Universität Regensburg

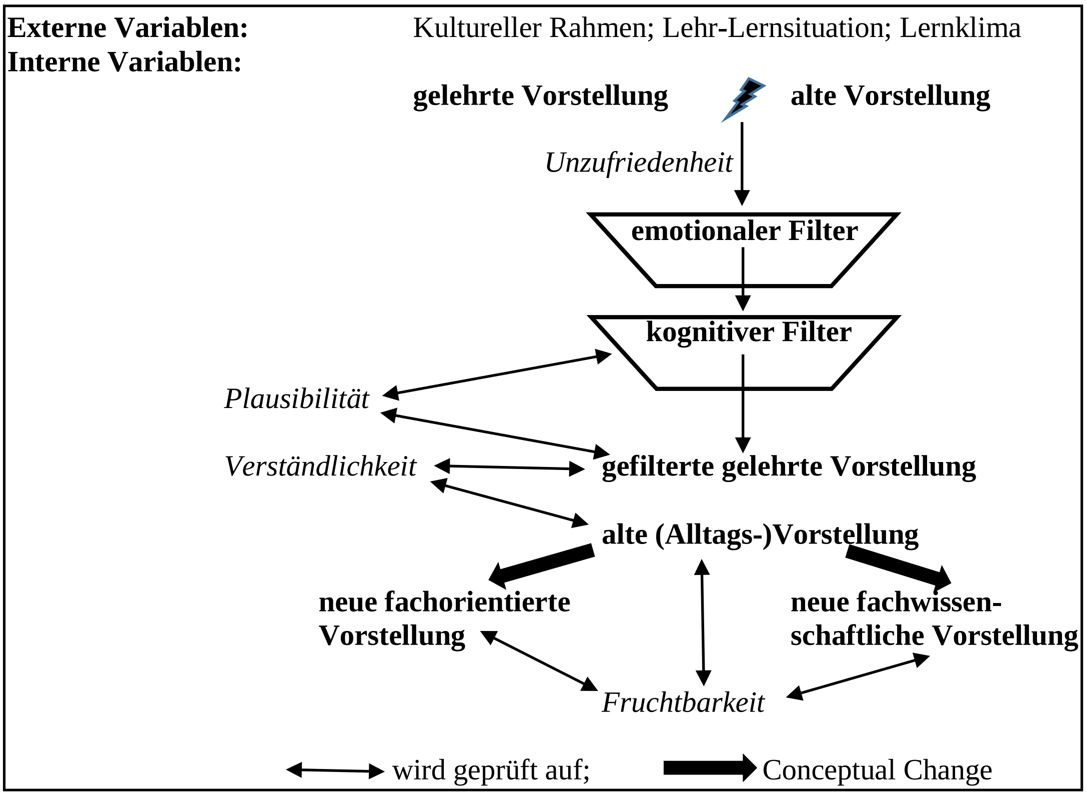
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
Didaktik der Mathematik

Fortbildungsveranstaltung für Mathematiklehrkräfte am 08.10.2015

Workshop 2: Zahlentricks und Knobeleien

Referenten: Christine Schmeißer & Alfred Lindl

1. Das motivierende und kognitive Potenzial beeindruckender mathematischer Probleme und Lösungen vor dem Hintergrund der Conceptual Change-Theorie



Schema nach KRÜGER (2007) und WEIXLER (2009)

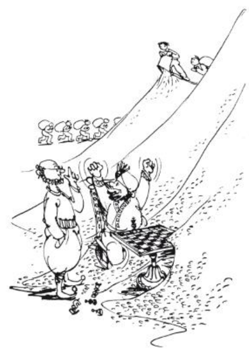
2. Verblüffendes aus der Welt der Mathematik

2.1 Die indische Schachlegende

Leitideen: L1, L4;
Kompetenzen: K2, K3, K5;
Jahrgangsstufen: 5, 10;

Vor langer Zeit erfand ein weiser Brahmane in Indien das Schachspiel und machte es seinem König zum Geschenk. Der König war darüber so begeistert, dass er dem Brahmanen einen freien Wunsch gestattete. Dieser erbat sich für das erste Feld des Schachspiels ein Reiskorn, für das zweite zwei, für das dritte vier und für jedes weitere Feld die doppelte Anzahl des vorherigen. Der König war über den bescheidenen Wunsch des Weisen erfreut und ließ ihm aus einer Schüssel ein Feld nach dem anderen mit der gewünschten Anzahl Körner belegen.

a) Wie viele Reiskörner muss der König auf das 64. Feld legen?
b) Wie viele Reiskörner muss der König auf das gesamte Schachbrett legen?



