



## EREIGNISSE

**B**

Frau hat Brustkrebs

**$\bar{B}$**

Frau hat keinen Brustkrebs

**M+**

Frau hat einen positiven Befund in der Mammographie erhalten

**M-**

Frau hat einen negativen Befund in der Mammographie erhalten

## WAHRSCHEIN- LICHKEITEN

**P(B)**

Prävalenz

**$P_B(M+)$**

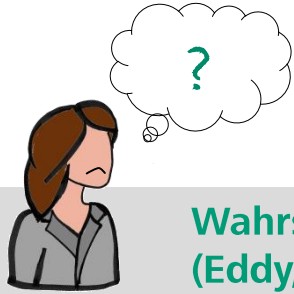
Sensitivität des Diagnoseverfahrens

**$P_{\bar{B}}(M+)$**

Falsch-Positiv-Rate

## FORMEL VON BAYES

$$P_{M+}(B) = \frac{P_B(M+) \cdot P(B)}{P_B(M+) \cdot P(B) + P_{\bar{B}}(M+) \cdot P(\bar{B})}$$



# Bayesianische Standardaufgabe

## Wahrscheinlichkeiten vs. absolute Häufigkeiten

### Wahrscheinlichkeitsvariante (Eddy, 1982)

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt **1 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **80 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **9,6 %**.

**Frage:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, wenn sie dort ein positives Mammogramm erhält?

**Antwort:** knapp **8 %**

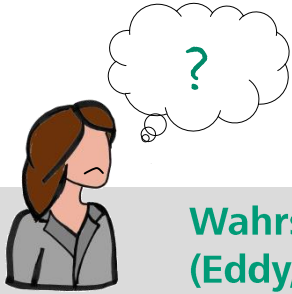
Prävalenz  $P(B)$

Sensitivität  $P_B(M+)$

Falsch-Positiv-Rate  $P_{\bar{B}}(M+)$

# Bayesianische Standardaufgabe

## Wahrscheinlichkeiten vs. absolute Häufigkeiten



### Wahrscheinlichkeitsvariante (Eddy, 1982)

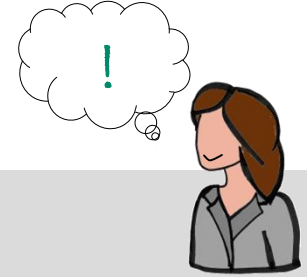
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, beträgt **1 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **80 %**.

Wenn eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Mammogramm erhält **9,6 %**.

**Frage:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die zu einer Routineuntersuchung geht, Brustkrebs hat, wenn sie dort ein positives Mammogramm erhält?

**Antwort:** knapp **8 %**



### Häufigkeitsvariante (Gigerenzer & Hoffrage, 1995)

**100 von 10.000** Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs.

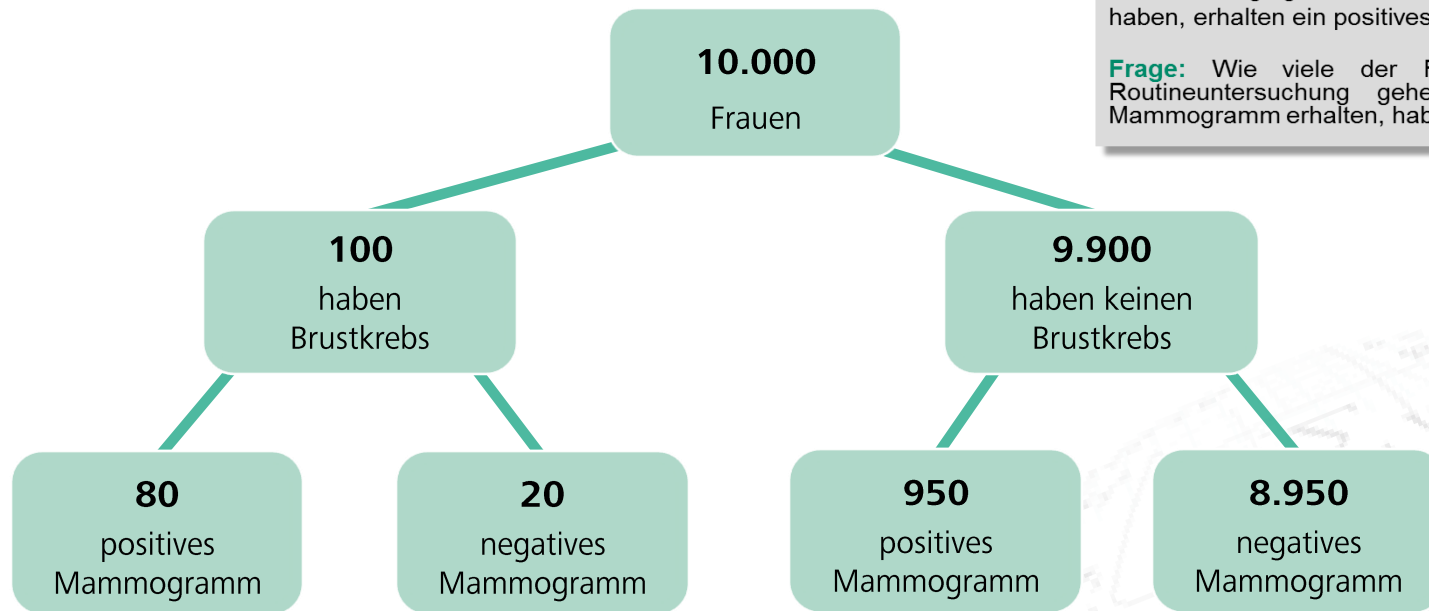
**80** von **100** Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten ein positives Mammogramm.

**950** von **9.900** Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten ein positives Mammogramm.

**Frage:** Wie viele der Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und ein positives Mammogramm erhalten, haben Brustkrebs?

**Antwort:** **80** von **1.030**

## Häufigkeitsbaum



### Häufigkeitsvariante (Gigerenzer & Hoffrage, 1995)

**100 von 10.000** Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen, haben Brustkrebs.

**80 von 100** Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die Brustkrebs haben, erhalten ein positives Mammogramm.

**950 von 9.900** Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und die keinen Brustkrebs haben, erhalten ein positives Mammogramm.

**Frage:** Wie viele der Frauen, die zu einer Routineuntersuchung gehen und ein positives Mammogramm erhalten, haben Brustkrebs?

**Frage:** Wie viele der Frauen mit positivem Mammogramm haben tatsächlich Brustkrebs?

**Antwort:** 80 von 1.030

# Visualisierung Bayesianischer Aufgaben in der Schule

Visualisierungen

Wahrscheinlichkeiten

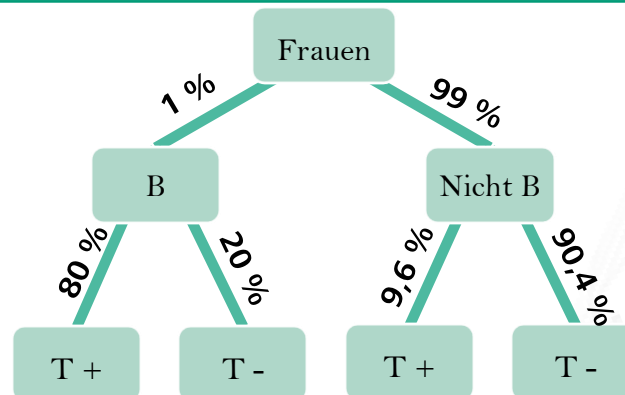
Absolute Häufigkeiten

Vierfelder-  
tafel

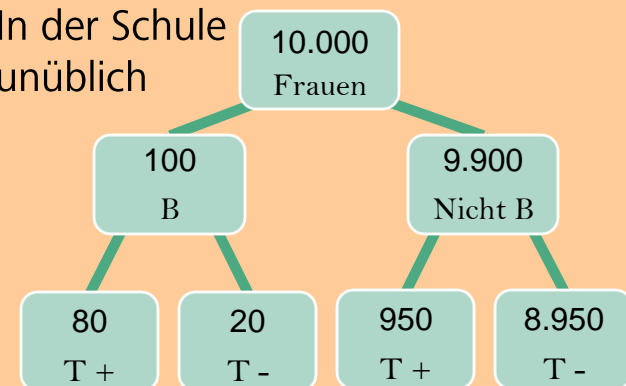
	T +	T -	
B	0,8 %	0,2 %	1 %
Nicht B	9,5 %	89,5 %	99 %
	10,3 %	89,7 %	100 %

Frauen	T +	T -	
B	80	20	100
Nicht B	950	8.950	9.900
	1.030	8.970	10.000

Baum-  
diagramm



In der Schule  
unüblich





## Studie mit Schülerinnen und Schülern ■ Untersuchte Versionen

Untersuchung von **Schülerinnen und Schülern der 11. Klasse Gymnasium;**  
**N=259** (12 Klassen aus 2 verschiedenen Gymnasien)

- 2x3x2-Design (Format x Visualisierung x Kontext)
- Schüler bearbeiten je **2 Aufgaben** zu 2 verschiedenen Kontexten (Früherkennung, Persönlichkeitseigenschaft)

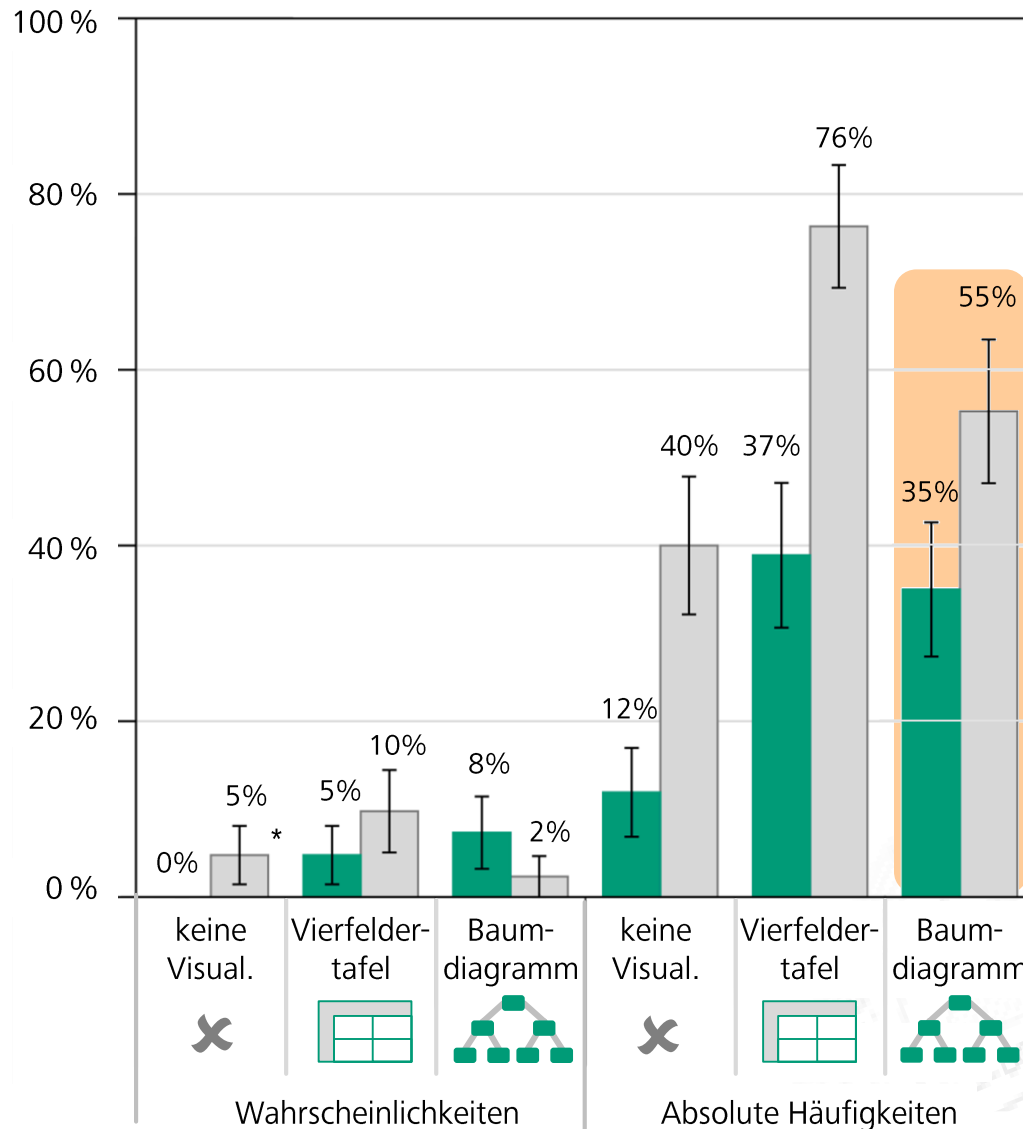
Nr.	Format der Informationen	Visualisierung	Kontext: Früherkennung
1	Wahrscheinlichkeit	keine	
2		Vierfeldertafel	
3		Baumdiagramm	
4	Häufigkeit	keine	
5		Vierfeldertafel	
6		Baumdiagramm	

Nr.	Format der Informationen	Visualisierung	Kontext: Persönlichkeitseig.
7	Wahrscheinlichkeit	keine	
8		Vierfeldertafel	
9		Baumdiagramm	
10	Häufigkeit	keine	
11		Vierfeldertafel	
12		Baumdiagramm	

# Ergebnisse ■ Wirksamkeit dieser vier Visualisierungen

Binder, Krauss & Bruckmaier (2015)

