THE TEACHING OF MATHEMATICS
1999, Vol. II, 2, pp. 105–118

DIE ENTDECKUNGSGESCHICHTE UND DIE AUSNAHMESTELLUNG EINER BESONDEREN ZAHL: $e = 2{,}71828182845904523536\ldots$

Stefan Krauss

Abstract. Mathematics pupils first learn about the irrational numbers π and e at the secondary school level. While the appearance of π in simple geometrical formulas makes it easy for pupils to grasp its special importance, the significance of e is less clear. The nature of e can best be understood from a historical perspective, In the sixteenth century, work on various mathematical problems led, along different paths, to the discovery of e. In this article, I will outline these paths, and propose that describing them to pupils is the best way to help them understand the uniqueness of e.

AMS Subject Classification: 00 A 35

Key words and phrases: irrational numbers, e, Napier's logarithms.

Einleitung

In der Schule werden die irrationalen Zahlen zumeist über die Betrachtung von Quadratwurzeln (wie z.B. $\sqrt{2}$) eingeführt. Erst später lernen die Schüler auch transzendente irrationale Zahlen kennen. Zwei dieser transzendenten irrationalen Zahlen haben das gesamte Wesen der Mathematik so nachhaltig geändert, daß sie im Verlaufe der Geschichte zu ihrer Bezeichnung einen eigenen Buchstaben bekamen:

$$\pi = 3{,}14159265\ldots \quad \text{und} \quad e = 2{,}71828182846\ldots$$

Eine Möglichkeit, Schülern die Bedeutung der irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und π "vor Augen zu führen", ist deren geometrische Veranschaulichung: $\sqrt{2}$ läßt sich als Diagonale im Einheitsquadrat darstellen und π wird zur Bestimmung des Umfangs und der Fläche eines Kreises benötigt: Ist r der Radius, U der Umfang und F die Fläche eines Kreises, so gelten die beiden Formeln

$$U = 2r\pi \quad \text{und} \quad F = r^2\pi.$$

Das Auftauchen von π und $\sqrt{2}$ bei der Beschreibung einfacher geometrischer Objekte (Kreis, Quadrat) macht es Schülern leicht, die Ausnahmestellung dieser beiden irrationalen Zahlen zu verstehen.

Für die Zahl e gibt es keine so schönen geometrischen Veranschaulichungen wie für π oder für $\sqrt{2}$. Was ist dann aber so "besonders" an $e = 2{,}71828182846\ldots$? Ich möchte in diesem Artikel zeigen, daß die herausragende Stellung der Zahl e am besten mit einem historischen Rückblick verdeutlicht werden kann. Bereits 1933 schreibt Felix Klein in seinem Buch "Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" auf Seite 157: " ... e ist bekanntlich die Basis des natürlichen Logarithmensystems. Die Definition von e [als limes] wird meistens, im wesentlichen nach französischem Muster, in den großen Lehrbüchern der Analysis unvermittelt an die Spitze gestellt, wobei dann freilich gerade das eigentlich wertvolle und erst das Verständnis vermittelnde Element fehlt: *eine Erklärung, warum man gerade diesen Grenzwert als Basis verwendet und die entstehenden Logarithmen natürliche nennt.* Ebenso tritt die Reihenentwicklung vielfach ganz unvermittelt auf. [...] Wollen wir nun *alle die inneren Zusammenhänge* finden, die wir hier vermissen, und die tieferen Gründe kennenlernen, warum jene anscheinend willkürlichen Festsetzungen zu einem vernünftigen Resultate führen müssen – kurz, *wollen wir wirklich zu einem vollen Verständnis der Theorie des Logarithmus vordringen, so wird es am besten sein, wenn wir ihren historischen Werdegang einmal in großen Zügen verfolgen.* ... ". Dieser historische Werdegang der Theorie der Logarithmen ist aber eng verknüpft mit der Geschichte der Entdeckung der Zahl e.

Bei der Einführung der Zahl e wird in Schullehrplänen meist lediglich die Definition von e – mit Verweis auf Leonhard Euler – gegeben und mit den Besonderheiten der *e-Funktion*[1] fortgefahren (siehe z.B. bayerischer Lehrplan, 12. Klasse). Die Geschichte von e begann aber keineswegs erst bei Leonhard Euler, sondern bereits im 16. Jahrhundert. Das Interessante bei der Entdeckungsgeschichte der Zahl e ist dabei, daß es im 16./17. Jahrhundert *drei völlig verschiedenartige Problemstellungen* gab, deren Lösungen letztlich *auf drei unterschiedlichen Wegen* zu der Zahl e führten.