Lösungen

a) Aufgrund der ständigen Verdopplung entspricht die Anzahl der Körner auf einem Feld einer Potenz mit Basis 2 und einem Exponenten, der um 1 kleiner ist als die Feldnummer. Damit muss der König auf das 64. Feld 2^{63} = 9.223.372.036.854.775.808 Reiskörner legen.

b) Die Anzahl aller Körner auf dem Schachbrett ist $S = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{63}$. Um die Berechnung zu vereinfachen, bestimmt man von dieser Summe zuerst das Doppelte,

$$2S = 2 \cdot (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}) \quad \Leftrightarrow \quad 2S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{64}$$

dann zieht man davon wieder die Summe S ab:

$$S = 2S - S \;\Leftrightarrow\; S = (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{64}) - (1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}) \;\Rightarrow\; S = 2^{64} - 1$$
$$\Rightarrow S = 18.446.744.073.709.551.615$$

Der König muss also 18.446.744.073.709.551.615 Reiskörner auf das Schachbrett legen. Dies überschreitet die Weltjahresproduktion. Um ein Gefühl für diese Menge zu bekommen, wurde für die Ausstellung „Mathema“ im Deutschen Technikmuseum Berlin ein Film gedreht, der unter folgendem Link zu sehen ist: *http://www.youtube.com/watch?v=KnQZ3Mg6upg*.

Weiterführende Literatur
BEHRENDS (2013), S. 13-16

2.2 Die Zahl 1089

Leitidee: L1;
Kompetenzen: K1, K5;
Jahrgangsstufen: 5, 7;

Notieren Sie sich eine beliebige dreistellige natürliche Zahl *abc* mit verschiedenen Ziffern *a, b, c*. Bilden Sie von dieser Zahl die Spiegelzahl *cba* und subtrahieren Sie die kleinere von der größeren Zahl. Addieren Sie anschließend zum erhaltenen Ergebnis dessen Spiegelzahl. Führen Sie dieses Rechenverfahren mit mehreren dreistelligen Zahlen durch, das Ergebnis ist stets 1089.

Wie funktioniert der Trick?
Eine beliebige dreistellige Zahl $abc \in \mathbb{N}$, wobei $a \neq b \neq c$ und o. B. d. A. $a > c$ ist, kann im Dezimalsystem als $abc = 100a + 10b + c$ dargestellt werden. Die Spiegelzahl ist dann $cba = 100c + 10b + a$. Wird die Spiegelzahl von der ursprünglichen Zahl subtrahiert, so erhält man:

$$abc - cba = xyz \quad \Leftrightarrow \quad (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = xyz$$
$$\Leftrightarrow 99a - 99c = xyz \quad \Leftrightarrow \quad (100 - 1)\,(a - c) = xyz$$

Dies kann man schreiben als: $xyz = 100(a - c - 1) + 90 + [10 - (a - c)]$
Die Spiegelzahl ist: $zyx = 100[10 - (a - c)] + 90 + (a - c - 1)$

Die Addition beider Zahlen liefert:

$$xyz + zyx = 100a - 100c - 100 + 90 + 10 - a + c + 1000 - 100a + 100c + 90 + a - c - 1$$
$$= 1000 + 90 - 1 = 1089$$

Insbesondere ist das Endergebnis 1089 stets unabhängig von der gewählten Ausgangszahl.

