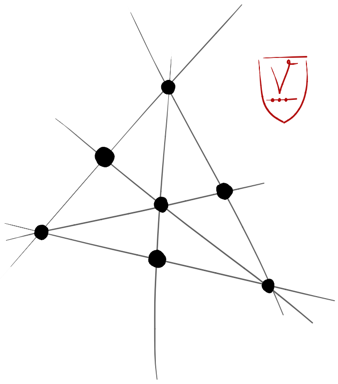
Schülerzirkel Mathematik
Fakultät für Mathematik. Universität Regensburg



Höher, Schneller, Weiter!

Das Extremalprinzip

Das Extremalprinzip ist eine vielseitig einsetzbare Lösungstechnik für mathematische Probleme. Wir werden das Extremalprinzip vorstellen und zeigen wie man es auf Probleme aus verschiedenen mathematischen Gebieten anweden kann.

Zum Beispiel werden wir sehen, dass das folgende Problem elegant mithilfe des Extremalprinzips gelöst werden kann:

Knobelaufgabe. Von der versunkenen sagenumwobenen Stadt Vesterlys ist nur noch die folgende dürftige Beschreibung erhalten: Führt eine Gerade durch die Mittelpunkte zweier Häuser, so gibt es ein weiteres Haus, dessen Mittelpunkt auch auf dieser Geraden liegt. Was kann man aus dieser Beschreibung über die Anordnung der Häuser in Vesterlys ableiten?

Thema vom 2015. Einsenden der Lösungen bis 2015.
Schülerzirkel Mathematik, Fakultät für Mathematik, 93040 Regensburg
http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel, schueler.zirkel@mathematik.uni-regensburg.de

1 Das Extremalprinzip

Die grundlegende Idee des Extremalprinzips lautet:

Extremalprinzip. Betrachte Objekte, die sich dadurch auszeichnen, dass sie gewisse Größen maximieren oder minimieren!

Das Extremalprinzip gibt also einen Ansatzpunkt dafür, wo man mit der Untersuchung eines Problems beginnen kann. Die beiden wichtigsten Quellen für extremale Objekte sind die folgenden Tatsachen (die sich aus dem Induktionsprinzip ableiten):

EP 1 Jede nicht-leere endliche Menge reeller Zahlen enthält eine kleinste und eine größte Zahl.

EP 2 Jede nicht-leere Menge natürlicher Zahlen enthält ein kleinstes Element.

Zum Beispiel folgt aus der ersten Tatsache: Sind endlich viele Punkte in der Ebene gegeben, so gibt es zwei, die maximalen Abstand voneinander haben; im allgemeinen sind solche Punkte jedoch nicht eindeutig.

Das Extremalprinzip legt es daher nahe, sich beim Lösen von Problemen, die folgenden Fragen zu stellen:

- In geometrischen Problemen: Welche Punkte haben den größten bzw. kleinsten Abstand voneinander? Welche Punkte haben der größten bzw. kleinsten Abstand von einem anderen geometrischen Objekt? Welche Winkel sind am größten bzw. kleinsten?
- In zahlentheoretischen Problemen: Welche besonderen Eigenschaften besitzen größte bzw. kleinste Lösungen? Was passiert mit den größten bzw. kleinsten Primfaktoren?
- In graphentheoretischen Problemen: Welche Knoten haben die meisten bzw. wenigsten Nachbarn? Welche Eigenschaften haben längste bzw. kürzeste Zykel?

In allen Fällen ist natürlich jeweils zu überprüfen, ob es überhaupt extremale Objekte gibt.

2 Beispiele

Die Knobelaufgabe vom Anfang übersetzen wir in folgendes mathematische Problem und lösen dieses mit dem Extremalprinzip.

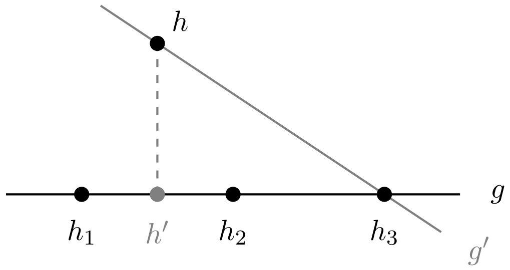


Abbildung 1: Häuser und Geraden in Vesterlys

Beispielaufgabe**.** Sei H eine endliche Menge von Punkten in der Ebene mit folgender Eigenschaft: Führt eine Gerade durch zwei Punkte aus H, so gibt einen weiteren Punkt aus H, der auch auf dieser Geraden liegt. Was kann man daraus über die Anordnung der Punkte aus H ableiten?