Hier sollen nun diese verschiedenen Wege skizziert werden, da es dies dem Schüler am besten ermöglicht, das "Besondere" der Zahl e zu begreifen und ihre Ausnahmestellung anzuerkennen. Sehr zu empfehlen ist zu diesem Thema auch das Buch "Die Zahl e – Geschichte und Geschichten" von Eli Maor, aus dem hier einige Anregungen übernommen wurden und in dem auf unterhaltsame Weise weitere Hintergründe von e beleuchtet werden.

1. Der Weg zur Entdeckung von e als Basis von Logarithmen: Napiers Logarithmentafeln

In Zeiten, in denen es weder Computer noch Taschenrechner gab, kann man sich gut vorstellen, daß es viel Fleiß erforderte, Aufgaben zu lösen, bei denen des öfteren große Zahlen multipliziert oder dividiert werden mußten. Philipp Melanchthon brachte dies 1517 an der Universität Wittenberg zum Ausdruck: " ... Die Regeln des Vielfachens und Teilens allerdings erfordern viel mehr Fleiß, aber ihr Sinn wird doch sehr bald von den Aufmerksameren eingesehen werden. Übung und Anwendung erfordert diese Fertigkeit wie alle anderen."

Es war der große Verdienst von John Napier (1550–1617; auch Neper geschrieben[2]), Tafeln zu entwickeln, die das Multiplizieren erheblich erleichterten. Napier

[1] Die Bedeutung der *e-Funktion* wird nachhaltig betont, die *Zahl e* selbst jedoch wird meist vernachlässigt.

[2] Napier lebte als Baron und Landbesitzer in Schottland und war studierter Theologe.

interessierte sich hauptsächlich für trigonometrische Berechnungen. Er kannte die Regel

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

und gelangte vermutlich dadurch auf die Idee, Multiplikationen mit leichteren Rechenoperationen durchzuführen. Wahrscheinlich gelangte Napier nun durch den Vergleich von arithmetischen mit geometrischen Folgen auf seine "Rechentafeln":

Bei einer arithmetischen Folge entsteht jedes Glied durch Addition der immer wieder gleichen Zahl zur vorhergehenden. Sei a das Anfangsglied und d die Zahl, die wiederholt addiert wird, so lautet eine solche Folge:

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \quad a+3d, \quad a+4d, \quad \ldots, \quad a_n d.$$

Bei einer geometrischen Folge entsteht jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit ein und der selben Zahl. Sei das Anfangsglied c und die Zahl, mit der wiederholt multipliziert wird, q , so ist die Folge:

$$c, \quad cq, \quad cq^2, \quad cq^3, \quad cq^4, \quad \ldots, \quad cq^n.$$

Ist q größer als 1, werden die Glieder der geometrischen Folge immer größer. Liegt q zwischen 0 und 1, werden die Glieder immer kleiner. Schreibt man nun beide Folgen übereinander, ergibt sich folgendes Bild:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{arithmetische Folge:} & a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & \ldots, & a+nd \\ \text{geometrische Folge:} & c, & cq, & cq^2, & cq^3, & cq^4, & \ldots, & cq^n \end{array}$$

Wählt man nun feste Werte für die Konstanten a, d, c und q, erhält man eine Tabelle, mit deren Hilfe man Multiplikationen durchführen kann.

Setzt man zum Beispiel $a = 0$, $d = 1$, $c = 1$ und $q = 2$, erhält man folgende "Tafel":

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...

Will man nun zwei Zahlen x und y aus der unteren Zeile miteinander multiplizieren, muß man die beiden darüberliegenden Zahlen addieren. Unter dem in der oberen Zeile abzulesenden Ergebnis dieser Addition steht nun in der unteren Zeile das Ergebnis der Multiplikationsaufgabe $x \cdot y$.

BEISPIEL. Um 8 mit 512 zu multiplizieren, muß man die beiden darüberstehenden Zahlen addieren: $3 + 9 = 12$. Unter der 12 steht nun das Ergebnis der Multiplikation $8 \cdot 512 = 4096$.