Weiterführende Literatur
KORTHAASE (2010), S. 16; LIETZMANN (1954), S. 21f.; LIETZMANN (1969), S. 154

2.3 Kaprekar-Zahl (D. R. Kaprekar *1905-†1986)

Leitidee: L1;
Kompetenzen: K1, K5;
Jahrgangsstufen: 5, 7;

Notieren Sie sich eine beliebige dreistellige natürliche Zahl mit verschiedenen Ziffern *a, b, c*. Bilden Sie aus diesen drei Ziffern die betragsmäßig größt- und kleinstmögliche Zahl und subtrahieren Sie die kleinere von der größeren Zahl. Ergibt die Differenz nicht 495, so bilden Sie aus den Ziffern des Zwischenergebnisses wiederum die größt- und die kleinstmögliche Zahl und subtrahieren diese erneut voneinander. Iterieren Sie dieses Verfahren, bis Sie die Zahl 495 erhalten (max. 6 Schritte). Führen Sie diese Rechenschritte mit mehreren beliebigen Anfangszahlen durch, Sie landen stets bei 495.
Der Trick funktioniert übrigens auch bei vierstelligen Zahlen, probieren Sie es aus. Sie landen dann stets bei der Zahl 6174 (max. 7 Schritte).

Wie funktioniert der Trick? (Lösung für dreistellige Zahlen)
Jede beliebige dreistellige Anfangszahl *abc* wird zunächst in absteigender Ziffernfolge (o. B. d. A. $a > b > c$) geordnet und kann im Dezimalsystem folgendermaßen dargestellt werden: $100a + 10b + c$. Hiervon wird sodann die Spiegelzahl $100c + 10b + a$ subtrahiert:

$$(100a + 10b + c) – (100c + 10b + a) = 99\,(a – c).$$

Der Wert dieses Produktes ist folglich stets ein dreistelliges Vielfaches der Zahl 99, nämlich 099, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891 und 990. Wendet man die Umordnung der Ziffern nach obigem Schema auf diese neun potenziellen Ergebnisse an, so resultieren daraus maximal bis zu fünf weitere Rechenschritte, die offensichtlich alle zur einzigen dreiziffrigen Kaprekar-Zahl 495 führen:

1. Fall: 990 – 099 = 891; 2. Fall: 981 – 189 = 792; 3. Fall: 972 – 279 = 693;
4. Fall: 963 – 369 = 594; 5. Fall: 954 – 459 = 495.

Weiterführende Literatur
LIETZMANN (1954), S. 21

2.4 Das 3x+1-Problem („Collatz-Problem")

Leitideen: L1, L4;
Kompetenzen: K5, K6;
Jahrgangsstufe: 7;

Wählen Sie eine Zahl $x \in \mathbb{N}$. Wenn die Zahl gerade ist, teilen Sie sie durch 2. Wenn sie ungerade ist, verdreifachen Sie die Zahl und addieren 1 hinzu. Wiederholen Sie dieses Vorgehen. Welche Zahl erhalten Sie immer?

Wie funktioniert der Trick?
Unabhängig von der Ausgangszahl $x \in \mathbb{N}$ endet jede nach dieser Vorschrift konstruierte Zahlenfolge irgendwann in dem Zyklus 1, 4, 2, 1. Das „Collatz-Problem" konnte für alle Zahlen mit höchstens 18 Stellen rechnerisch überprüft werden, aber ein Beweis fehlt bisher.

Weiterführende Literatur
ZIEGLER (2011), S. 122f.

2.5 Schnelles Kubikwurzel-Ziehen

Leitidee: L1;
Kompetenzen: K5, K6;
Jahrgangsstufe: 9;

Wählen Sie eine beliebige natürliche Zahl $z \in [1; 100]$. Potenzieren Sie diese mit 3 und nennen Sie das Ergebnis. Der Rechenkünstler kann Ihnen sofort die Kubikwurzel zu jeder von Ihnen geäußerten Zahl antworten.