Lösung. Wir zeigen, dass die Punkte aus H alle auf einer gemeinsamen Geraden liegen: Dazu verwenden wir einen Widerspruchsbeweis. *Angenommen,* die Punkte aus H liegen *nicht* alle auf einer gemeinsamen Geraden.

Wir setzen nun mit dem Extremalprinzip an: Da H endlich ist, gibt es nur endlich viele Geraden, die mindestens zwei Punkte aus H enthalten; sei G die Menge all solcher Geraden. Dann gibt es ein Paar (h, g) mit h aus H und g aus G, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Der Punkt h liegt nicht auf g und
- der Abstand von h zu g unter all solchen Paaren ist minimal.

Nach Definition von G und der Annahme über H gibt es drei verschiedene Punkte h_1, h_2, h_3 aus H, die auf g liegen. Wir fällen nun das Lot von h auf g; dies liefert den Punkt h' auf g, der am nächsten zu h liegt. Mindestens zwei der drei Punkte h_1, h_2, h_3 liegen auf derselben Seite von h' auf g. Ohne Einschraenkung können wir dabei annehmen, dass die Situation wie in Abbildung 1 aussieht (ansonsten benennen wir die Punkte h_1, h_2, h_3 entsprechend um).

Dann ist aber auch die Gerade g' durch h und h_3 eine Gerade in G und h_2 liegt näher an g' als h an g, im Widerspruch zur Minimalität von (h, g). Damit ist unsere Annahme zum Widerspruch geführt, d.h. die Punkte aus H müssen alle auf einer gemeinsamen Geraden liegen. ◎

Eine klassische Anwendung des Extremalprinzips aus der Zahlentheorie ist Euklids Entdeckung, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wir erinnern daran, dass eine natürliche Zahl $n > 1$ eine *Primzahl* ist, wenn sie außer 1 und n keine weiteren Teiler besitzt.

Beispielaufgabe. Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Lösung. *Angenommen,* es gäbe nur endlich viele Primzahlen. Da 2 eine Primzahl ist, wäre somit die Menge der Primzahlen eine nicht-leere endliche Menge. Also gäbe es nach EP 1 eine größte Primzahl p. Wir betrachten nun die Zahl

$$m := 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot p + 1.$$

Wegen $m > 1$ wird m von mindestens einer Primzahl geteilt. Nach Konstruktion ist jedoch keine der Zahlen $2, 3, \dots, p$ ein Teiler von m, da bei Division durch jede dieser Zahlen stets der Rest 1 bleibt. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass p die größte Primzahl ist.

Also ist die Menge der Primzahlen nicht endlich und damit unendlich.

Wie bei allen Lösungstechniken muss jedoch sauber darauf geachtet werden, ob das Extremalprinzip in der jeweiligen Situation überhaupt anwendbar ist. Wir illustrieren dies an der folgenden, offensichtlich unsinnigen, Aufgabe:

Beispielaufgabe. Zeige, dass $1 < 1$ gilt.

Lösung. Wir „beweisen“ dies mithilfe des Extremalprinzips: Sei m die größte natürliche Zahl, die $m + 2015 < m^2$ erfüllt.

Mit der binomischen Formel erhalten wir $m^2 + 1 \leq (m + 1)^2$. Also ist

$$1 = m^2 + 1 - m^2 \leq (m + 1)^2 - m^2.$$

Nach Wahl von m ist $m^2 > m + 2015$ und aufgrund der Maximalität von m ist $(m + 1)^2 \leq (m + 1) + 2015$. Somit folgt

$$\begin{aligned} 1 &\leq (m + 1)^2 - m^2 \leq m + 1 + 2015 - m^2 \\ &< m + 1 + 2015 - m - 2015 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $1 < 1$, wie behauptet.

Was ist bei der Lösung schiefgelaufen? In der Lösung wird die größte natürliche Zahl m betrachtet, die $m + 2015 < m^2$ erfüllt. Eine solche Zahl kann es jedoch gar nicht geben, da alle natürlichen Zahlen $n > 2015$ die Abschätzung

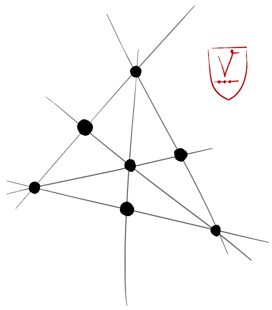
$$n + 2015 < n + n = 2 \cdot n < 2015 \cdot n < n \cdot n = n^2$$

erfüllen.