In der Tafel stehen in der unteren Reihe die Potenzen von 2 und in der oberen Reihe die zugehörigen Exponenten. Bezeichnet man die Zahlen in der oberen Reihe mit x und die in der unteren Reihe mit y, so gilt: $y = 2^x$.

Strenggenommen findet sich bereits bei Michael Stifel (1487–1567) in seiner "Arithmetica integra" (erschienen 1544 in Nürnberg) die erste veröffentlichte numerische Tafel dieser Art:

schreibt Felix Klein in seinem Buch "Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus" auf Seite 157: " ... e ist bekanntlich die Basis des natürlichen Logarithmensystems. Die Definition von e [als limes] wird meistens, im wesentlichen nach französischem Muster, in den großen Lehrbüchern der Analysis unvermittelt an die Spitze gestellt, wobei dann freilich gerade das eigentlich wertvolle und erst das Verständnis vermittelnde Element fehlt: *eine Erklärung, warum man gerade diesen Grenzwert als Basis verwendet und die entstehenden Logarithmen natürliche nennt.* Ebenso tritt die Reihenentwicklung vielfach ganz unvermittelt auf. [...] Wollen wir nun *alle die inneren Zusammenhänge* finden, die wir hier vermissen, und die tieferen Gründe kennenlernen, warum jene anscheinend willkürlichen Festsetzungen zu einem vernünftigen Resultate führen müssen – kurz, *wollen wir wirklich zu einem vollen Verständnis der Theorie des Logarithmus vordringen, so wird es am besten sein, wenn wir ihren historischen Werdegang einmal in großen Zügen verfolgen. ...* ". Dieser historische Werdegang der Theorie der Logarithmen ist aber eng verknüpft mit der Geschichte der Entdeckung der Zahl e.

Bei der Einführung der Zahl e wird in Schullehrplänen meist lediglich die Definition von e – mit Verweis auf Leonhard Euler – gegeben und mit den Besonderheiten der *e-Funktion*[1] fortgefahren (siehe z.B. bayerischer Lehrplan, 12. Klasse). Die Geschichte von e begann aber keineswegs erst bei Leonhard Euler, sondern bereits im 16. Jahrhundert. Das Interessante bei der Entdeckungsgeschichte der Zahl e ist dabei, daß es im 16./17. Jahrhundert *drei völlig verschiedenartige Problemstellungen* gab, deren Lösungen letztlich *auf drei unterschiedlichen Wegen* zu der Zahl e führten.

Hier sollen nun diese verschiedenen Wege skizziert werden, da es dies dem Schüler am besten ermöglicht, das "Besondere" der Zahl e zu begreifen und ihre Ausnahmestellung anzuerkennen. Sehr zu empfehlen ist zu diesem Thema auch das Buch "Die Zahl e – Geschichte und Geschichten" von Eli Maor, aus dem hier einige Anregungen übernommen wurden und in dem auf unterhaltsame Weise weitere Hintergründe von e beleuchtet werden.

1. Der Weg zur Entdeckung von e als Basis von Logarithmen: Napiers Logarithmentafeln

In Zeiten, in denen es weder Computer noch Taschenrechner gab, kann man sich gut vorstellen, daß es viel Fleiß erforderte, Aufgaben zu lösen, bei denen des öfteren große Zahlen multipliziert oder dividiert werden mußten. Philipp Melanchthon brachte dies 1517 an der Universität Wittenberg zum Ausdruck: " ... Die Regeln des Vielfachens und Teilens allerdings erfordern viel mehr Fleiß, aber ihr Sinn wird doch sehr bald von den Aufmerksameren eingesehen werden. Übung und Anwendung erfordert diese Fertigkeit wie alle anderen."

Es war der große Verdienst von John Napier (1550–1617; auch Neper geschrieben[2]), Tafeln zu entwickeln, die das Multiplizieren erheblich erleichterten. Napier

[1] Die Bedeutung der *e-Funktion* wird nachhaltig betont, die *Zahl e* selbst jedoch wird meist vernachlässigt.