Anteil korrekter Antworten



**Studienteilnehmer:**

259 Schüler (Gymnasium, 11. Klasse)

■ Früherkennung von Brustkrebs

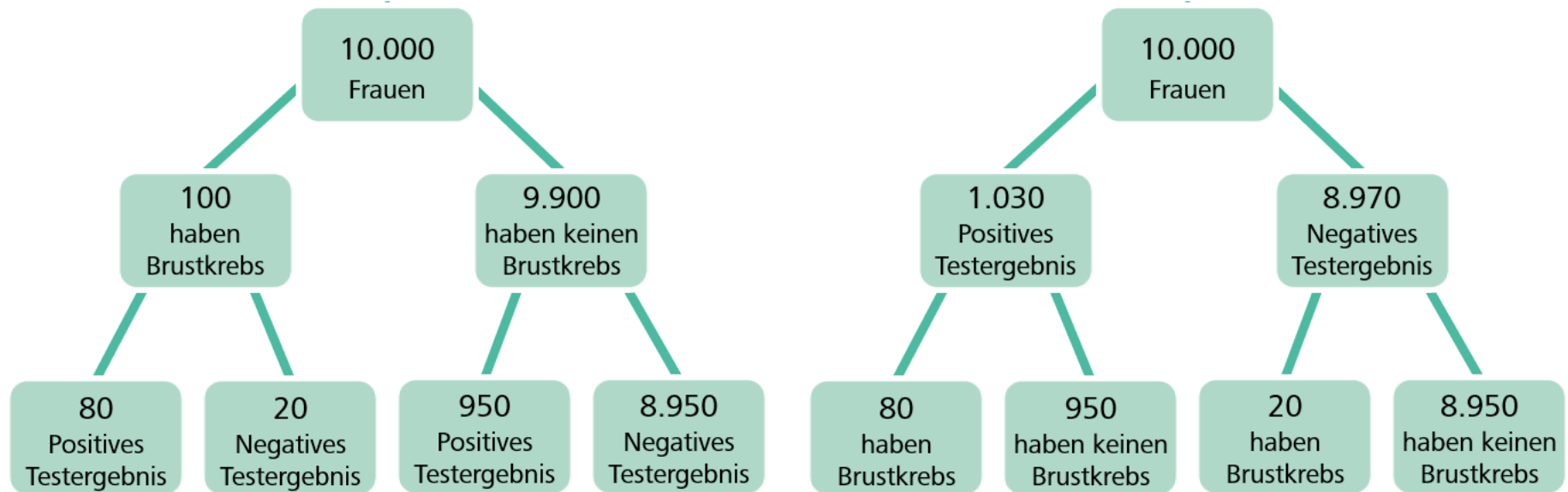
■ Persönlichkeitseigenschaft

\* Fehlerbalken zeigen den einfachen Standardfehler

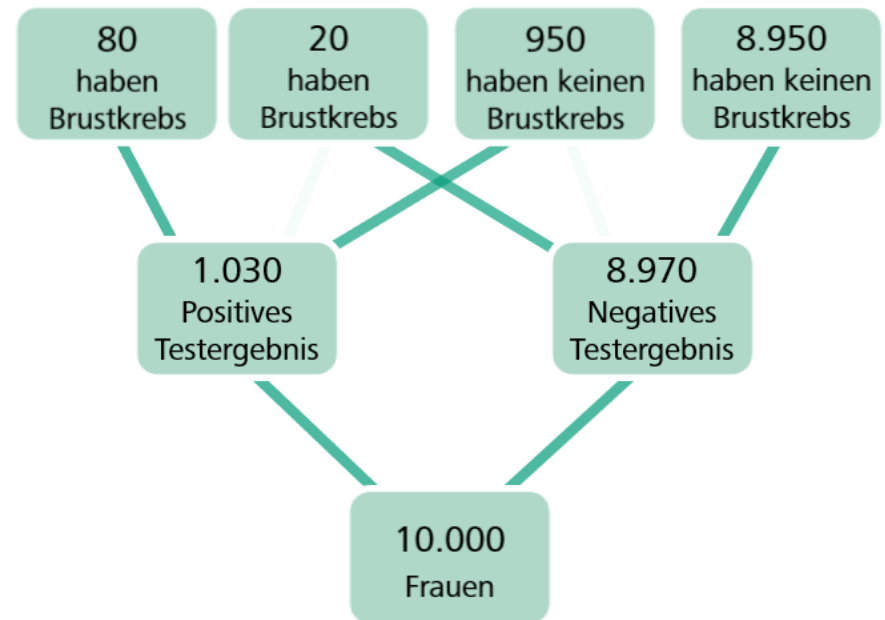
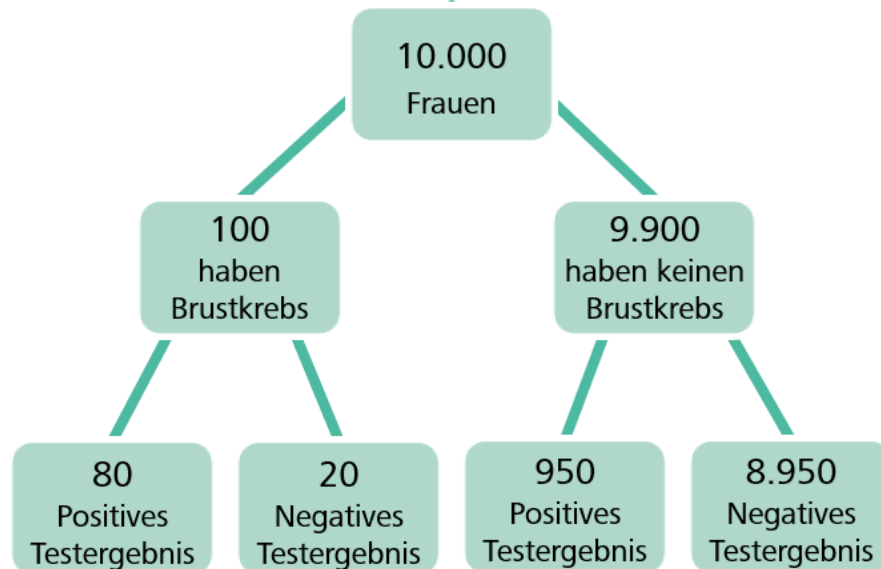
Visualisierung