Wie funktioniert der Trick?
Zuerst ist es notwendig, sich die dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis 10 zu merken:

Zahl	Zahl^3	Zahl	Zahl^3
1	1	6	216
2	8	7	343
3	27	8	512
4	64	9	729
5	125	10	1000

Alle angeführten dritten Potenzen enden offensichtlich auf unterschiedlichen Ziffern. Bis auf die Fälle 2, 3, 7, und 8 entsprechen diese genau den Endziffern der zugehörigen Kubikwurzeln. Bei 2, 3, 7 und 8 ist die letzte Ziffer der Kubikwurzel gleich der Differenz von 10 und der Endziffer der Kubikzahl. Um die Endstelle der Kubikwurzel herauszufinden, muss also nur die letzte Ziffer der genannten Potenz beachtet werden. Bei 681.472 ist dies beispielsweise eine 2, die Kubikwurzel endet also auf 8. Bei 250.047 ist es eine 7, die Kubikwurzel endet also auf 3.
Zur Bestimmung der ersten Ziffer der Kubikwurzel trennt man unabhängig von der Größe der Zahl die letzten drei Ziffern der dritten Potenz ab und betrachtet die übrige Ziffernfolge. Im Beispiel 681.472 ist die Restzahl 681, welche zwischen den Kubikzahlen zu 8 und 9 liegt. Die kleinere der beiden Zahlen, hier also die 8, ist die erste Ziffer der Kubikwurzel, so dass $88^3 = 681.472$ gilt. Zu 250.047 ist die Kubikwurzel somit 63.

Die Bestimmung der fünften Wurzel aus einer Zahl ist sogar noch einfacher, da die letzte Ziffer einer fünften Potenz immer genau der Endstelle der Ausgangszahl entspricht.

Zahl	**Zahl^5**	**Zahl**	**Zahl^5**
1	1	6	7776
2	32	7	16807
3	243	8	32768
4	1024	9	59049
5	3125	10	100000

Somit kann die Endziffer einer fünften Wurzel direkt abgelesen werden. Zur Festlegung der Zehnerstelle sind hingegen die letzten fünf Stellen zu streichen.

Weiterführende Literatur
GARDNER (2004); S. 173ff.; DAMBECK (2013), S. 167ff.

2.6 Magischer Münzzauber

Leitideen: L1, L4;
Kompetenzen: K1, K3, K5;
Jahrgangsstufe: 7;

Eine Person kennt den Inhalt des Münzgeldfaches ihres Geldbeutels, leert diesen auf einen Tisch und gibt einer zweiten Person folgenden Auftrag:
„Verteile die auf dem Tisch liegenden Münzen beliebig auf beide Hände, ohne dass ich dies sehen kann. Schließe die Hände zu Fäusten und multipliziere gedanklich die Anzahl der Münzen in der rechten Hand mit 5, die Anzahl der Münzen in der linken Hand mit 4. Addiere dann die Ergebnisse beider Produkte und nenne laut den Wert der Summe.“
Der Rechenkünstler weiß dann, wie viele Münzen in welcher Hand sind.

Wie funktioniert der Trick?
Die Arbeitsanweisungen führen zu folgendem Gleichungssystem, wobei r die Anzahl der Münzen in der rechten, l die Anzahl der Münzen in der linken Hand, m die vorher bekannte Gesamtanzahl der Münzen und e das laut ausgesprochene Ergebnis ist ($r, l, m, e \in \mathbb{N}$).

$$\text{(I)}\quad r + l = m$$
$$\text{(II)}\ 5r + 4l = e$$

Mittels elementarer Umformung von (I) zu $r = m - l$ und Einsetzen in (II) erhält man

$$5(m - l) + 4l = e \quad \Leftrightarrow \quad 5m - l = e$$

und bei Auflösung nach l

$$5m - e = l.$$

Folglich ergibt sich die Anzahl der Münzen in der linken Hand stets aus der Differenz des Fünffachen der Gesamtanzahl der Münzen und dem laut verkündetem Ergebnis, die Anzahl der Münzen in der rechten Hand im Anschluss aus $m - l = r$.