[2] Napier lebte als Baron und Landbesitzer in Schottland und war studierter Theologe.

interessierte sich hauptsächlich für trigonometrische Berechnungen. Er kannte die Regel

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

und gelangte vermutlich dadurch auf die Idee, Multiplikationen mit leichteren Rechenoperationen durchzuführen. Wahrscheinlich gelangte Napier nun durch den Vergleich von arithmetischen mit geometrischen Folgen auf seine "Rechentafeln":

Bei einer arithmetischen Folge entsteht jedes Glied durch Addition der immer wieder gleichen Zahl zur vorhergehenden. Sei a das Anfangsglied und d die Zahl, die wiederholt addiert wird, so lautet eine solche Folge:

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\quad a+4d,\quad \ldots,\quad a_n d.$$

Bei einer geometrischen Folge entsteht jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit ein und der selben Zahl. Sei das Anfangsglied c und die Zahl, mit der wiederholt multipliziert wird, q , so ist die Folge:

$$c,\quad cq,\quad cq^2,\quad cq^3,\quad cq^4,\quad \ldots,\quad cq^n.$$

Ist q größer als 1, werden die Glieder der geometrischen Folge immer größer. Liegt q zwischen 0 und 1, werden die Glieder immer kleiner. Schreibt man nun beide Folgen übereinander, ergibt sich folgendes Bild:

$$\begin{array}{llllllll} \text{arithmetische Folge:} & a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & \ldots, & a+nd \\ \text{geometrische Folge:} & c, & cq, & cq^2, & cq^3, & cq^4, & \ldots, & cq^n \end{array}$$

Wählt man nun feste Werte für die Konstanten a, d, c und q, erhält man eine Tabelle, mit deren Hilfe man Multiplikationen durchführen kann.

Setzt man zum Beispiel $a = 0$, $d = 1$, $c = 1$ und $q = 2$, erhält man folgende "Tafel":

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...

Will man nun zwei Zahlen x und y aus der unteren Zeile miteinander multiplizieren, muß man die beiden darüberliegenden Zahlen addieren. Unter dem in der oberen Zeile abzulesenden Ergebnis dieser Addition steht nun in der unteren Zeile das Ergebnis der Multiplikationsaufgabe $x \cdot y$.

BEISPIEL. Um 8 mit 512 zu multiplizieren, muß man die beiden darüberstehenden Zahlen addieren: $3 + 9 = 12$. Unter der 12 steht nun das Ergebnis der Multiplikation $8 \cdot 512 = 4096$.

In der Tafel stehen in der unteren Reihe die Potenzen von 2 und in der oberen Reihe die zugehörigen Exponenten. Bezeichnet man die Zahlen in der oberen Reihe mit x und die in der unteren Reihe mit y, so gilt: $y = 2^x$.

Strenggenommen findet sich bereits bei Michael Stifel (1487–1567) in seiner "Arithmetica integra" (erschienen 1544 in Nürnberg) die erste veröffentlichte numerische Tafel dieser Art:

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6				
1/8	1/4	1/2	1	2	4	84	16	32	64				

(Stifels Konstanten: $a = -3$, $c = \frac{1}{8}$, $d = 1$, $q = 2$)

Beide Tafeln haben aber offenbar den Nachteil, daß die Zahlen der unteren Reihe für größer werdende Exponenten sehr weit auseinander liegen und damit nur wenige sehr spezielle Multiplikationen durchgeführt werden können. Wenn man zum Vergleich der allgemeinen arithmetischen Folge mit der allgemeinen geometrischen Folge zurückkehrt, sieht man, daß man q nahe bei eins wählen muß, um in der unteren Zeile kleinere Abstände zu bekommen[3]:

Je mehr sich q der Zahl 1 nähert, desto kleiner werden die Abstände der Zahlen in der unteren Zeile und desto mehr verschiedene Multiplikationen sind mit der Tabelle möglich.

Oder, setzt man $q = 1 + k$ und betrachtet $k \to 0$:

Je kleiner k vom Betrage her ist, desto größer ist die praktische Bedeutung der Tafel zur Durchführung von Multiplikationen.

Aber Vorsicht: Man sieht auch, daß man q nicht zu *nahe* bei 1 wählen darf, da die Potenzen sonst zu langsam wachsen und die Tafel somit wieder von geringem praktischen Nutzen wäre. Um den Tafeln wirkliche Bedeutung für das praktische Rechnen zu verschaffen, fehlte Stifel außerdem ein wichtiges Hilfsmittel: Der sichere Umgang mit Dezimalbrüchen. Stifel hatte jedoch bereits eine Vorstellung von der Bedeutung solcher Tafeln; er schreibt, daß man über diese merkwürdigen Zahlenbeziehungen ein ganzes Buch schreiben könnte.