Format der Aufgabe

# Vom Häufigkeitsbaum zum Doppelbaum



# Vom Häufigkeitsbaum zum Doppelbaum

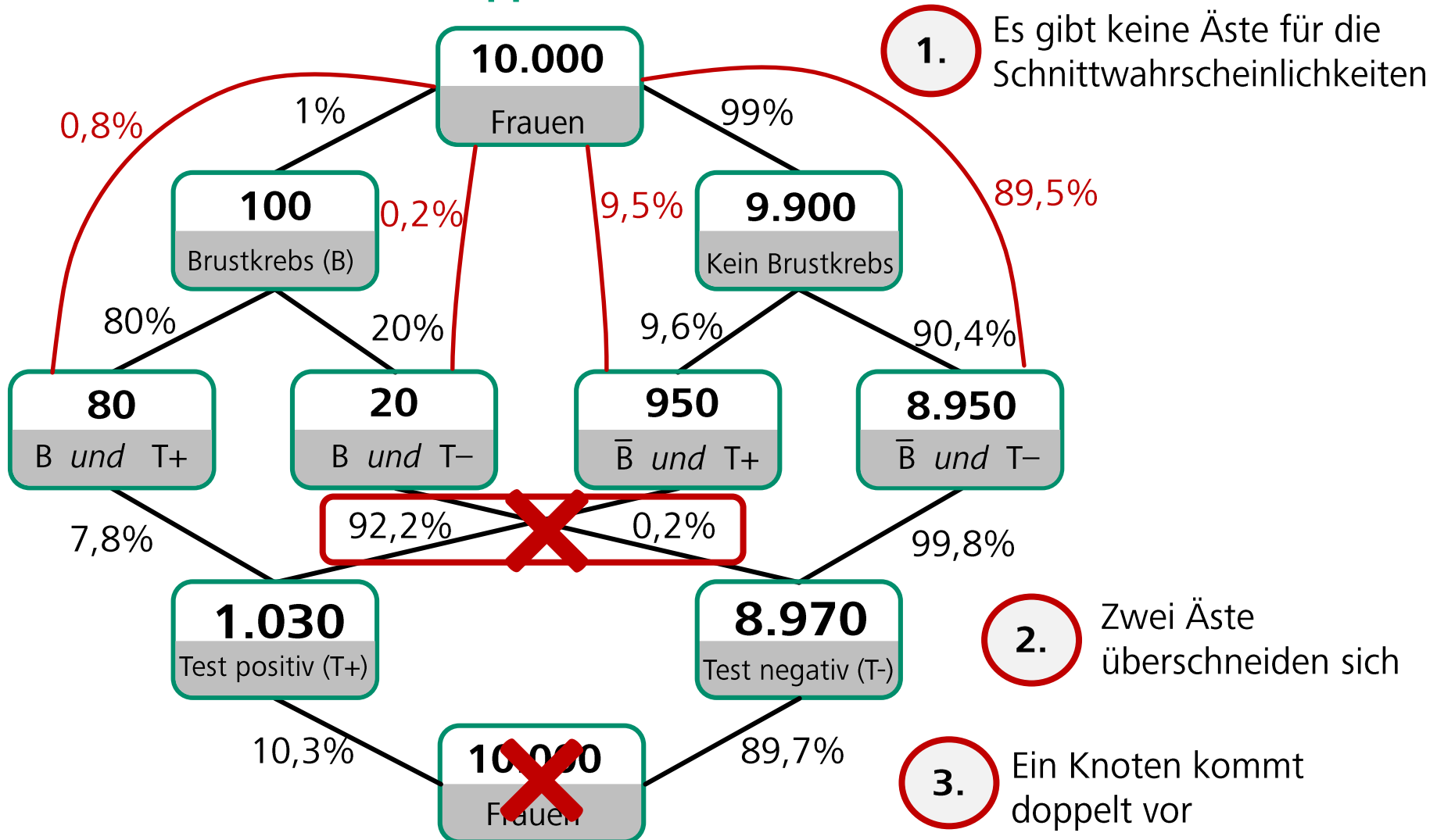


# Vom Häufigkeitsbaum zum Doppelbaum

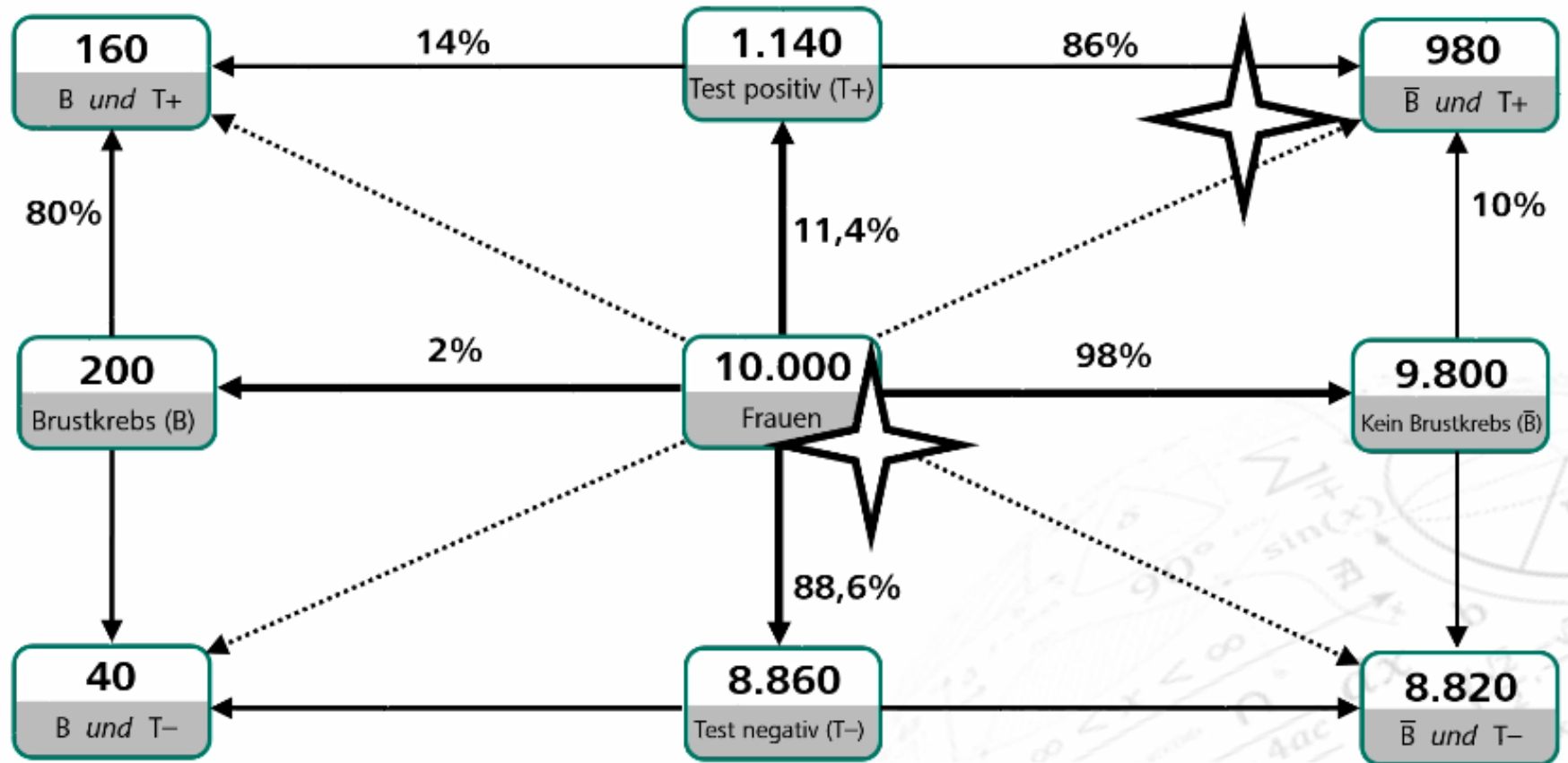
Universität Regensburg



## Drei Nachteile des Doppelbaumes



12



00:23,18



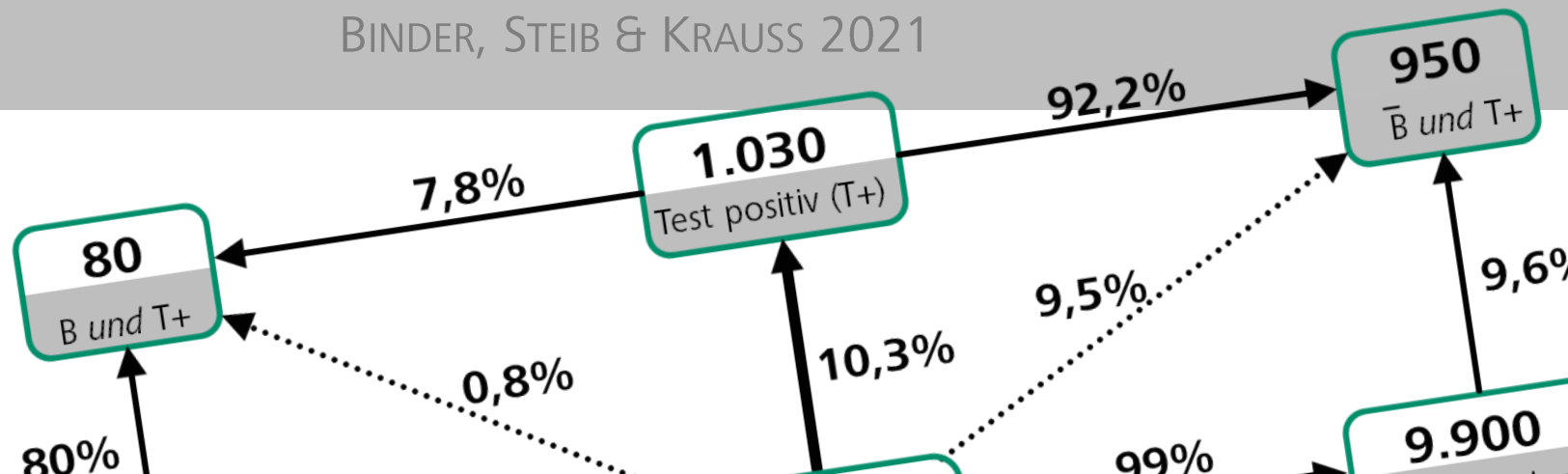


# 6 Schritte zur Erstellung eines Häufigkeitsnetzes

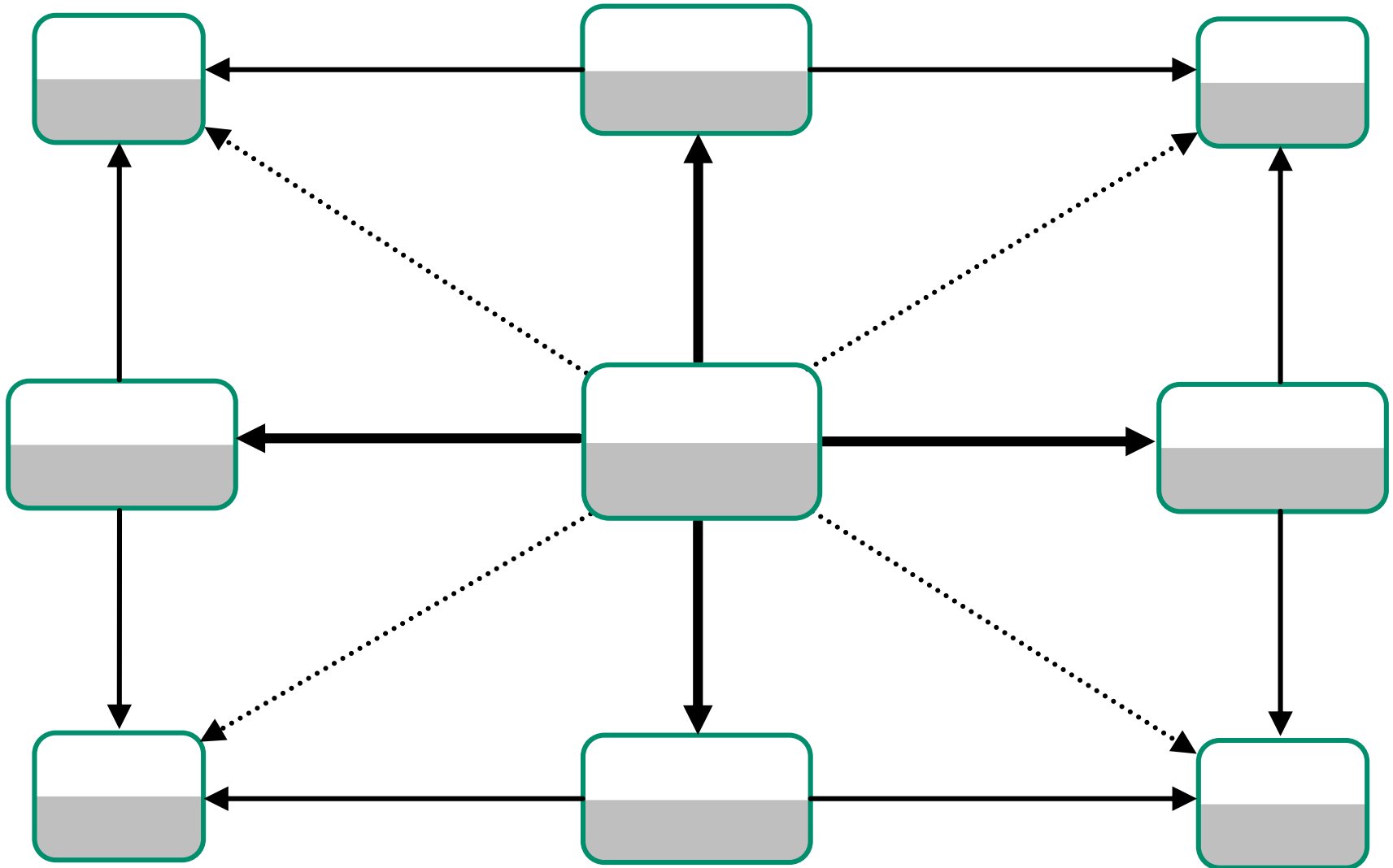
am Beispiel Mammographie

BINDER, KRAUSS & STEIB, 2020

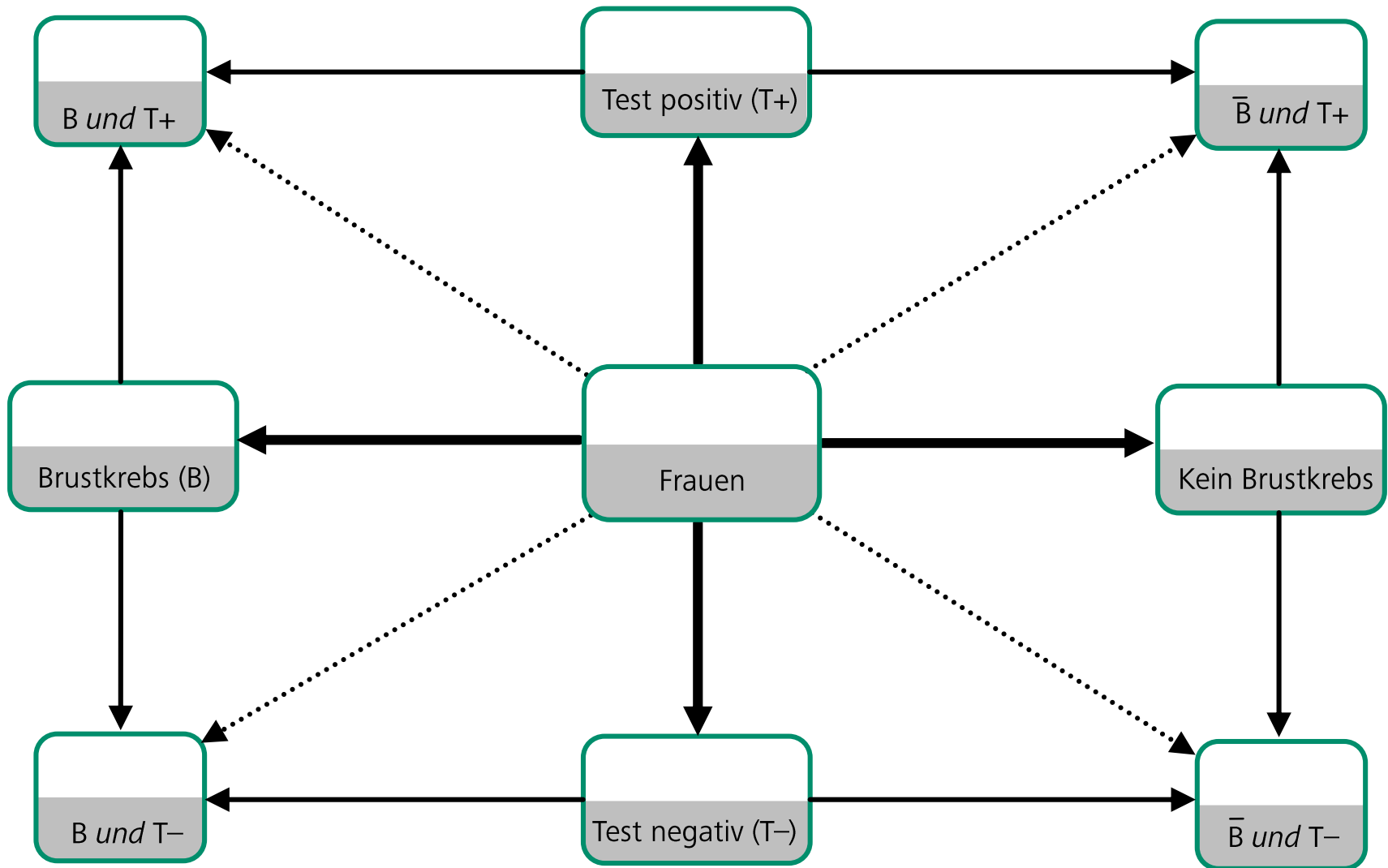
BINDER, STEIB & KRAUSS 2021



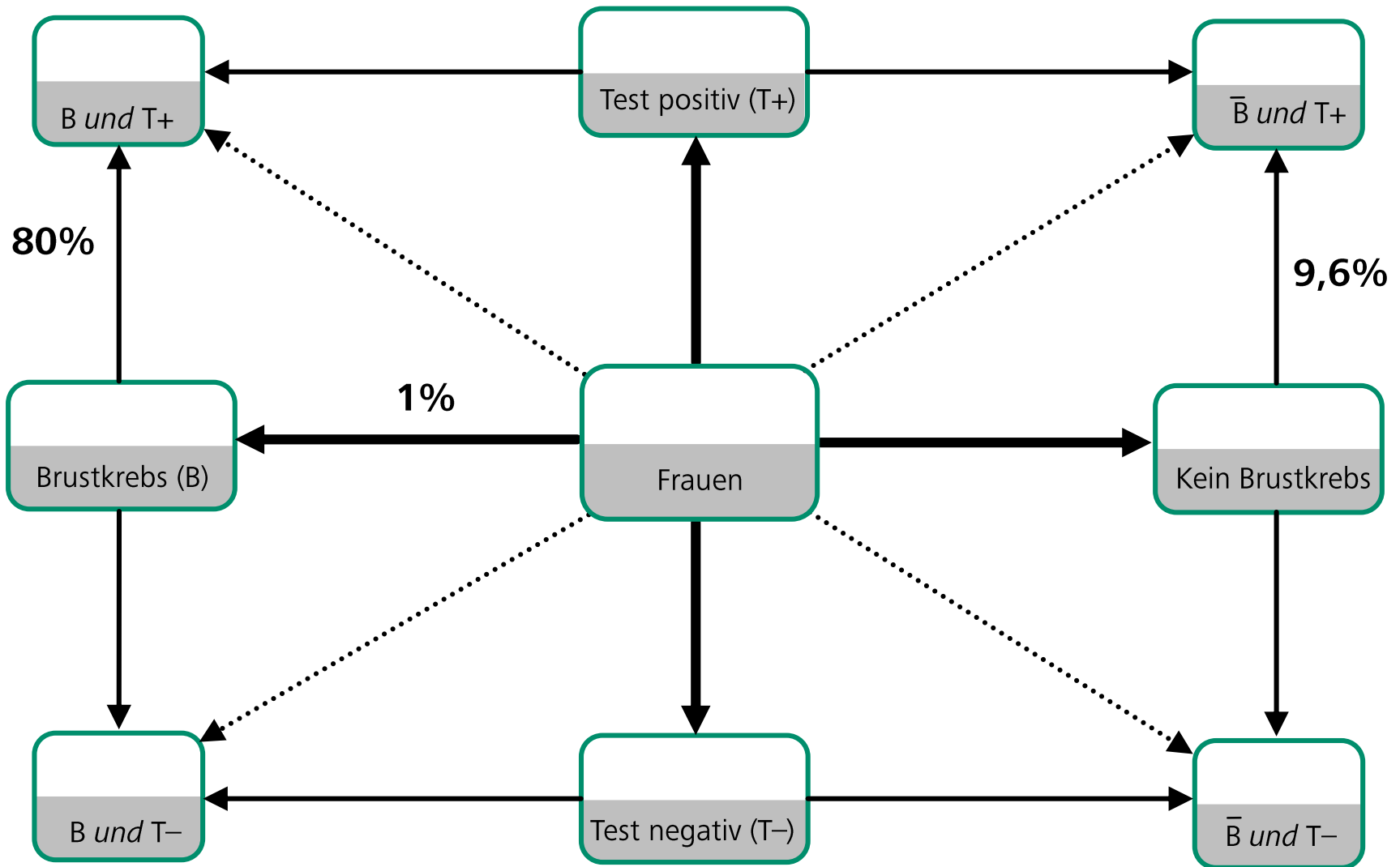
## SCHRITT 1: Zeichnen der leeren Struktur



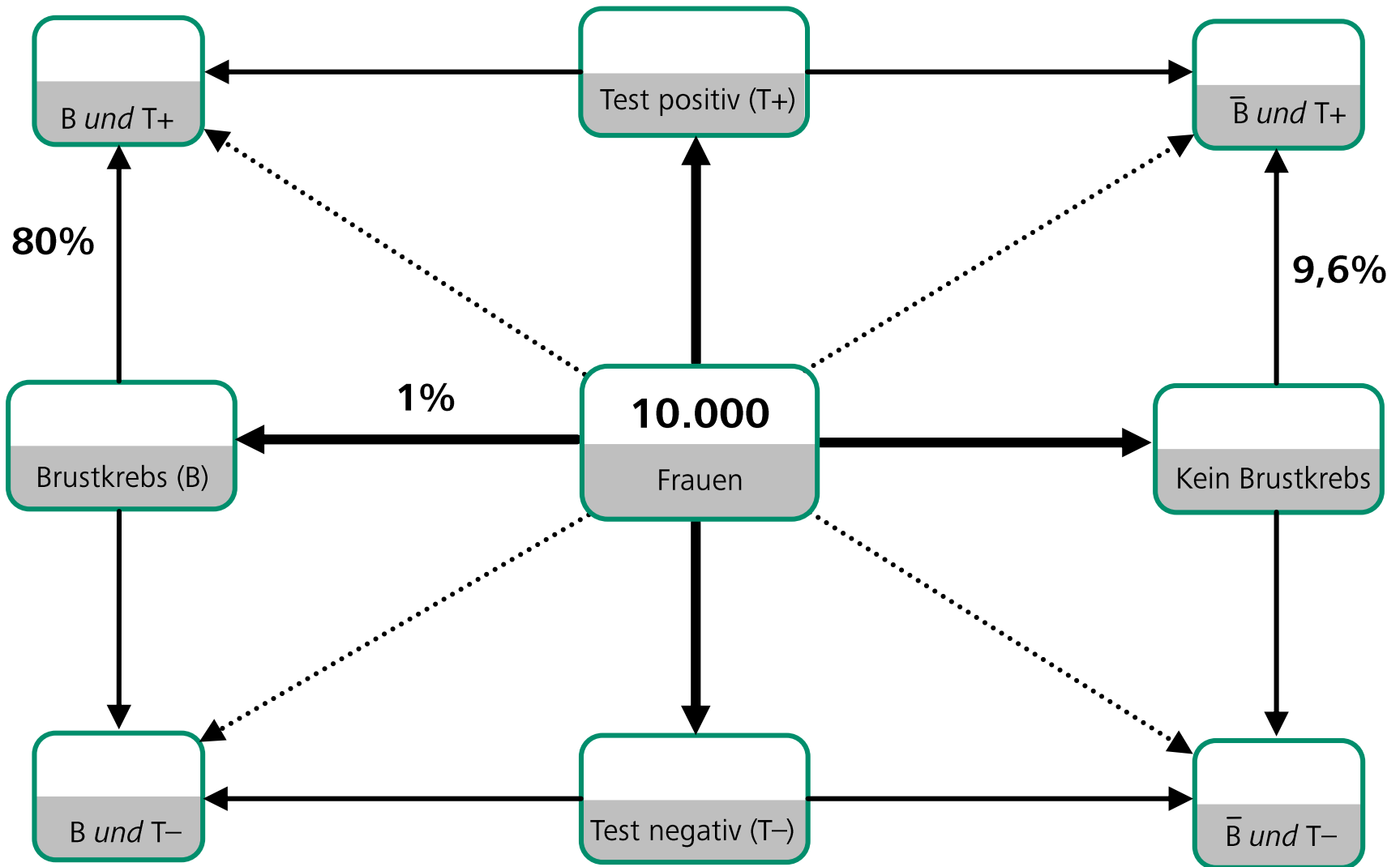
## SCHRITT 2: Beschriftung der Struktur



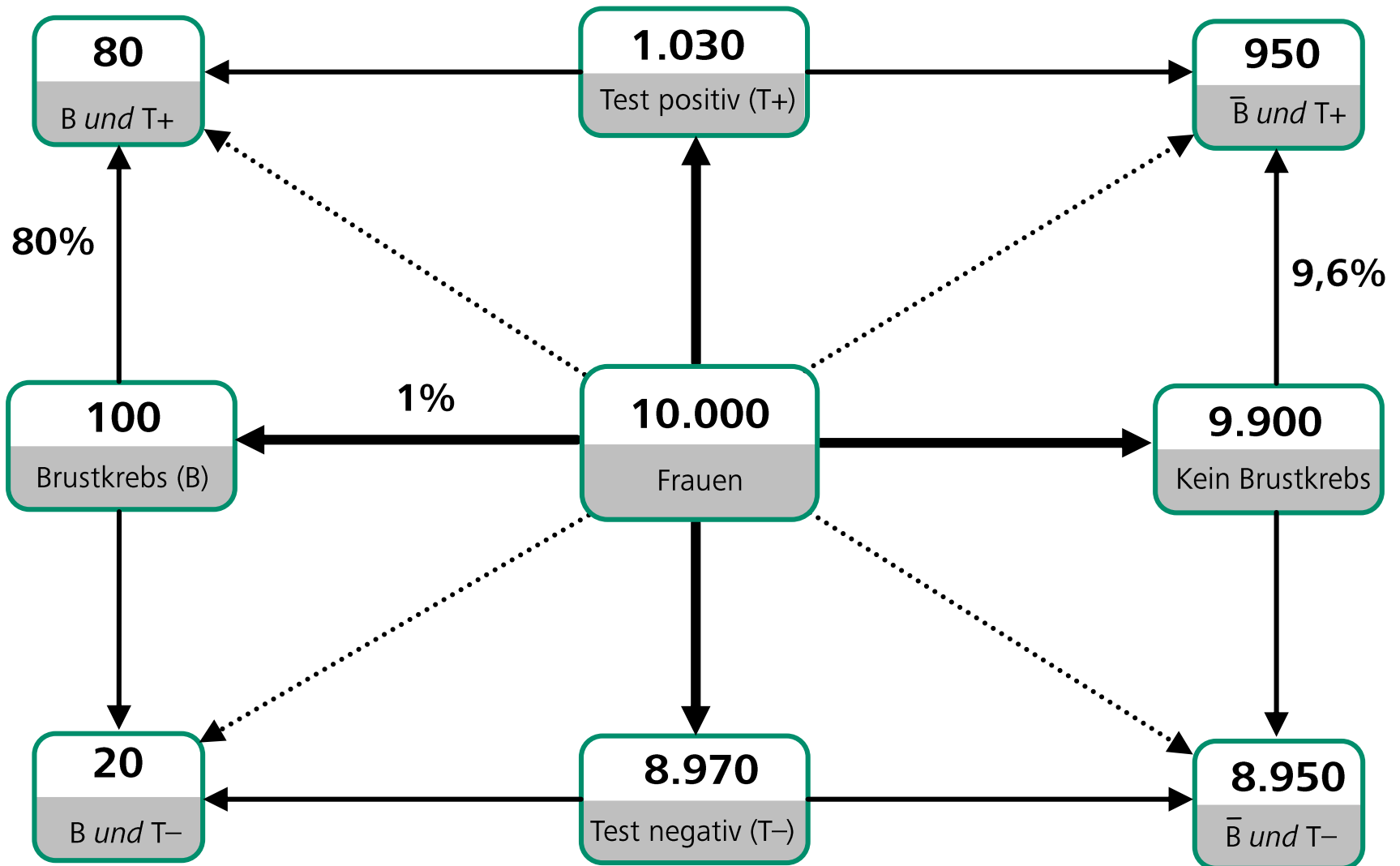
## SCHRITT 3: Eintragen der gegebenen Informationen