Weiterführende Literatur
HETZLER (2002), S. 87-90

2.7 Die Eins setzt sich durch – das Benfordsche Gesetz

Leitideen: L1, L5;
Kompetenzen: K2, K3, K6;
Jahrgangsstufen: 11, 12;

Alternative 1 (mit Internetzugang): Denken Sie sich eine beliebige drei- oder vierstellige Zahl, z. B. 391, schreiben Sie davor eine Eins und geben Sie diese Zahl (also z. B. 1391) bei GOOGLE ein. Notieren Sie sich die angegebene Trefferanzahl. Wiederholen Sie dieses Experiment anschließend für die Leitziffern Zwei bis Neun (also z. B. 2391, 3391 usw.). Welche Häufigkeitsverteilung weisen die Leitziffern auf?
Alternative 2 (ohne Internetzugang):
Wählen Sie eine beliebige Zahl, addieren Sie 20% hinzu und notieren Sie Ihr Ergebnis. Addieren Sie hierzu wieder 20% usw. und wiederholen Sie dieses Vorgehen beliebig oft. Zählen Sie anschließend wie oft jeweils die 1, die 2, … und die 9 als Leitziffer vorkommen. Welche Häufigkeitsverteilung weisen die Leitziffern auf?
Sie können Ihr Ergebnis auch anhand der absoluten Häufigkeiten der Leitziffern 1 bis 9 in der Reihe der Zweierpotenzen oder der Fibonacci-Zahlen überprüfen.

Wie funktioniert der Trick?

A priori nimmt man an, jede Leitziffer müsse mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$ an der ersten Stelle vorkommen. Dass der statistische Befund bei Kardinal- und Ordinalzahlen, z. B. bei Einwohnerzahlen von Städten, Steuerprüfungen oder Wahlergebnissen, aber deutlich von dieser Wahrscheinlichkeitsannahme abweicht, stellten der Mathematiker Simon Newcomb (1881) und der Physiker Frank Benford (1938) fest. Sie beschrieben die beobachtete relative Häufigkeitsverteilung für die Leitziffern 1 bis 9 unabhängig voneinander sowie jeweils ohne Beweis und Erläuterung mit der Formel (sog. „Benfordsches Gesetz“):

$$P(1.\ Ziffer = d) = log_{10}(d+1) - log_{10}(d);\ \text{für } d = 1, \ldots, 9.$$

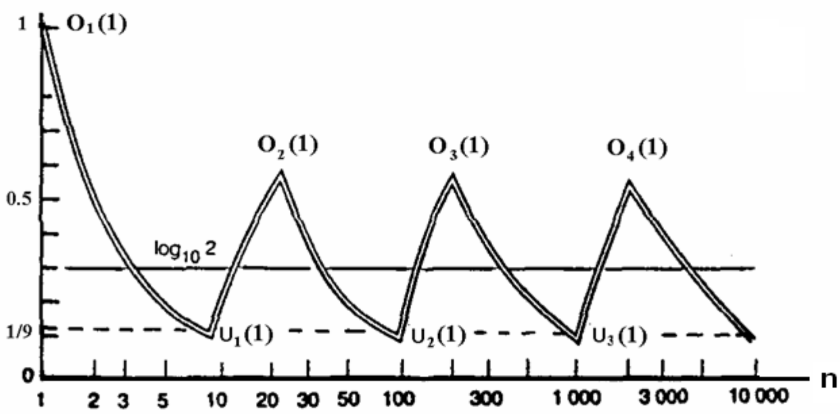
Nach dieser Vorschrift ergibt sich folgende Häufigkeitsverteilung der Leitziffern 1 bis 9:

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(d)	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,058	0,051	0,046

Diese Häufigkeitsverteilung kann durch die Betrachtung einer endlichen Anzahl beschränkter Teilintervalle anschaulich approximiert werden. Berechnet man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit $P_n(1)$ der Leitziffer 1 in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$, so ergibt sich:

n	1	9	19	99	199	999	1999	9999	19999
$P_n(1)$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{11}{19}$	$\frac{11}{99} = \frac{1}{9}$	$\frac{111}{199}$	$\frac{111}{999} = \frac{1}{9}$	$\frac{1111}{1999}$	$\frac{1111}{9999} = \frac{1}{9}$	$\frac{11111}{19999}$

Offensichtlich schwankt die Wahrscheinlichkeit $P_n(1)$ also zwischen den Obergrenzen $O_m(1) = \frac{11\ldots1}{19\ldots9}$, wobei $m \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Einsen bzw. Neuner ist, sowie den Untergrenzen $U_m(1) = \frac{1}{9}$ und insbesondere existiert kein Grenzwert $\lim_{n\to\infty} P_n(1)$. Dies veranschaulicht auch nachstehende Darstellung der Werte $P_n(1)$ als Funktion von *n*.