Zum Abschluss betrachten wir noch die folgende Kuriosität: Es kann keine uninteressanten natürlichen Zahlen geben, denn: Gäbe es uninteressante natürliche Zahlen, so gäbe es nach EP 2 eine kleinste uninteressante natürliche Zahl. Eine Zahl mit dieser Eigenschaft wäre aber natürlich besonders interessant …

3 Aufgaben

Aufgabe 1 (eine Karte von Vesterlys?!*). Professor Mogelpilz hat bei Ausgrabungen die folgende Karte entdeckt:



Er behauptet, das Wappen sei eindeutig das Stadtwappen von Vesterlys und dass es sich bei der Karte um die Anordnung der Häuser in Vesterlys handele; dass diese Anordnung die Beschreibung *Führt eine Gerade durch die Mittelpunkte zweier Häuser, so gibt es ein weiteres Haus, dessen Mittelpunkt auch auf dieser Geraden liegt.* erfülle, sei ja auch gut und deutlich an den eingezeichneten Geraden zu erkennen. Was ist falsch am Argument von Professor Mogelpilz? Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 2 (mehr Primzahlen*). Bestimme die Primfaktorzerlegungen der folgenden Zahlen:

$$\begin{array}{r}
1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 3 + 1 \\
1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5 + 1 \\
1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 7 + 1 \\
1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 11 + 1
\end{array}$$

Aufgabe 3 (schon wieder $1 < 1$?!*). Was ist falsch am folgenden Argument? Begründe Deine Antwort!

Es gilt $1 < 1$, denn: Sei m die größte natürliche Zahl, die $2016 + m = 2015$ erfüllt. Dann folgt

$$1 = 2016 - 2015 = 2016 - 2016 - m = -m \leq 0 < 1,$$

und damit $1 < 1$.

Aufgabe 4 (acht Augen**). Die Oktonier haben ein kreisförmiges Gesicht, dessen Radius genau 2015 oktonische Daumenbreiten beträgt. Jeder Oktonier besitzt in seinem Gesicht genau acht Augen. Zeige, dass jeder Oktonier zwei Augen hat, die weniger als 2015 oktonische Daumenbreiten voneinander entfernt sind. Gib dabei zunächst eine Übersetzung in ein entsprechendes mathematisches Problem an.

Aufgabe 5 (viele Tische).** König Murnetz lädt zu einem pompösen Empfang. Er ordnet daher an, zusätzlich zu seinem Tisch im großen Ballsaal Tische so aufzustellen, dass jeder Tisch der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke zwischen zwei anderen Tischen ist – schließlich soll keiner der Gäste das Gefühl haben, nur am Rande des Geschehens zu sitzen. Zeige, dass die Anordnung von Murnetz nicht mit endlich vielen Tischen zu erfüllen ist. Gib dabei zunächst eine Übersetzung in ein entsprechendes mathematisches Problem an.

Aufgabe 6 (Kompaktheit*).** Es bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Wir betrachten folgende Axiome über kompakte Mengen und stetige Abbildungen:

- K 1 Ist eine Teilmenge von den reellen Zahlen kompakt und nicht-leer, so besitzt sie ein Maximum und ein Minimum.
- K 2 Stetige Abbildungen bilden kompakte Mengen auf kompakte Mengen ab.
- K 3 Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2 \cdot x \\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x - 2 \\ \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

  sind stetig. Dabei bezeichnet $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Menge der reellen Zahlen ungleich 0.
- K 4 Das Einheitsintervall $I := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}$ ist kompakt.

Beweise damit die folgenden Aussagen. Es ist dabei nicht wichtig zu wissen, was die wirklichen Definitionen der Begriffe kompakt bzw. stetig aus der Topologie bedeuten – die obigen Axiome sind ausreichend um die Aufgabe zu bearbeiten.

1. Die Menge $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.
2. Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$ ist kompakt, aber $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4, x \neq 2\}$ ist nicht kompakt.
3. Die folgende Abbildung ist nicht stetig:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$$

Weiterführende Links

Allgemeine Hinweise zum Lösen von Aufgaben: http://www.mathematik.uni-r.de/schuelerzirkel
Induktion: Thema 4 des Schuljahres 2012/2013
Unendliche Mengen: Thema 3 des Schuljahres 2013/2014