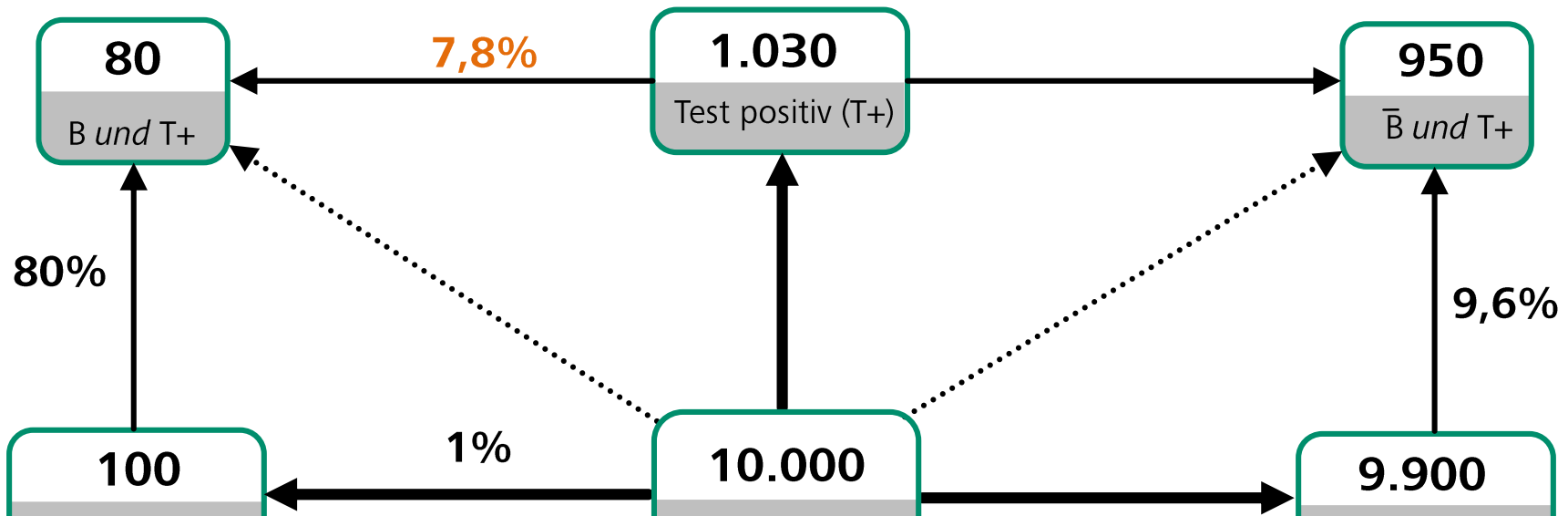
## SCHRITT 4: Ausdenken einer Stichprobe



## SCHRITT 5: Übersetzung in Häufigkeiten



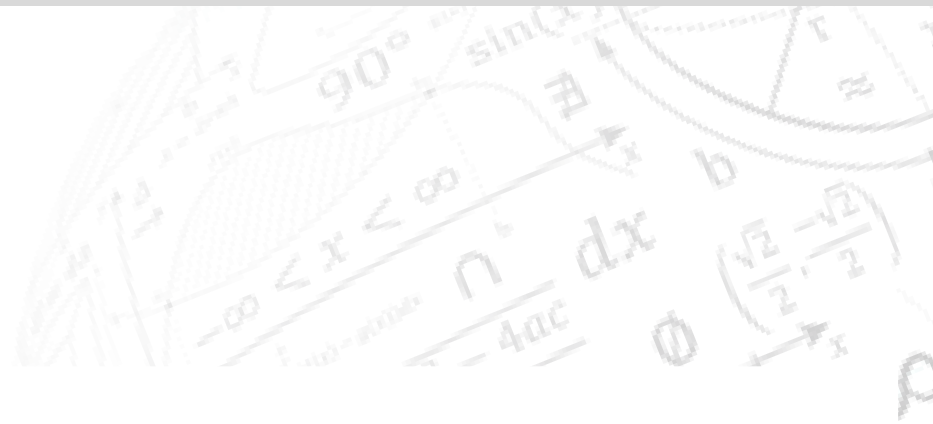
## SCHRITT 6: Ablesen der Lösung

**Antwort:**

- I: 80 von 1.030 Frauen mit positivem Test sind tatsächlich an Brustkrebs erkrankt.
- II: Der Anteil der Frauen mit Brustkrebs unter den Frauen mit positivem Testergebnis beträgt  $80/1.030$  bzw. 7,8 %.
- III: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgesuchte Frau mit positivem Test Brustkrebs hat, beträgt 7,8 %.



# Workshop-Phase II





## Workshop-Phase II

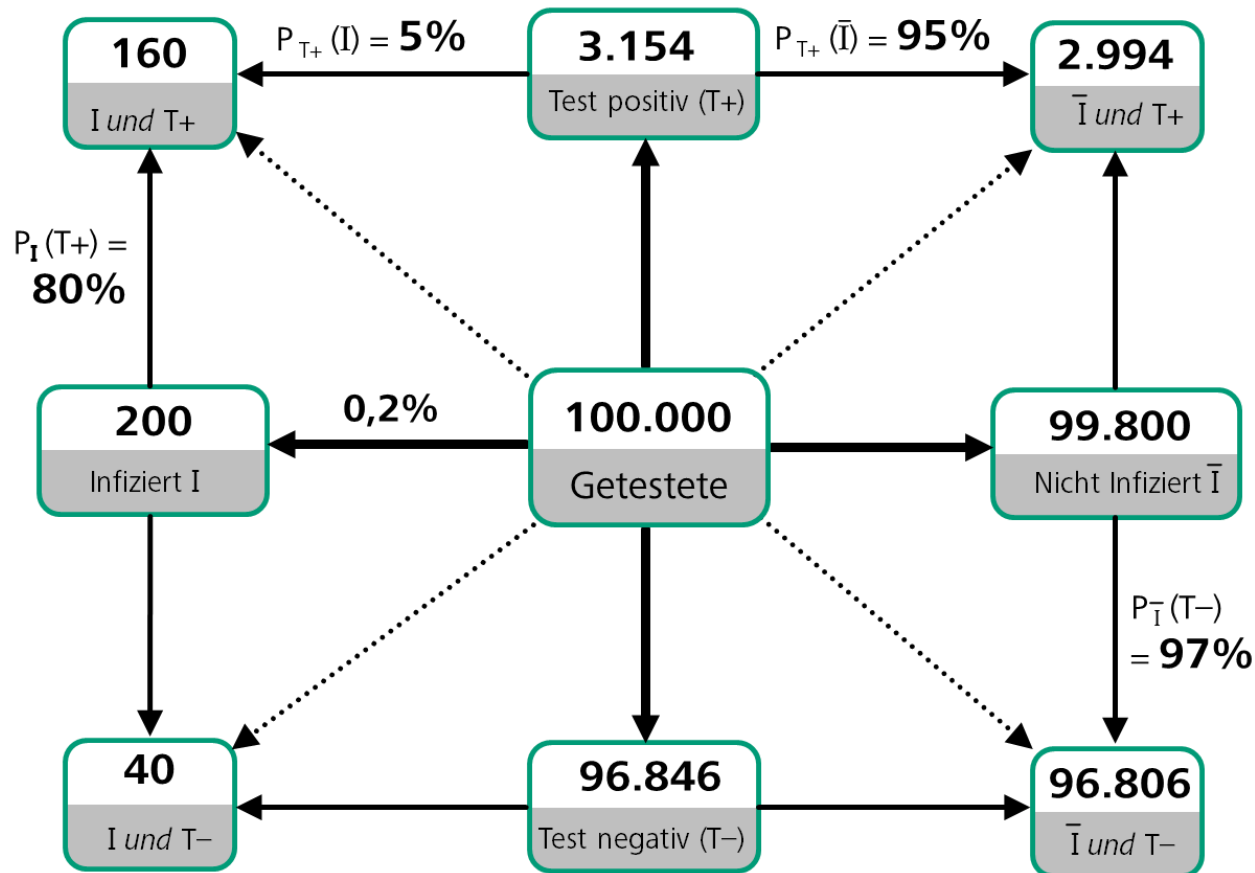
a) **Schätzen** Sie zunächst für die obige Situation die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person **nicht** mit Corona infiziert ist, wenn sie ein positives Schnelltestergebnis erhält.

Hier werden oft fälschlicherweise sehr niedrige Wahrscheinlichkeiten geschätzt, wie 10 oder 20%.



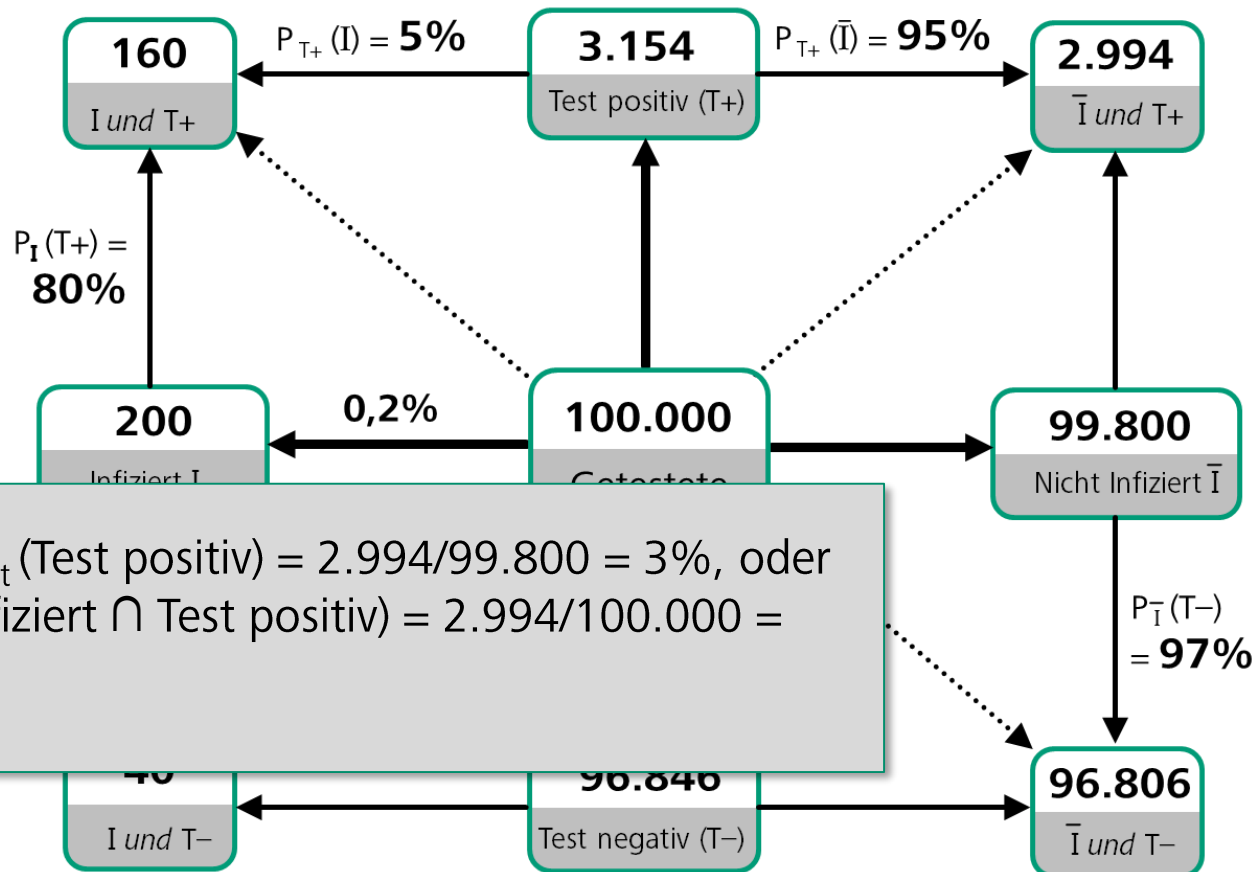
## Workshop-Phase II

b) Mögliches Häufigkeitsnetz zur Visualisierung der Corona-Schnelltest-Aufgabe:

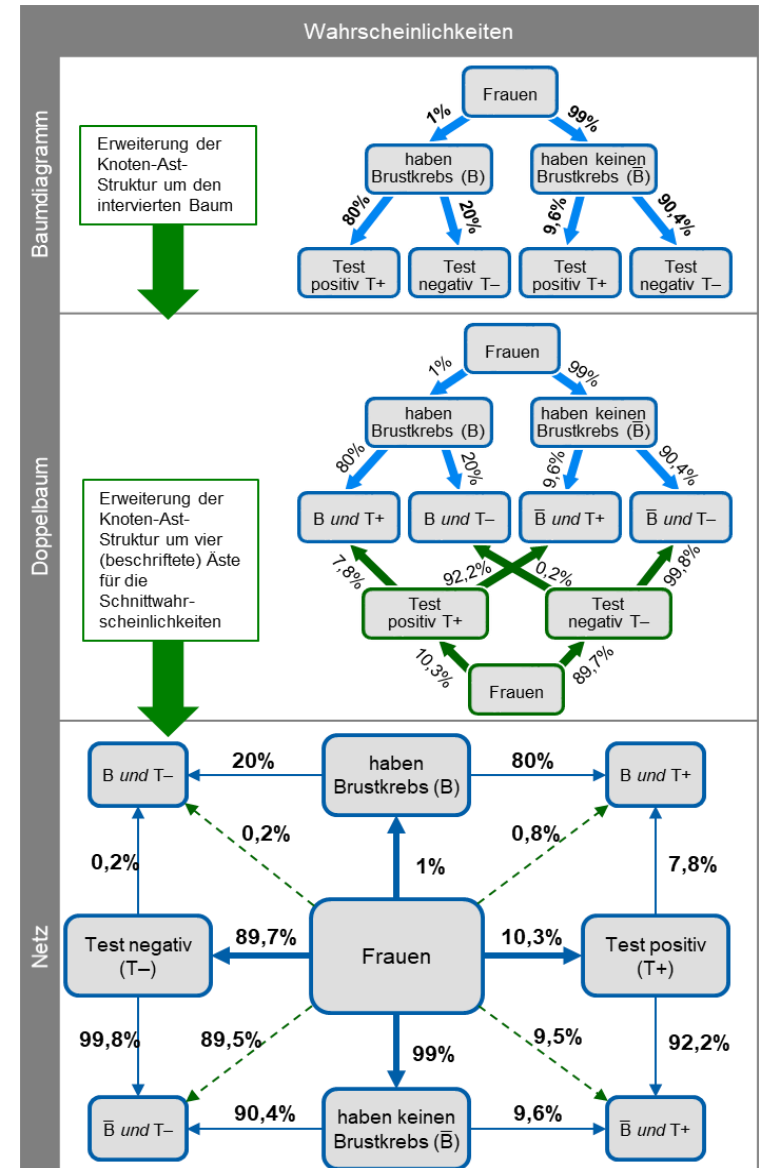
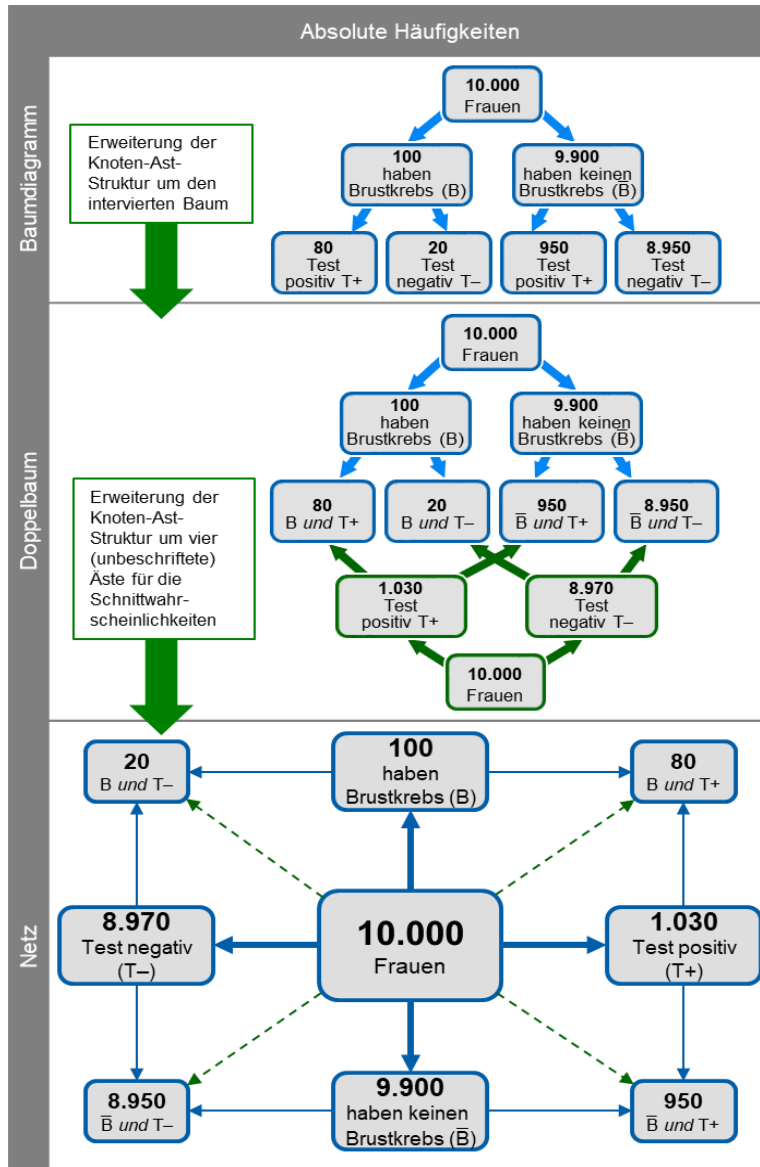