Mit $U(1) = \lim_{m\to\infty} U_m = \frac{1}{9}$ und $O(1) = \lim_{m\to\infty} O_m(1) = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{9}(10^m-1)}{\frac{1}{5}(10^m-5)} = \lim_{m\to\infty} \frac{5(10^m-1)}{9(10^m-5)} \to \frac{5}{9}$ approximiert eine vereinfachte Mittelwertbildung $P(1) = \frac{O(1)+U(1)}{2} = \frac{1}{3}$ das Ergebnis nach dem Gesetz von Benford, $P(1) = log_{10}2 - log_{10}1 \cong 0{,}301$, jedoch recht gut.
Analog können auch adäquate Näherungen für die weiteren Leitziffern bestimmt werden.

Der formale Beweis des Benfordschen Gesetzes greift auf Hilfsmittel zurück, die nicht Kerninhalt der Schulmathematik sind, weshalb hierzu auf die entsprechende Literatur verwiesen sei. Die Behandlung dieses Themas in einem wissenschaftspropädeutischen Seminar oder als wissenschaftspropädeutische Arbeit ist allerdings keineswegs ausgeschlossen.

Weiterführende Literatur

ZIEGLER (2011), S. 83-85; HUMENBERGER (1996; 1997; 2000; 2008); BRADLEY/ FARNSWORT (2009); BEHRENDS (2013), S. 240f.

3. Literatur

3.1 Zitierte Literatur (inkl. Kurzzusammenfassung)

BEHRENDS, E. (2013). Fünf Minuten Mathematik. 100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung die Welt. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Dies ist eine Sammlung 100 erheiternd geschriebener Essays, die auf populärwissenschaftlichem Niveau verschiedenen Themen der Mathematik nachspüren.

BRADLEY, J. R., FARNSWORTH, D. L. (2009). Beispiele und Schüleraktivitäten zum BENFORD-Gesetz. Stochastik in der Schule 29/3, 28-32.

Dieser kurze Aufsatz enthält Anregungen zur Implikation des Benfordschen Gesetzes im Unterricht.

DAMBECK, H. (³2013). Nullen machen Einsen groß. Mathe-Tricks für alle Lebenslagen. Köln: Kiepenheuer&Witsch.

Dambeck zeigt in diesem Buch praktische Mathe-Tipps und -Tricks für alle Lebenslagen, z. B. Telefonnummern merken, 65 im Kopf quadrieren, Krawatten binden oder Kunststücke mit Zirkel und Lineal vollführen.

GARDNER, M. (2004). Mathematische Zaubereien. 115 Karten-, Würfel- und Münztricks, mathematische Spiele und Zauberkunststücke. Köln: DuMont Literatur und Kunst Verlag.

In dem Werk werden 115 unterhaltsame Spiele und Zauberstücke vorgestellt, die mit Mathematik zu tun haben. Gardner geht dabei sowohl auf die Aufgabenstellung als auch deren Präsentation ein und gibt ausführliche Erläuterungen zu den mathematischen Hintergründen.

HETZLER, I. (2002). Mathe spielend lernen. Mathematische Zaubertricks für die 5. bis 10. Klasse. Stuttgart: Klett.

Dieses Arbeitsheft bietet einen sehr schülerorientierten Lehrgang zur Erlangung mathematischer Zauberkünste und eignet sich vor allem für den Einsatz in den niedrigen Jahrgangsstufen. Es umfasst detaillierte Zauberanleitungen, verständliche Lösungen, aufbereitete Kopiervorlagen und sogar abschließende Zauberprüfungszeugnisse.