Auch Napier fühlte sich noch unwohl in der Verwendung von Dezimalbrüchen (Sie waren zwar im alten China schon länger bekannt und auch im Mittelalter in Arabien vorhanden, in Europa jedoch waren sie erst kürzlich eingeführt worden). Was aber sollte Napier für k wählen? Er wählte für $k = -0{,}0000001$ (bzw. $q = 0{,}9999999$) und folgte damit der damals üblichen Praxis, bei trigonometrischen Berechnungen den Radius des Einheitskreises in 10^7 Teile zu unterteilen. Wenn man von der vollen Einheit den 10^7-ten Teil abzieht, erhält man die in diesem System der 1 am nächsten liegende Zahl. Diese Zahl ($1 - 10^{-7}$ oder 0,9999999) bezeichnete Napier als "Proportion" und verwendete sie als Grundlage seiner Tafeln. Napiers erste Tafel begann mit $c = 10^7$ (was einer Skalierung entspricht), gefolgt von $10^7(1-10^{-7})^1$, danach $10^7(1-10^{-7})^2$ usw. Außerdem rechnete er zahlreiche weitere Tafeln aus, die er 1614 alle zusammen unter dem Titel "Descriptio mirifici logarithmorum canonis" (Beschreibung der wunderbaren Regel der Logarithmen) veröffentlichte. Napier verwendete das Wort "Logarithmus" damit zum ersten Mal, und zwar für den Exponenten L in seiner Darstellung

$$N = 10^7(1 - 10^{-7})^L.$$

Ursprünglich nannte Napier L dabei "künstliche Zahl". Allerdings unterschied sich sein "Logarithmus" in wesentlichen Punkten von der heutigen Definition. Die

[3]Es spielt dabei keine Rolle, ob sich q von oben oder von unten der 1 nähert.

heutige Logarithmusdefinition

$$N = b^L \leftrightarrow L = \log_b N$$

wurde 1728 von Leonhard Euler (1707–1783) gegeben. L ist hier der Logarithmus von N *zur Basis b*. Folgende Übersicht verdeutlicht die wesentlichsten Unterschiede:

Napier	Euler
$N = 10^7(1-10^{-7})^L$ $L = 0 \leftrightarrow N = 10^7$ Logarithmen fallend $L(N_1 \cdot N_2) \neq L(N_1) + L(N_2)$	$N = b^L \leftrightarrow L = \log_b N$ $L = 0 \leftrightarrow N = 1$ Logarithem steigend $L(N_1 \cdot N_2) = L(N_1) + L(N_2)$

Was hat das nun alles mit der Zahl e zu tun? "Reskaliert" man Napiers Variablen N und L – indem man sie durch 10^7 teilt – erhält man die Gleichung

$$N' = [(1 - 10^{-7})^{10^7}]^{L'}.$$

In dieser Schreibweise steht der Ausdruck in eckigen Klammern für das b der Basis in Eulers Logarithmusdefinition. $(1 - 10^{-7})^{10^7}$ ist aber nur eine andere Schreibweise für $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ und dies liegt sehr nahe bei $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$. Der Limes dieser Folge ist aber, wie wir heute wissen, genau $1/e$. Es handelt sich bei Napiers Logarithmen also grob gesprochen um Logarithmen zur Basis $1/e$. Manche Autoren schreiben deswegen Napier die Entdeckung der Zahl e zu. Andere betonen allerdings, Napier habe e nur "fast" entdeckt: "fast", da sich seine Überlegungen eben noch nicht auf den Begriff der Basis gestützt haben.

In Deutschland beschäftigte sich zeitgleich mit Napier Joost Bürgi (1552–1632) mit solchen Tafeln. Offenbar entwickelte Bürgi seine Tafeln bereits 1588, doch leider veröffentlichte er sie erst 1620 anonym in Prag, also sechs Jahre nach Napier. Johannes Kepler nannte ihn deshalb einen "Cunctator" (Zauderer) und einen "secretorum suorum custos" (Hüter seiner Geheimnisse). Bürgis Tafel erschien unter dem Titel "Arithmetische vnd Geometrische Progreß Tabul. sambt gründlichen vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen vnd verstanden werden soll". Er wählte für $k = 0{,}0001$ (bzw. $q = 1{,}0001$).