## Workshop-Phase II

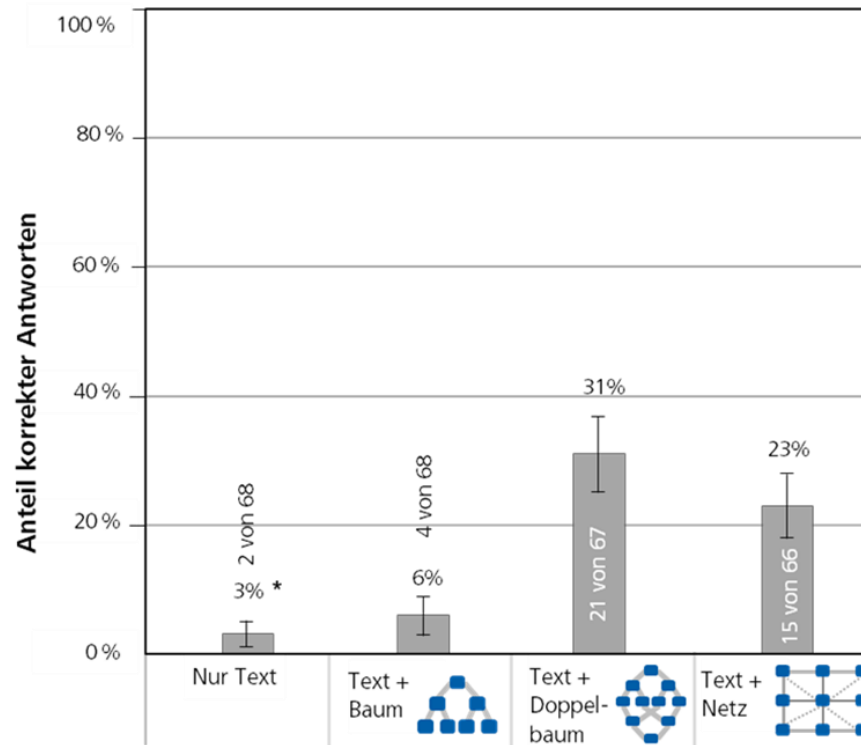
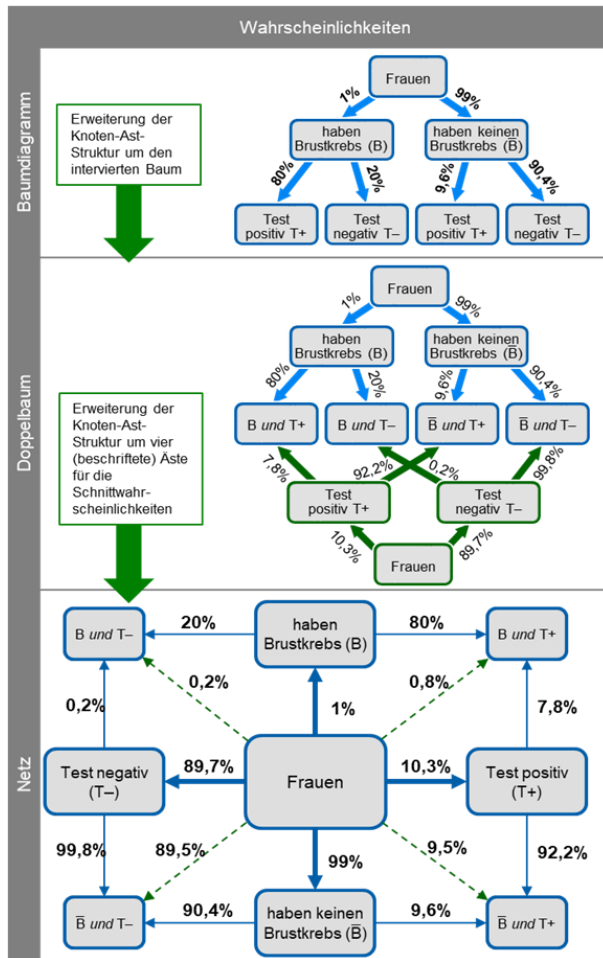
c) Typische Ablesefehler:



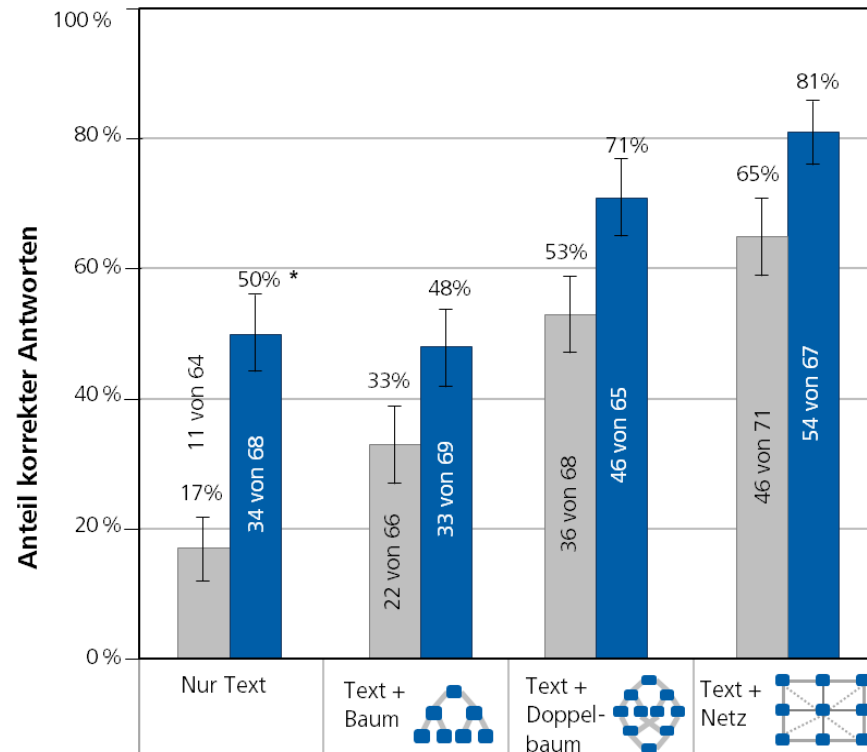
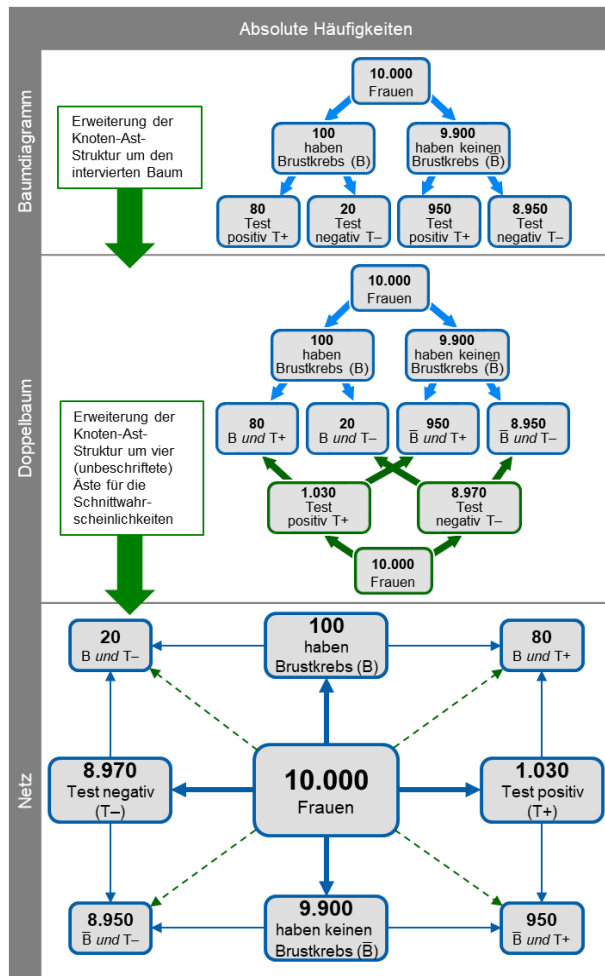
# Erweiterungen von Knoten-Ast-Strukturen



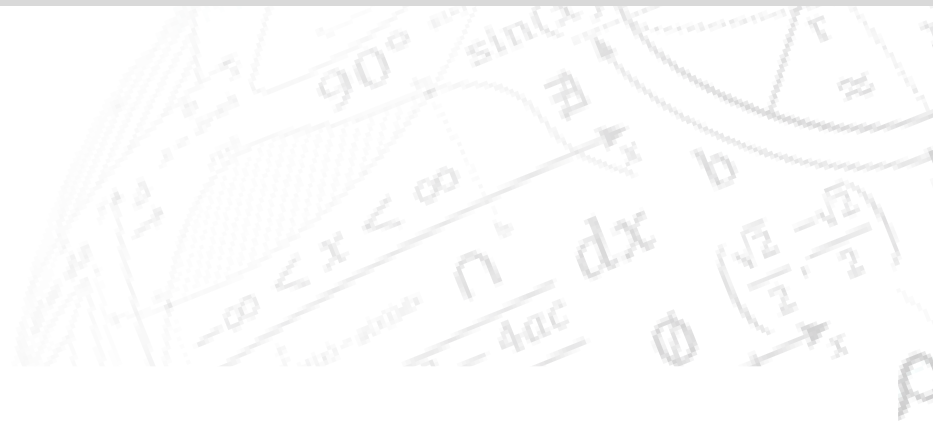
# Studie ■ Ergebnisse zu Erweiterungen von Knoten-Ast-Strukturen: bedingte Wahrscheinlichkeiten



# Studie ■ Ergebnisse zu Erweiterungen von Knoten-Ast-Strukturen: bedingte Wahrscheinlichkeiten

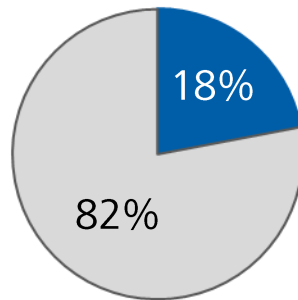


# Warum sind absolute Häufigkeiten so wichtig?

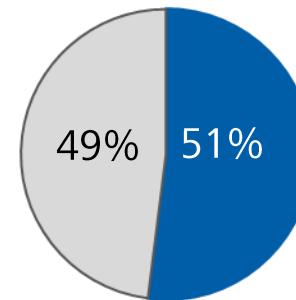


## Studienergebnisse ■ Weber, Binder & Krauss (2018)

**Präsentationsformat:**  
Wahrscheinlichkeiten



**Präsentationsformat:**  
Natürliche Häufigkeiten



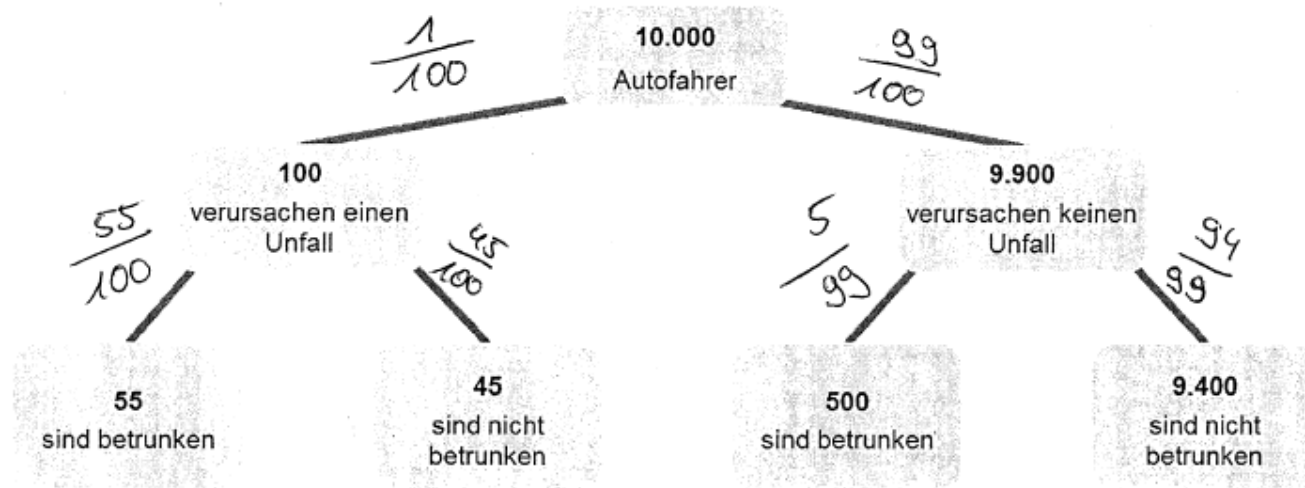
**Rechenformat:**



- Die Mehrheit – insgesamt 65% – der Aufgaben wird mit Wahrscheinlichkeiten bearbeitet.
- Selbst wenn die Aufgabe im Häufigkeitsformat gestellt wird, rechnet fast die Hälfte der Teilnehmenden die Zahlenangaben in Wahrscheinlichkeiten um!



## Studienergebnisse ■ Weber, Binder & Krauss (2018)



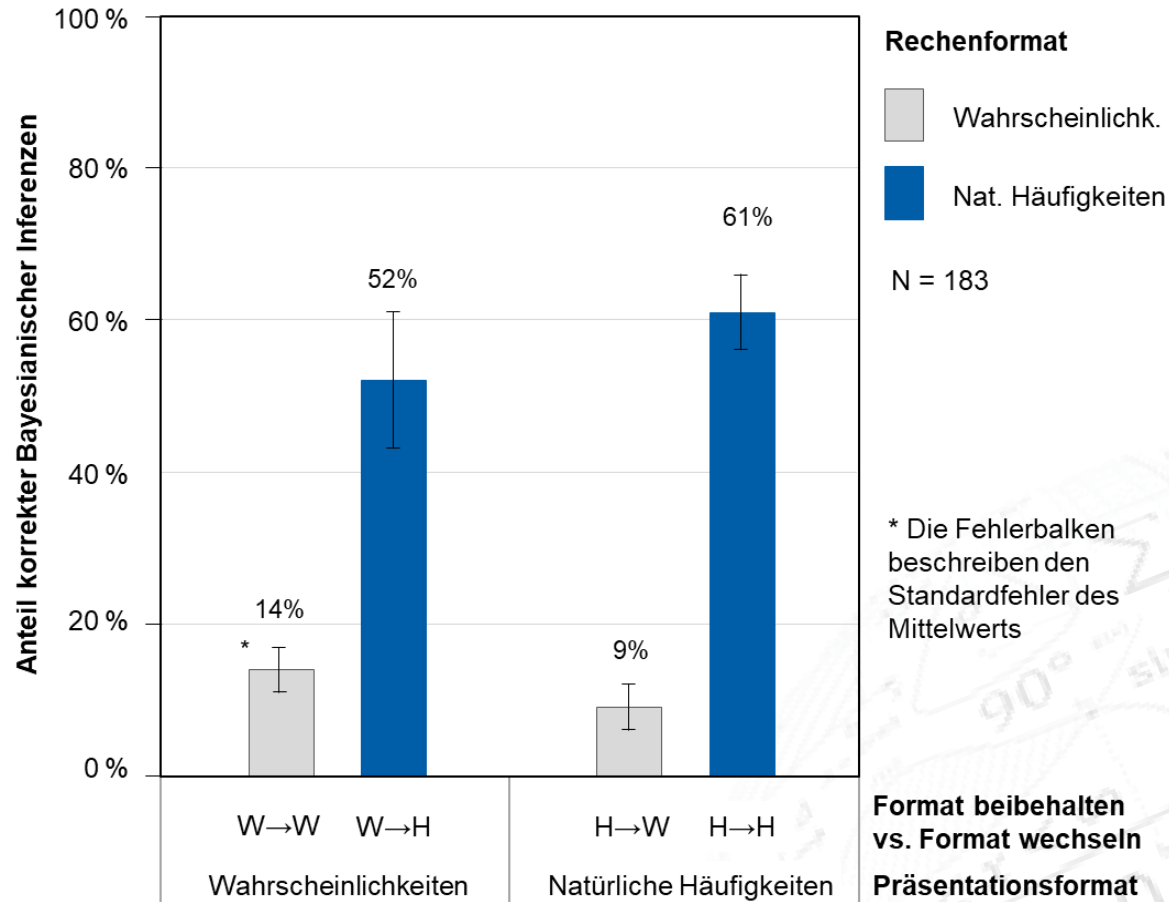
Schreiben Sie Ihren Lösungsweg auf!

$$\frac{1 \cdot 55}{100 \cdot 100} = \frac{55}{10000} = \frac{11}{2000}$$

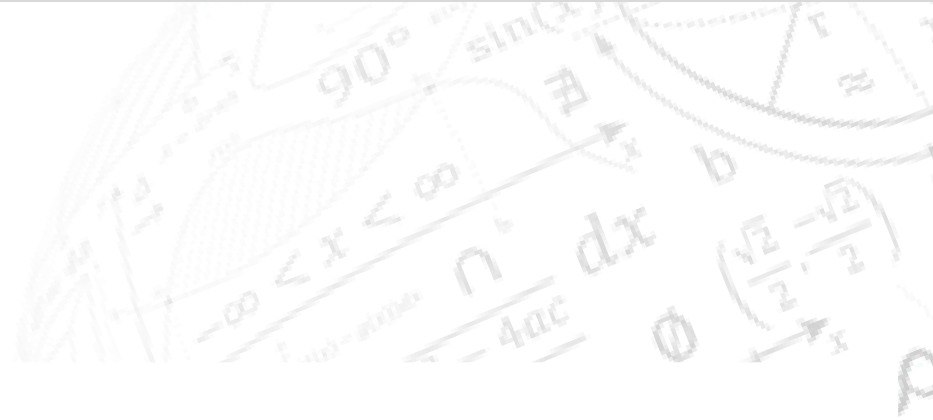
Antwort:  $\frac{11}{2000}$

➤ Viele dieser „Zurückrechner“ können dann die Aufgabe nicht mehr lösen!