HUMENBERGER, H. (1996). Das „BENFORD-Gesetz“ über die Verteilung der ersten Ziffer von Zahlen. Stochastik in der Schule 16/3, 2-17.

HUMENBERGER, H. (1997). Eine Ergänzung zum „BENFORD-Gesetz“ – weitere mögliche schulrelevante Aspekte. Stochastik in der Schule 17/3, 42-48.

HUMENBERGER, H. (2000). Das „BENFORD-Gesetz“ – warum ist die Eins als führende Ziffer von Zahlen bevorzugt? In: Foerster, F., Henn, H. W., Meyer, J. (2000). Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Bd. 6, Computeranwendungen. Hildesheim: Franzbecker, 138-150.

HUMENBERGER, H. (2008). Eine elementarmathematische Begründung des „BENFORD-Gesetzes“. Der Mathematikunterricht 54/1, 24-34.

Humenberger beleuchtet in dieser Sequenz von Artikeln das Benfordsche Gesetz unter unterschiedlichen Facetten. Unter anderem stellt er schülerorientierte Herangehensweisen zu diesem Problem vor, benennt Anwendungen des Gesetzes in der Alltagswelt und geht auch auf den fachmathematischen Hintergrund ein.

KORTHAASE , S. (2010). Mathematik – Zaubertricks Band 2. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Dies ist eine schülerorientiert aufbereitete Sammlung zahlreicher Zaubertricks zum Einsatz im Mathematikunterricht. Neben den jeweiligen Anleitungen zu den Zaubertricks und den Erläuterungen zu mathematischen Hintergründen finden sich im Buch auch zahlreiche Arbeitsblätter für einen direkten Unterrichtseinsatz.

KRÜGER, D. (2007). Die Conceptual Change-Theorie. In: Krüger, D., Vogt, H. Theorien der biologiedidaktischen Forschung. Ein Handbuch für Lehramtsstudenten und Doktoranden. Berlin: Springer, 81-92.

In diesem kurzen Aufsatz stellt Krüger präzise und eingängig die wesentlichen Grundlagen der Conceptual Change-Theorie vor.

LIETZMANN, W. (¹⁰1969). Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht.

Eine bunte Mischung mannigfaltiger verblüffender Aufgaben und Knobeleien aus den unterschiedlichen Teilbereichen der Mathematik werden vom Verfasser des Buches präsentiert und mit umfassenden Erklärungs- und Lösungsansätzen versehen.

LIETZMANN, W. (²1954). Sonderlinge im Reich der Zahlen. Bonn: Dümmlers.

Der Autor dieser Monographie präsentiert eine erstaunliche Fülle elementarer arithmetischer Zahlentricks, die keineswegs antiquiert, sondern zeitlos unterhaltsam sind.

MÖLLER, K. (2010). Lernen von Naturwissenschaften heißt: Konzepte verändern. In: Labudde, P. (Hg.). Fachdidaktik Naturwissenschaft, 1.-9. Schuljahr. Bern/ Stuttgart/ Wien: Haupt, 57-72.

In diesem Aufsatz erläutert Möller die lernförderliche Anwendung und aufgabenbezogene Umsetzung der Conceptual Change-Theorie im naturwissenschaftlichen Unterricht.

WEIXLER, S. (2009). Die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I unter dem Aspekt des Conceptual Change. München: Eigenverlag, 3-23.

In diesem Abschnitt seines Buches erläutert Weixler grundlegende Elemente der Conceptual Change-Theorie und zeichnet ihre Weiterentwicklung nach.

ZIEGLER, G. M. ([2]2011). Darf ich Zahlen? Geschichten aus der Mathematik. München: Piper.

Hierbei handelt es sich um ein amüsant geschriebenes Buch, das sowohl einige klassische Themen und Fragestellungen als auch bedeutende Personen der Mathematik unter einem humorvollen Blickwinkel beleuchtet.

3.2 Empfehlenswerte Literatur zu den Themen des Workshops (inkl. Kurzzusammenfassung)

BENJAMIN, A., SHERMER, M. ([13]2007). Mathe Magie. Verblüffende Tricks für blitzschnelles Kopfrechnen und ein phänomenales Zahlengedächtnis. München: Heyne.