Wissenschaftliche Verwendung fanden die Logarithmentafeln allerdings erst, als 1620 ein mechanisches Instrument auf den Markt kam, mit deren Hilfe man Berechnungen mit den Logarithmentafeln durchführen konnte: Der Rechenschieber. Dann allerdings wurde die neue Idee begeistert aufgenommen. Kepler trug zur Verbreitung der Logarithmen in Deutschland bei. Edward Wright übersetzte sie ins Englische und Napier selbst bekam Besuch von hochrangigen Mathematikern, die sich für seine Tafeln interessierten. Pierre Simon de Laplace (1749–1827) sagte einmal rückblickend: "Durch Verkürzung der Arbeit verdoppelten die Logarithmen die Leben der Astronomen." Napier selbst jedoch verbrachte zwanzig Jahre seines Lebens (von 1594–1614) damit, seine Tafeln per Hand auszurechnen. Heute würde man diese Arbeit mit Hilfe eines Taschenrechners in wenigen Stunden erledigen.

Wie bereits einleitend angekündigt, gab es – abgesehen von Napiers Logarithmentafeln – noch andere Wege zur Entdeckung der Zahl e. Einer davon führte über ein damals wie heute aktuelles Thema: Geld.

2. Der Weg zur Darstellung von e als Grenzwert einer Folge: Die Zinsrechnung

Im Louvre in Paris steht eine Tontafel aus Mesopotamien aus dem 17. Jhd. vor Chr. Auf ihr steht zu lesen: "In welcher Zeit verdoppelt sich ein Geldbetrag, der zu jährlich 20% Zinsen angelegt wird?" Im II Buch Mose, Kapitel 22, Vers 24, steht demgegenüber: "Wenn du meinem Volke Geld leihst, ... so handle an ihm nicht wie ein Wucherer; ihr sollt ihm keinen Zins auflegen."

Eli Maor schreibt hierzu: "Seit undenklichen Zeiten standen finanzielle Dinge im Mittelpunkt des menschlichen Interesses. Kein anderer Aspekt des Lebens gehört wohl mehr zu den weltlichen Dingen des Daseins, als der Drang, Wohlstand und finanzielle Sicherheit zu erlangen. Es dürfte daher einige Überraschung hervorgerufen haben, als ein anonymer Mathematiker – vielleicht war es auch ein Kaufmsann oder Geldverleiher – im frühen 17. Jhd. auf einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen Art und Weise des Anwachsens von Geld und dem Verhalten eines bestimmten mathematischen Ausdrucks im Unendlichen stieß."

Der Schweizer Jakob Bernoulli (1654–1705) eröffnete die Zinsdiskussion von mathematischer Seite aus, indem er folgende Frage stellte: "Quaeritur, si creditor aliquis pecuniam suam foenori exponat, ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usurae annuae sorti annumeretur; quantum ipsi finito anno debeatur?" Es wird also gefragt, wenn irgendein Gläubiger sein Geld auf Zinsen ausleiht unter der Bedingung, daß *in den einzelnen Augenblicken* ein proportionaler Teil des Jahreszins zum Kapital geschlagen wird, wieviel ihm dann nach Ablauf des Jahres geschuldet wird.

Sparkassen z.B. zahlen ihre Zinsen nur einmal im Jahr aus. Hat man bei einer Sparkasse ein Guthaben von a (in einer beliebigen Währung) und beträgt der Zinssatz 5%, so erhält man am Ende des Jahres zu seinem Guthaben noch $(1/20)a$ zugeschrieben, man hat also nach einem Jahr

$$a + \frac{1}{20}a = a\left(1 + \frac{1}{20}\right).$$

Würden die Zinsen halbjährlich zugeschrieben werden (wie das z.B. bei Pfandbriefen der Fall ist), hätte man nach einem halben Jahr

$$a + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}a = a\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}\right).$$

Wenn man nun nach einem halben Jahr dieses vermehrte Kapital wieder als Pfandbrief anlegt, hat man am Ende des gesamten Jahres

$$a\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}\right) = a\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}\right)^2.$$

Bei vierteljährlicher Zinszahlung hat man am Ende des Jahres bereits $a\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{20}\right)^4$. Bei monatlicher Zinszahlung $a\left(1 + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{20}\right)^{12}$.