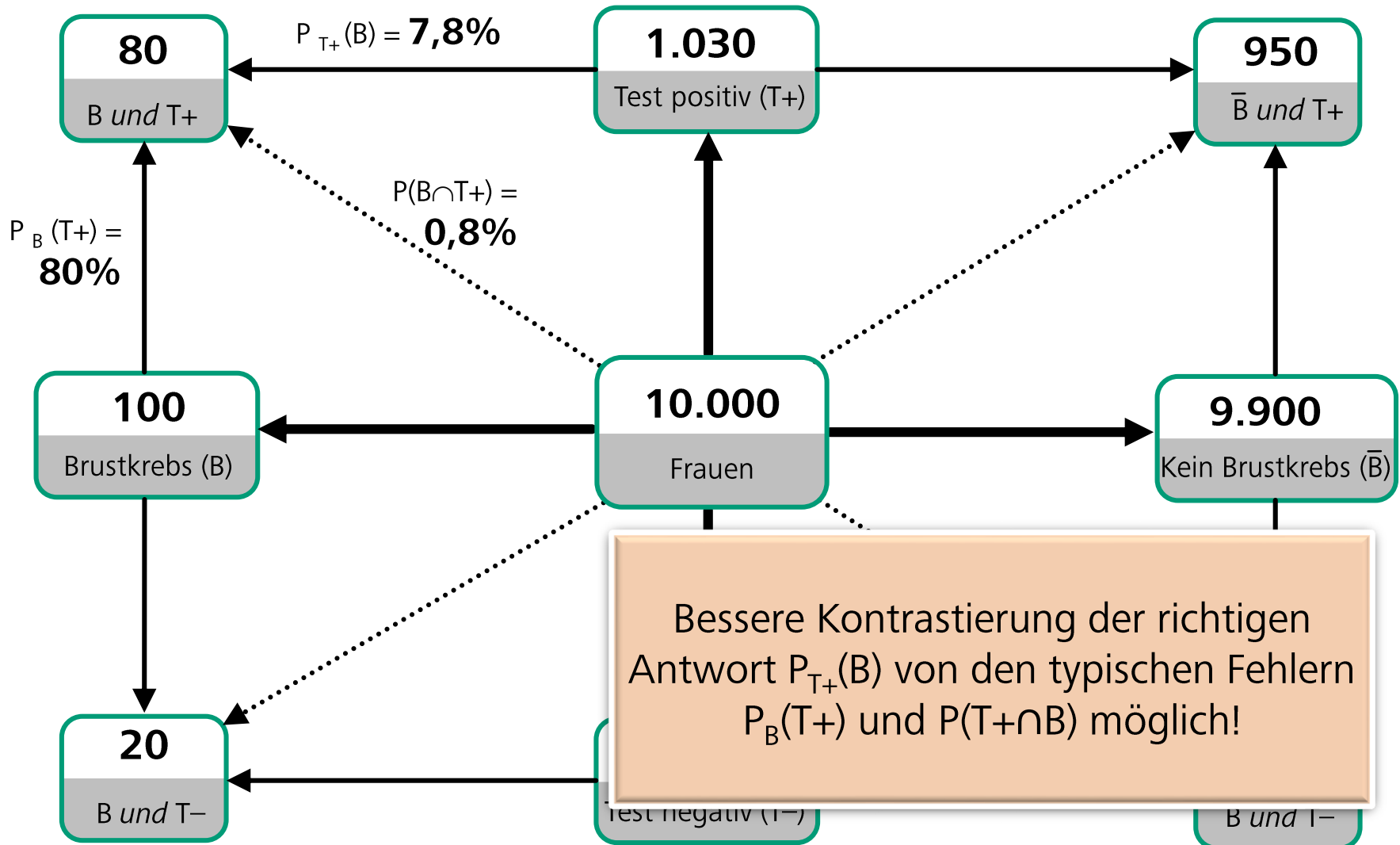
## Studienergebnisse ■ Weber, Binder & Krauss (2018)



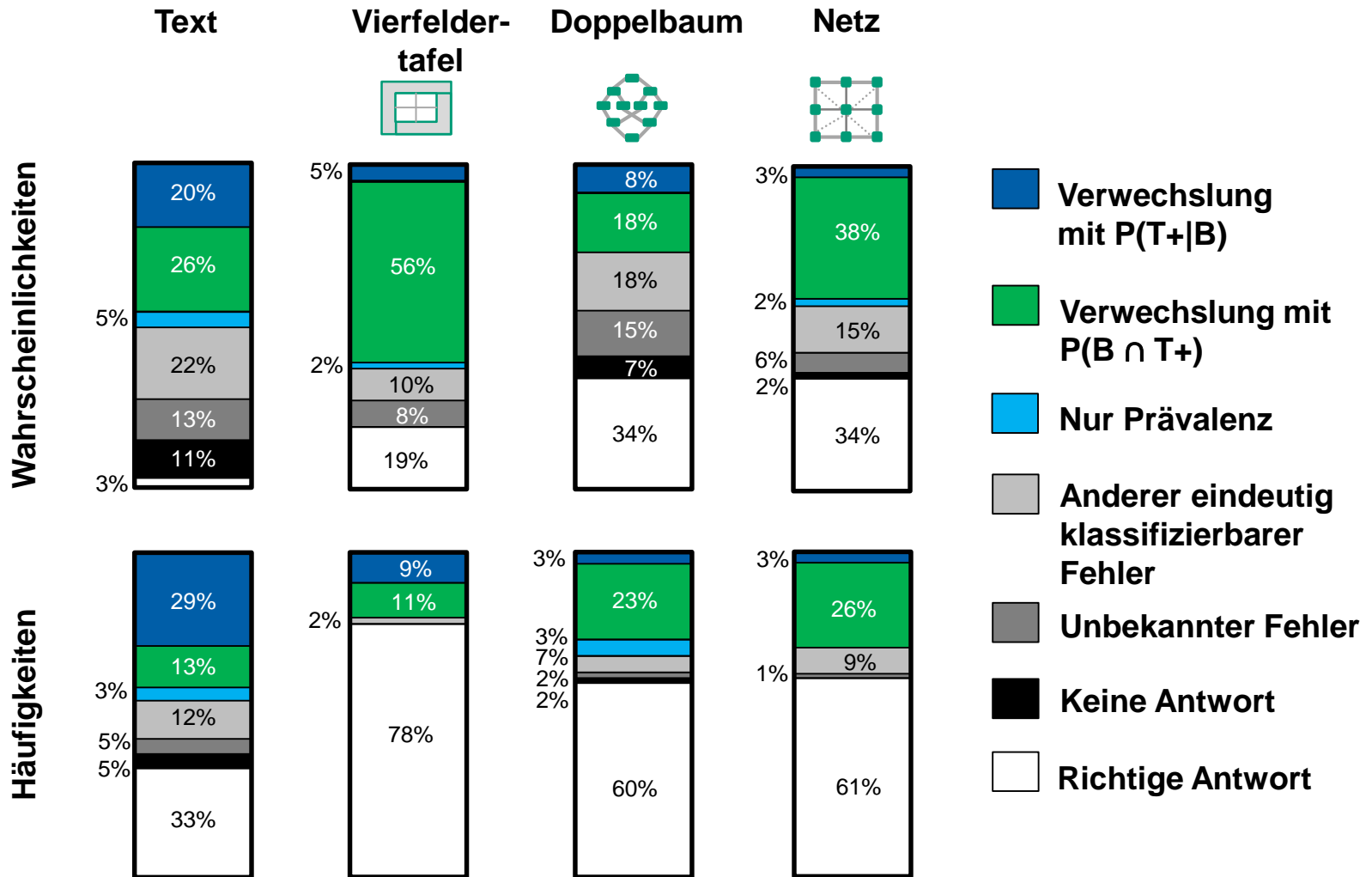
# Typische Fehler beim Lösen dieses Aufgabentyps



# Das Häufigkeitsnetz



# Studie ■ Ergebnisse zu typischen Fehlern: bedingte Wahrscheinlichkeiten



## Essentielles Fehlerwissen für Lehrkräfte – aber auch wichtiges Abgrenzungswissen für Schülerinnen und Schüler

A classroom scene with a green chalkboard. The chalkboard displays a contingency table and a probability formula. The table is as follows:

	B	nB	
T+	1,6%	9,8%	11,4%
T-	0,4%	88,2%	88,6%
	2%	98%	100%

Below the table, the formula  $P(B|T+) =$  is written, followed by a blank line.

A thought bubble from a student points out a discrepancy: "Aber das steht doch schon da!? 💣💣💣💣 1,6%".

## Auch Donald Trump unterlag schon einmal einer der typischen Wahrscheinlichkeits-Verwechslungen:



### Donald Trump am 15. Oktober 2020:

„85% der Leute, die eine Maske tragen, stecken sich mit COVID an.“

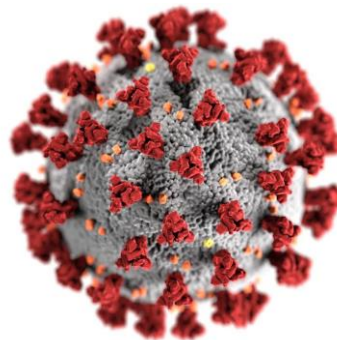
$P_{\text{Maske}}(\text{COVID})$

$\neq$

### Faktencheck am 15. Oktober 2020:

„Eine kleine Studie zeigt: 85% der Leute, die an COVID erkrankt sind, hatten zuvor regelmäßig Maske getragen.“

$P_{\text{COVID}}(\text{Maske})$





# Pause



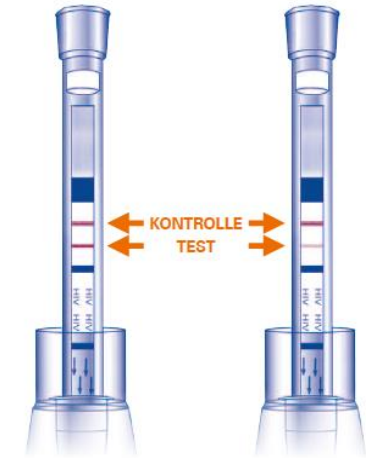


# Abschnitt 3

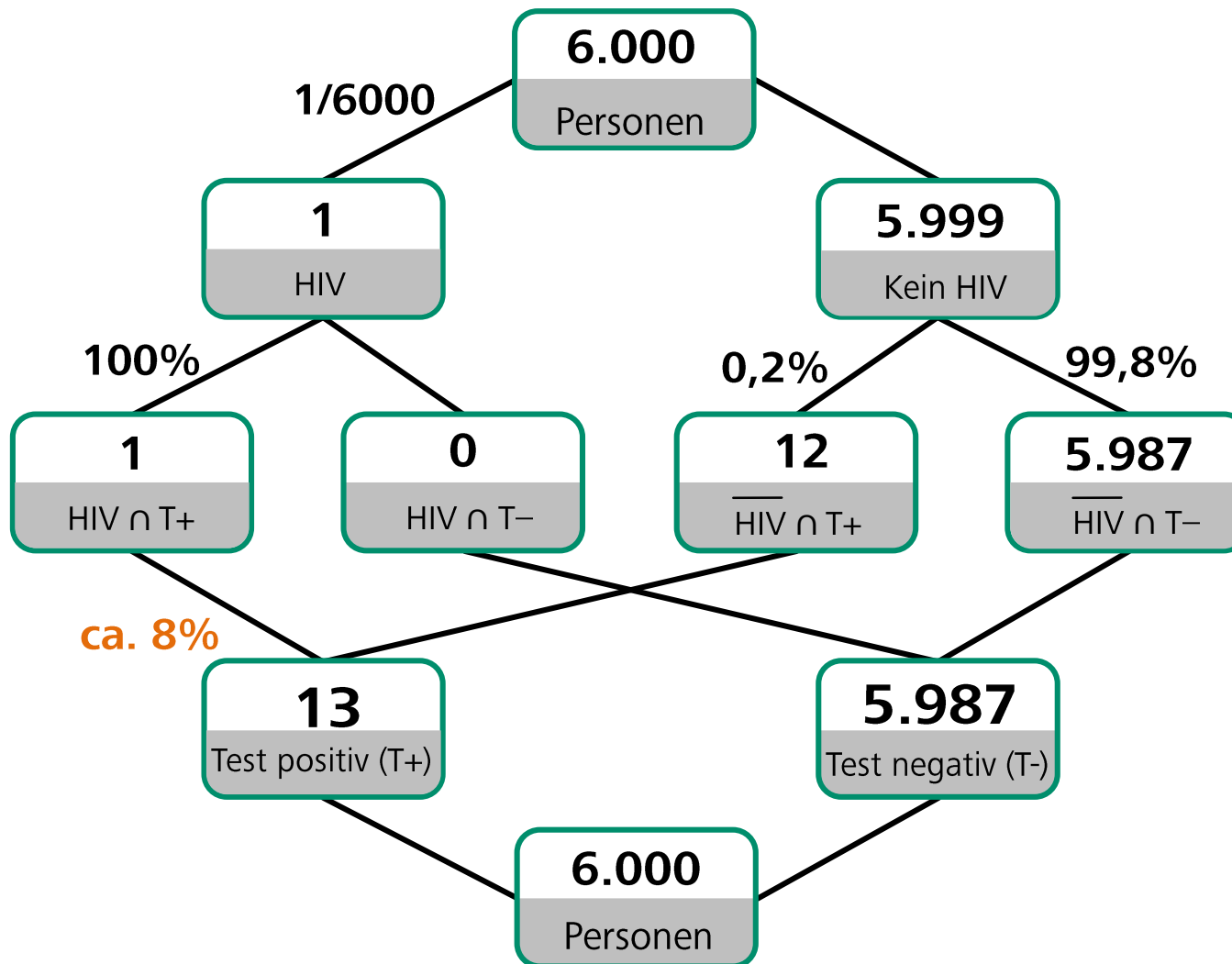
## Förderung eines Kovariationsverständnisses



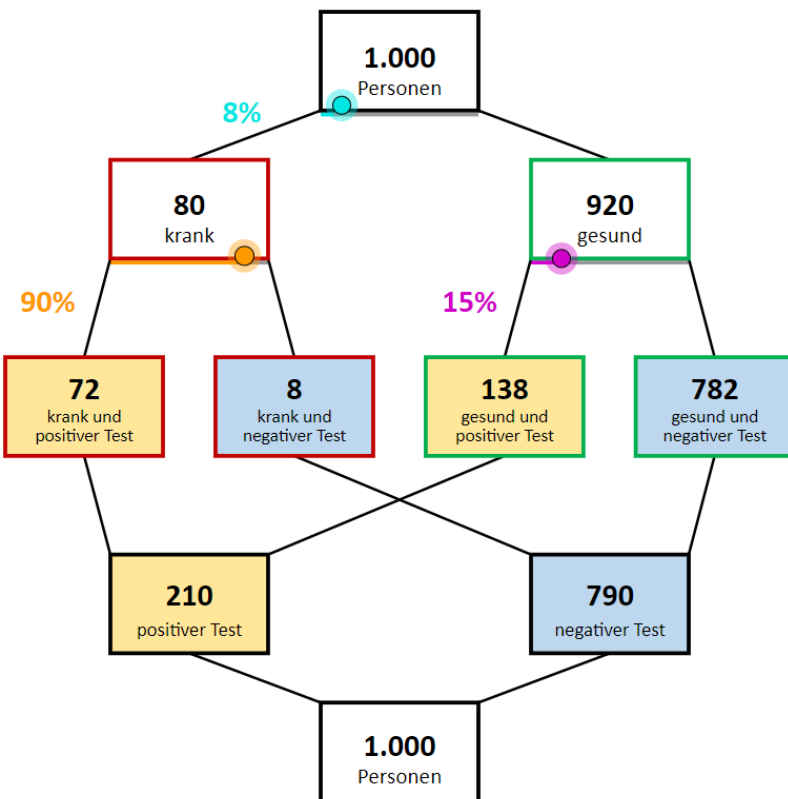
# HIV-Selbsttests



IHR SELBSTTEST HAT REAGIERT  
SIE SIND WAHRSCHEINLICH  
HIV-POSITIV



Doppelbaum zu einem allgemeinen medizinischen Kontext:



Positiv prädiktiver Wert:

$$\frac{72 \text{ krank und positiver Test}}{210 \text{ positiver Test}} = \frac{72 \text{ krank und positiver Test} + 138 \text{ gesund und positiver Test}}{72 \text{ krank und positiver Test} + 138 \text{ gesund und positiver Test}} \approx 0,34 = 34\%$$

## Schulung Teil 2

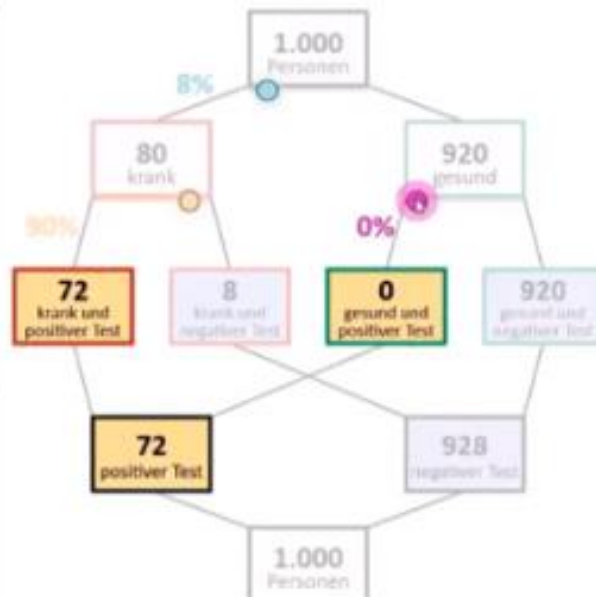
1) Einführung

2a) Falsch-Positiv-Rate

2b) Sensitivität

2c) Prävalenz

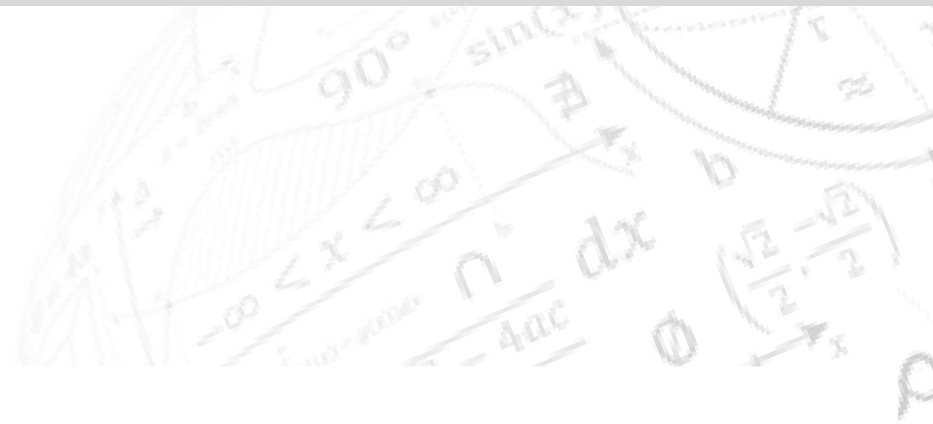
Falsch-Positiv-Rate wird größer



$$\frac{\boxed{72 \text{ krank und positiver Test}}}{\boxed{72 \text{ positiver Test}}} = \frac{\boxed{72 \text{ krank und positiver Test}}}{\boxed{72 \text{ krank und positiver Test}} + \boxed{0 \text{ gesund und positiver Test}}} \approx 1,00 = 100\%$$



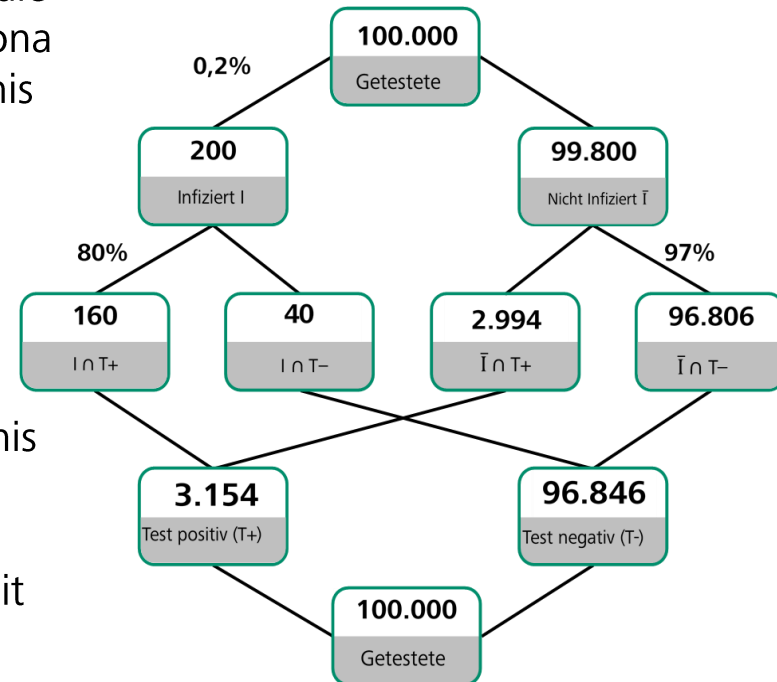
# Workshop-Phase III



## Workshop-Phase III

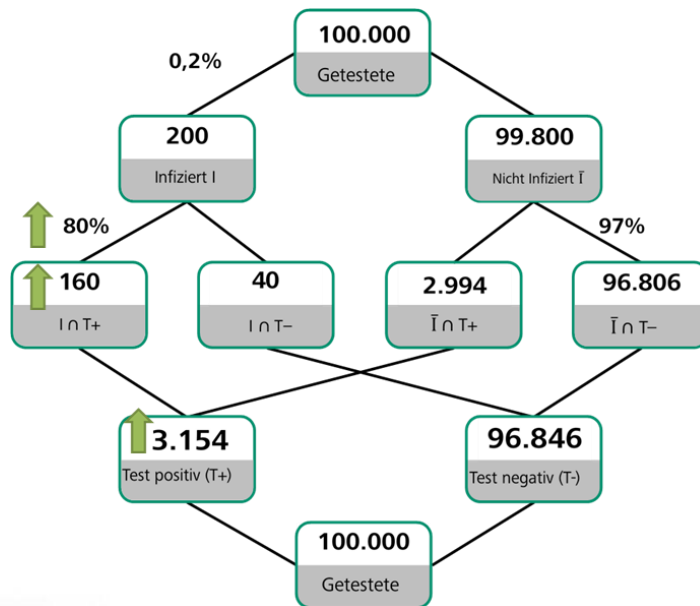
a) **Berechnen** Sie zunächst für die obige Situation die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person mit Corona infiziert ist, wenn sie ein positives Schnelltestergebnis erhält (= positiv prädiktiver Wert).

Bei 3.154 Personen mit positivem Schnelltestergebnis sind tatsächlich nur 160 mit Corona infiziert. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit positiven Schnelltestergebnisses auch tatsächlich mit Corona infiziert ist, beträgt also  $160/3.154 \approx 5\%$ .



## Workshop-Phase III

**b) Stellen Sie sich vor:** Bei einem anderen Schnelltest ist die Sensitivität größer als 80%. (Prävalenz und Spezifität bleiben unverändert). Nun wird dieser Test eingesetzt. **Welche Auswirkung** hat das auf die Wahrscheinlichkeit aus **Frage a)**?



$$\frac{160}{3.154}$$

Test positiv (T+)

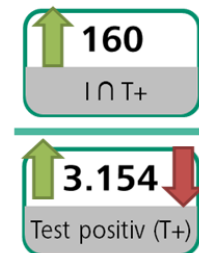
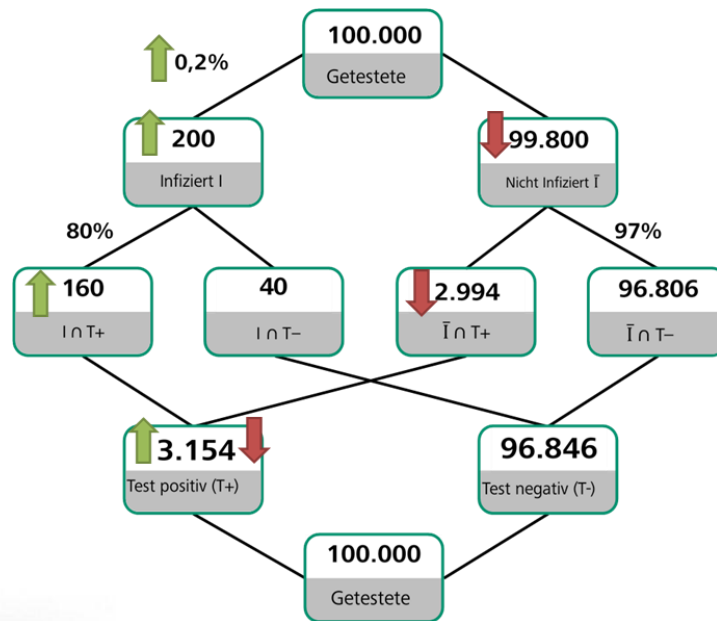


Der positiv prädiktive Wert (Wahrscheinlichkeit aus Frage a) wird größer.



## Workshop-Phase III

**c) Stellen Sie sich nun vor:** Der Test aus der abgebildeten Situation (Sensitivität = 80% und Spezifität = 97%) wird nun bei Personen aus einem Hochrisikogebiet durchgeführt, sodass die Prävalenz nun größer als 0,2% ist. **Welche Auswirkung** hat das auf die Wahrscheinlichkeit aus **Frage a)**



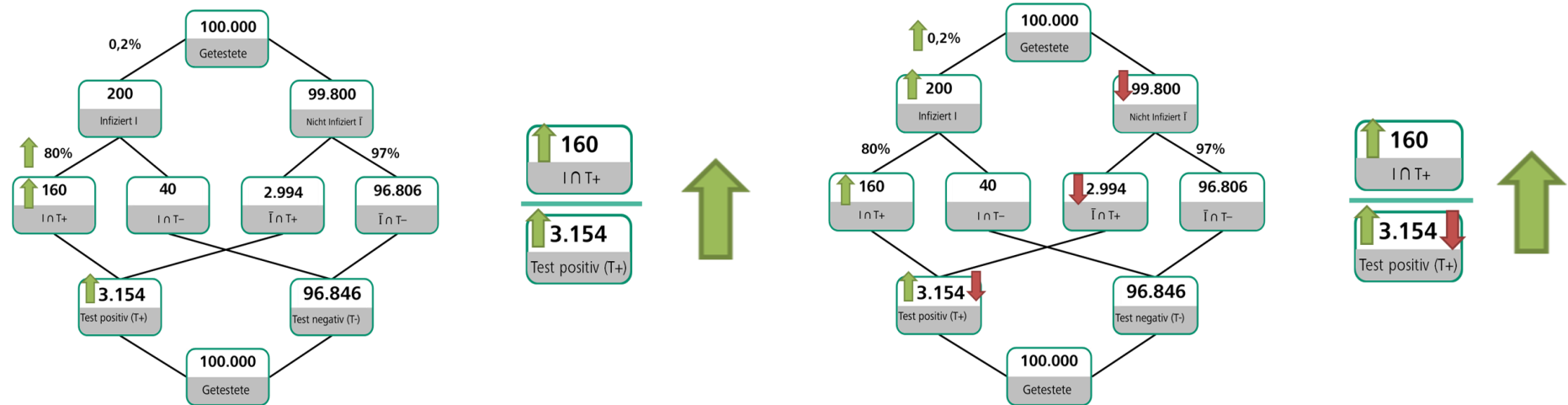
Der positiv prädiktive Wert (Wahrscheinlichkeit aus Frage a) wird größer.





## Workshop-Phase III

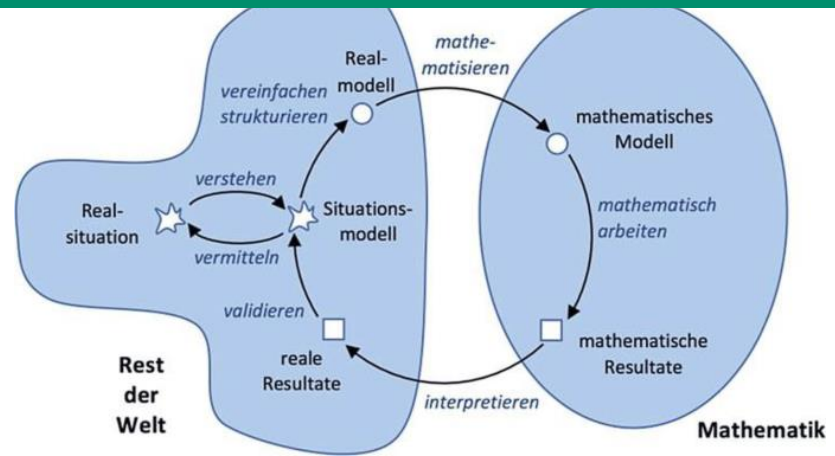
d) Welche **Schwierigkeiten** würden Sie bei den letzten Teilaufgaben (b und c) erwarten?



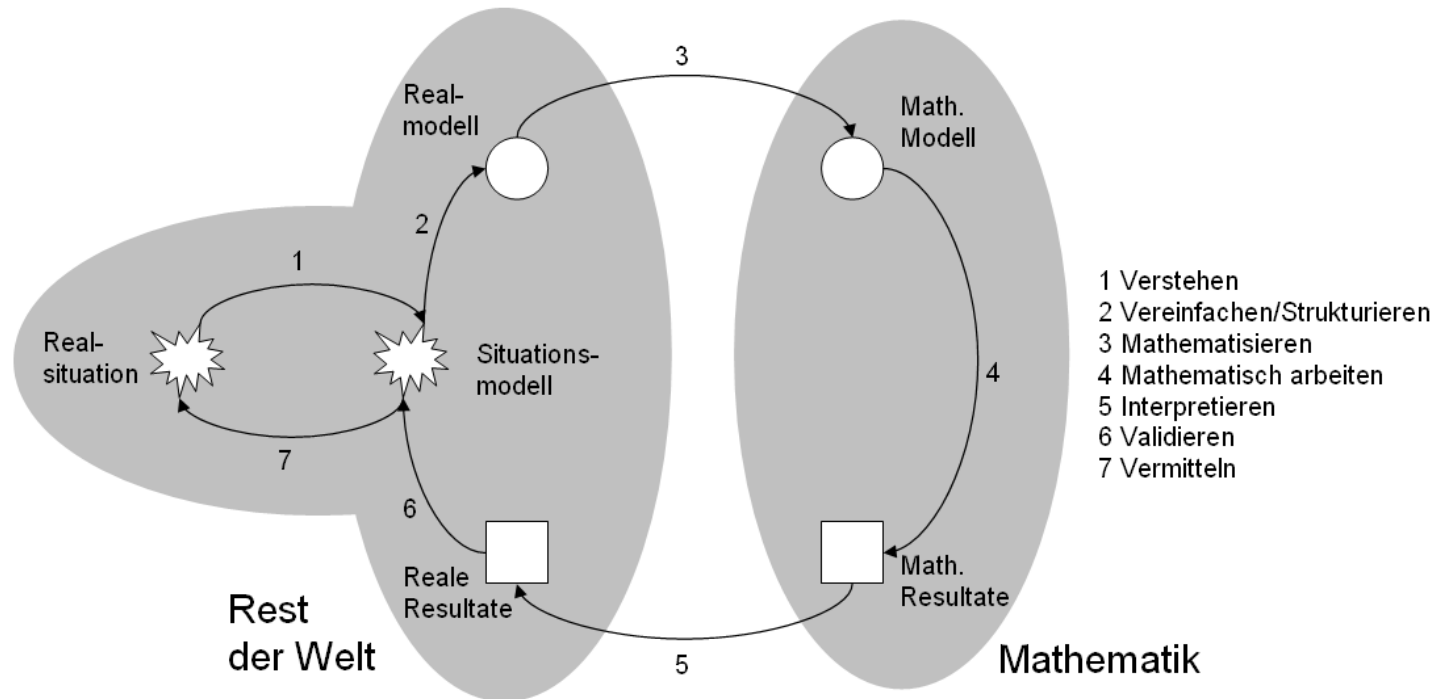
Zur b) Es wird zwar die richtige Richtung der Auswirkung auf den Bruch genannt, aber der Unterschied zwischen Sensitivität und positiv prädiktiven Wert ist nicht klar.