Die Mathe-Magier präsentieren Rechenkünste und Zahlentricks und zeigen z. B. wie man komplizierte Berechnungen mit mehrstelligen Zahlen, Brüchen, Quadratwurzeln und Gleichungen blitzschnell im Kopf ausführen kann. Darüber hinaus stellen sie geeignete Mnemotechniken, mit denen man das Abspeichern und Abrufen von Gedächtnisinhalten verbessert, vor.

BEUTELSPACHER, A., WAGNER, M. (2010). Wie man durch eine Postkarte steigt … und andere mathematische Experimente. Freiburg i. Br.: Herder.

Zwei ausgefuchste Experimentatoren schnippeln, knicken und falten, was das Zeug hält, basteln Möbiusbänder und steigen ganz ungeniert durch eine Postkarte. Im Buch werden viele spannende Experimente gezeigt und erläutert, welche sich in den Mathematikunterricht einbinden lassen.

BEUTELSPACHER, A., WAGNER, M. (2012). Warum Kühe gern im Halbkreis grasen … und andere mathematische Knobeleien. Freiburg i. Br.: Herder.

Das Buch umfasst eine große Sammlung an Aufgaben und Knobeleien, die die Mathematik zu bieten hat: keltische Krieger, gerechte Großväter, gefährliche Zündschnurexperimente und eben die Frage, warum Kühe gern im Halbkreis grasen. Neben den Aufgaben werden auch deren mathematischen Hintergründe erläutert.

BISCHOFF, E. (1992). Mystik und Magie der Zahlen. Wiesbaden: Fourier.

Der Hauptteil dieses Buches widmet sich der Betrachtung diverser magischer Zahlenfiguren unter verschiedenen Facetten. Daneben wird auch auf Zahlentricks und die systematische Symbolik der Grundzahlen eingegangen.

BÜCHTER, A., HENN, H.-W. ([3]2009). Der Mathekoffer. Zaubern, Spielen, Knobeln. Aufgabenkartei mit Lehrerkommentar. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Die Aufgabenkartei umfasst 24 gut aufbereitete mathematische Zaubertricks, Spiele und Knobeleien für den Unterricht der Sekundarstufe I. Im Lehrerkommentar werden methodische Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz der Aufgabenkartei sowie Hintergrundinformationen und Beispiellösungen gegeben.

GARDNER, M. ([3]1984). Mathematische Knobeleien. Braunschweig/ Wiesbaden: Friedrich Vieweg&Sohn.

In 20 Kapiteln diskutiert Gardner unterschiedliche mathematische Problemstellungen und fachlich fundierte Lösungen, die jedoch der Erfahrungswelt heutiger Schülerinnen und Schüler größtenteils entrückt sind.

HEMME, H. (2010). Die Palasträtsel. Denksportaufgaben aus dem Reich Karls des Großen. Köln: Anaconda.

In diesem übersichtlich strukturierten Buch bespricht der Autor die umfassende Sammlung mathematischer Rätseleien sowie deren Lösungen von Alkuin von York (735-804 n. Chr.), die mit einigen äußerst prominenten und überraschend modern anmutenden Denkaufgaben aufwartet.

LEUDERS, T., HEFENDEHL-HEBEKER, L., WEIGAND, H.-G. (Hg.) (2009). Mathemagische Momente, Berlin: Cornelsen.

Der Herausgeberband stellt anhand von 20 Exempeln Ideen und Materialien vor, die aufgrund ihres mathemagischen Erlebnispotenzials zu einer stärkeren Schüleraktivierung und -motivierung im Mathematikunterricht führen.

SNAPE, C., SCOTT, H. (1995). Mathematischer Zauberkasten. Stuttgart: Klett.

Dieses Buch beinhaltet eine Kollektion verschiedener Aufgaben, die wechselnden Zeitepochen und verschiedenen Kulturkreisen entstammen sowie hinsichtlich ihres mathematischen Gehaltes stark variieren.