Zur c) Oftmals wird gedacht, dass die Veränderung der Prävalenz keine Auswirkungen auf den positiv prädiktiven Wert hat, da der Test sich nicht ändert. Allerdings haben geringe Änderungen der Prävalenz in den meisten medizinischen Kontexten sehr große Auswirkungen auf den positiv prädiktiven Wert.

# Bayesianische Modellierungsaufgaben



# Modellierungskreislauf (nach Blum und Leiß, 2006)



## Ein schöner Kontext für eine Modellierungsaufgabe zu bedingten Wahrscheinlichkeiten: **Die Gesichtserkennung**

12.10.2018 10:53 Uhr

### Gesichtserkennung: Test am Bahnhof Südkreuz erfolgreich abgeschlossen

Für Bundesinnenminister Horst Seehofer haben sich die Systeme in beeindruckender Weise bewährt. Er dringt auf breite Einführung in der Polizeiarbeit.

Von Detlef Borchers

🔊 🖨️ 💬 185



(Bild: dpa)

# Gesichtserkennung am Bahnhof Berlin-Südkreuz (11. Oktober 2018)

Pressemitteilung des Bundesinnenministeriums:

PRESSEMITTEILUNG · 11.10.2018

## Projekt zur Gesichtserkennung erfolgreich

Testergebnisse veröffentlicht – Systeme haben sich bewährt

Am 31. Juli 2018 endete der Test der Gesichtserkennungssysteme am Bahnhof Berlin-Südkreuz. Die jetzt abgeschlossene Auswertung der Testergebnisse zeigt, dass Gesichtserkennungssysteme in Zukunft einen wesentlichen Mehrwert für die polizeiliche Arbeit, insbesondere der Bundespolizei, darstellen können.

Egal ob eine oder mehrere Personen den Testbereich durchschreiten, die Personen eine Brille oder einen Schal tragen, die Systeme erkennen Gesichter zuverlässig. Sie funktionieren bei Tag und Nacht – sowohl mit guten Vergleichsbildern als auch mit Bildern schlechterer Qualität.

Auf Grundlage der Testergebnisse ist Bundesinnenminister Horst Seehofer im Hinblick auf eine mögliche Einführung in der Zukunft zuversichtlich: *"Die Ergebnisse zeigen, dass die Technik zur Gesichtserkennung unsere Polizistinnen und Polizisten im Alltag erheblich unterstützen kann. Die Systeme haben sich in beeindruckender Weise bewährt, so dass eine breite Einführung möglich ist. Wir können damit in bestimmten Bereichen die Polizeiarbeit noch effizienter und effektiver gestalten und damit die Sicherheit für die Bürgerinnen und Bürger verbessern."*

Das klingt doch super!  
Also die Überwachung am besten gleich überall einführen?

## Gesichtserkennung am Bahnhof Berlin-Südkreuz (11. Oktober 2018)

Pressemitteilung des Bundesinnenministeriums:

PRESSEMITTEILUNG · 11.10.2018

### Projekt zur Gesichtserkennung erfolgreich

Testergebnisse veröffentlicht – Systeme haben sich bewährt

Am 31. Juli 2018 endete der Test der Gesichtserkennungssysteme am Bahnhof Berlin-Südkreuz. Die jetzt

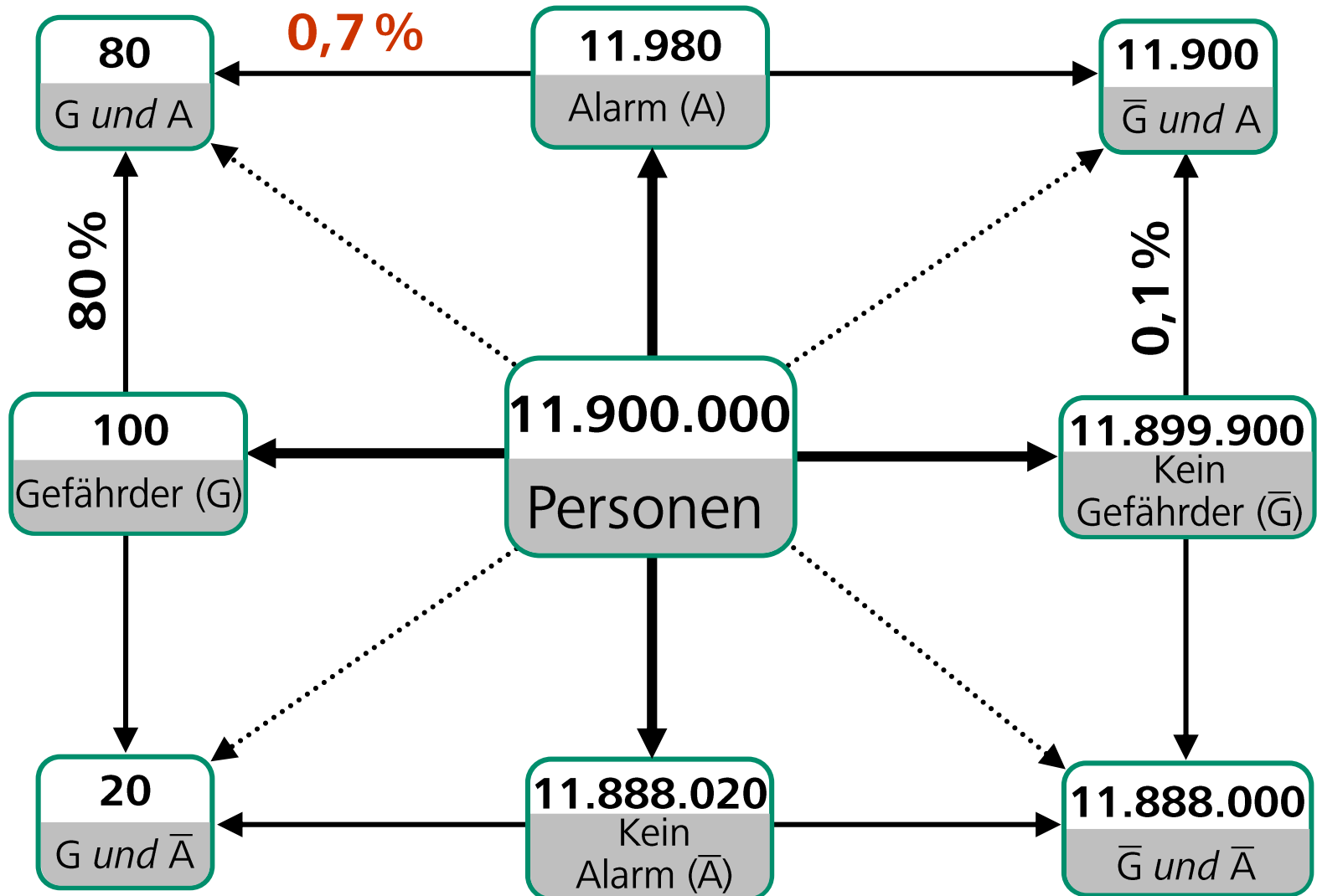
“

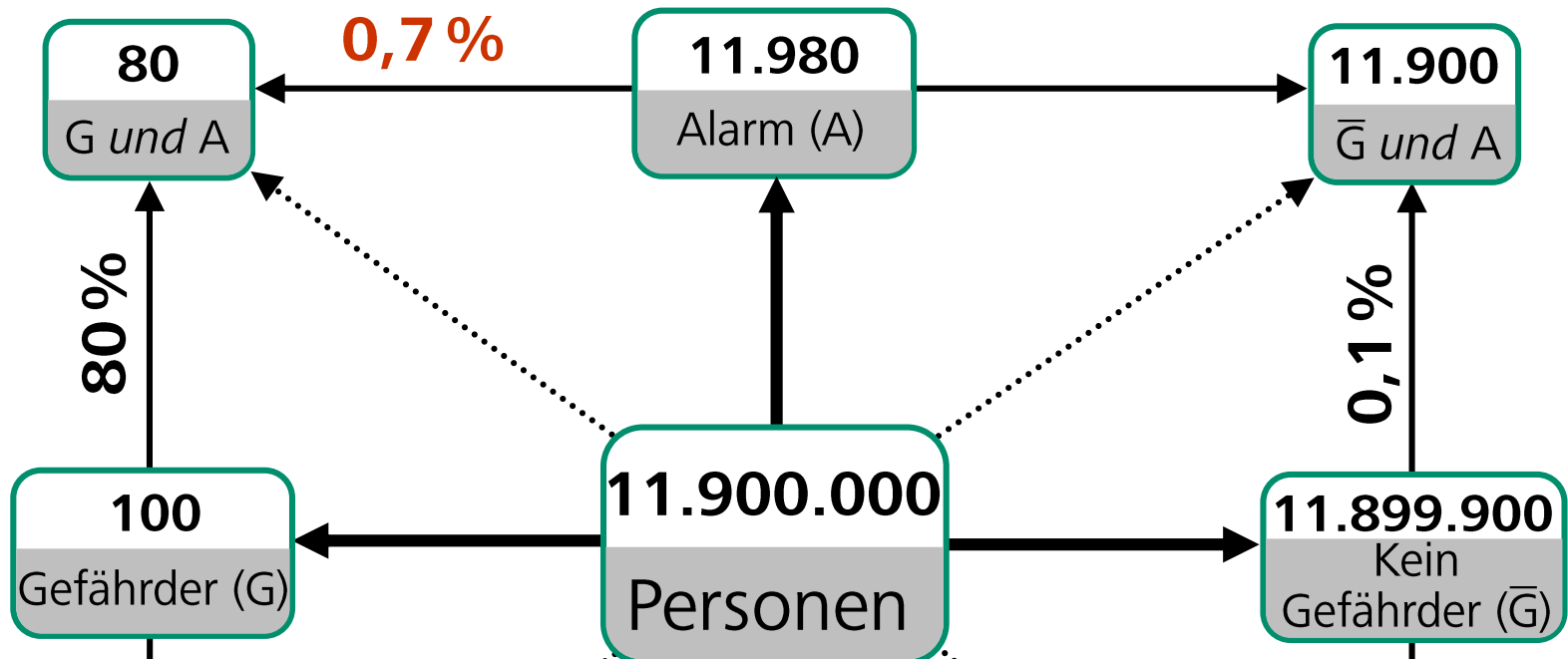
Die durchschnittliche **Trefferrate** liegt bei über 80%. [...]

Die **Falschtrefferraten** (z.B. System erkennt Person A, es handelt sich jedoch um Person B) liegen durchschnittlich bei unter 0,1%.

*dass eine breite Einführung möglich ist. Wir können damit in bestimmten Bereichen die Polizeiarbeit noch effizienter und effektiver gestalten und damit die Sicherheit für die Bürgerinnen und Bürger verbessern.“*

Das klingt doch super!  
Also die Überwachung am besten gleich überall einführen?



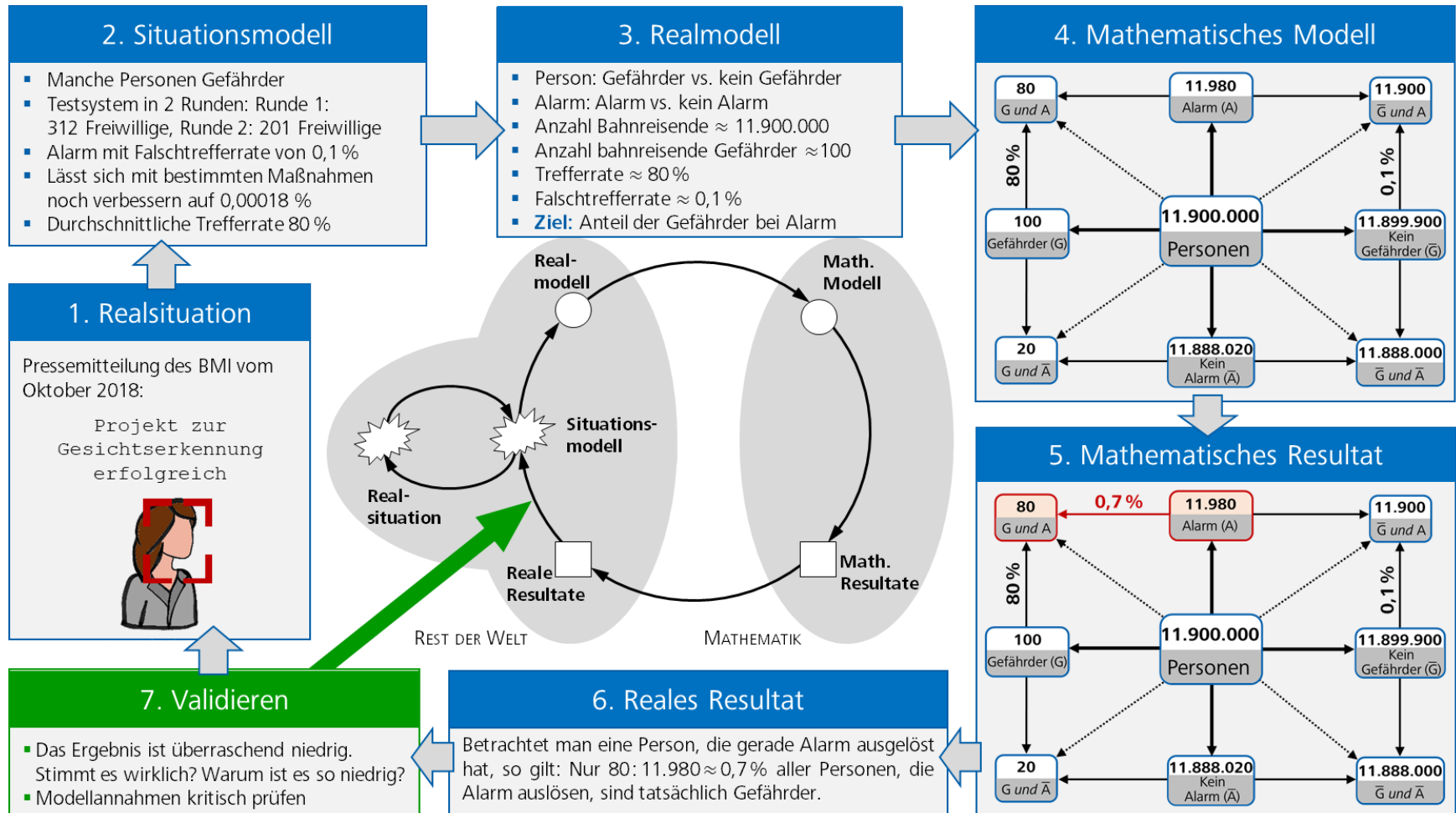


Von 11.980 Personen bei denen die Gesichtserkennung einen Alarm liefert, handelt es sich nur bei 80 Personen um Gefährder.

Die Wahrscheinlichkeit, einen Gefährder erwischt zu haben, wenn der Alarm anschlägt, liegt nur bei 0,7%.



**Arbeitsauftrag:** 2018 wurde ein Projekt zur Untersuchung der Gesichtserkennung am Bahnhof Südkreuz in Berlin abgeschlossen. Kernfrage des Projekts war: Sollte man die Gesichtserkennung an deutschen Bahnhöfen flächendeckend einführen, um potentielle Gefährder erfassen zu können? Was könnten mögliche Probleme bei einer solchen Einführung einer flächendeckenden Gesichtserkennung sein? Wie verlässlich sind die Ergebnisse? Verwende die nachfolgenden Informationen (siehe Onlinematerial).



## Rückblick



### Teil 1

Numerische  
Darstellungsarten  
von Anteilswerten



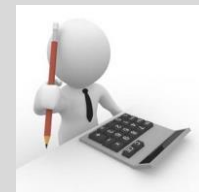
### Teil 2

Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Schnittwahrscheinlichkeiten,  
Bayesianische Aufgaben



### Teil 3

Förderung eines  
Kovariations-  
verständnisses



## Fazit

- Beziehen Sie auch **alternative Darstellungsarten** (wie z.B. „Jeder Sechste“) in den Unterricht ein.
- Fragen Sie: Prozent **von was**? Was ist die richtige **Bezugsgröße**?
- Versuchen Sie sich die Situation für eine **konkrete Stichprobe** vorzustellen (nicht in Prozent und Wahrscheinlichkeiten).
- **Häufigkeitsdoppelbäume** und **Häufigkeitsnetze** sind hilfreiche Visualisierungen, um einfacher zur jeweiligen Lösung zu gelangen und statistische Sachverhalte besser zu durchdringen.
- Auch der **Einfluss von veränderten Parametern** lässt sich mithilfe dieser Visualisierungen besser durchdringen.



# Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

Fragen und Anmerkungen gerne auch an [Karin.Binder@Imu.de](mailto:Karin.Binder@Imu.de)  
oder [Nicole.Steib@ur.de](mailto:Nicole.Steib@ur.de)