Man kann sehen, daß der Kontostand am Ende des Jahres umso höher ist, je öfter im Jahr Zinsen gezahlt werden. Bei n-maliger Zinszahlung hat man am Ende des Jahres

$$a\left(1 + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{20}\right)^n.$$

Bernoullis Frage ist nun, ob man durch Verträge, die n immer höher setzen, beliebig große Reichtümer erhalten kann. Dabei geht er nicht von einem festen Prozentsatz von 5% aus, sondern von einem beliebigen Prozentsatz x. Am Ende des Jahres hat man also ein Guthaben von

$$a\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Um festzustellen, ob der Faktor $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, um den sich das Vermögen a am Ende des Jahres vermehrt hat, über alle Schranken wächst, kann man $x = 1$ wählen. Dies entspräche zwar einem unrealistischen Zinssatz von 100%, aber man kann zeigen, daß nicht einmal dann der Reichtum sehr groß wird: Der in diesem Fall zu berechnende Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist nämlich $e = 2{,}71828182846\ldots$.

Der Beweis dieses Ergebnisses erfordert einigen Aufwand (siehe dazu z.B. Eli Maor). Der Ausdruck $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ wird heute auch als eine der Möglichkeiten verwendet, um die Zahl e zu definieren, also:

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Was bedeutet dieses Ergebnis nun für die Aufgabe von Jakob Bernoulli? Selbst bei stetiger Verzinsung und einem Zinssatz von 100% hat man – ausgehend von einem Betrag a in einer beliebigen Währung – am Ende des Jahres nur ein Guthaben von $a\cdot e$, also $2{,}7182\ldots$ mal soviel Geld wie am Anfang des Jahres. Zur Erinnerung: Bei einer einmaligen Auszahlung der Zinsen am Ende des Jahres bei einem Zinssatz von ebenfalls 100% hätte man am Ende des Jahres einen Betrag von $a \cdot 2$, also doppelt soviel wie am Anfang. Mit der stetigen Verzinsung ist also kein unendlicher Reichtum zu erlangen!

Abgesehen von Napiers Rechentafeln und Fragen nach dem Wachstum von Vermögen gibt es noch ein weiteres davon unabhängiges Problem, das auf die Zahl e führt.

3. Der Weg zur Darstellung von e als Summe einer unendlichen Reihe: Die Quadratur der Hyperbel des Apollonius

Zu Beginn des 17. Jahrhunderts unternahmen einige Mathematiker zeitgleich den Versuch, die Fläche unter dem Graphen der Funktion $y = 1/x$ im kartesischen Koordinatensystem zu bestimmen. Der Franzose Pierre de Fermat (1601–1665) z.B. betrachtete allgemein die Flächeninhalte unter den Funktionen $y = x^n$ für $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ von $x = 0$ bis $x = a$ und fand dafür die Formel $F = \dfrac{a^{n+1}}{n+1}$ durch Approximation dieser Flächen mit Rechtecken.

Doch leider versagt diese Formel genau für die Funktion $y = 1/x$, da in diesem Fall der Nenner von F gleich 0 und F somit nicht definiert ist[4]. Eli Maor schreibt, daß Fermat ziemlich frustriert gewesen sein muß, diesen wichtigen Fall nicht behandeln zu können. Aber er verbarg seine Enttäuschung hinter folgenden Worten: "Ich sage, daß alle diese unendlich vielen Hyperbeln mit Ausnahme derjenigen des Apollonius (der Hyperbel $y = 1/x$) ... mit Hilfe der Methode der geometrischen Progression nach einer uniformen und allgemeinen Prozedur quadriert werden können." Fermat verwendete zur Approximation Rechtecke (siehe Abb. 1). Dabei wählte er r so, daß die Intervalle OK, OL, OM, ON eine fallende geometrische Folge bildeten:

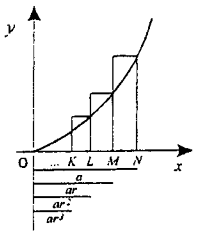

Abb. 1

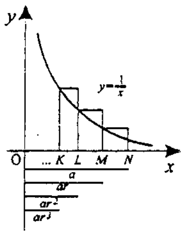

Abb. 2

Der belgische Jesuit Grégorie de Saint-Vincent (1584–1667) entdeckte als erster, daß die Rechtecke dieser Art genau für die Hyperbel des Apollonius, also für $y = 1/x$, *gleiche Flächen* haben (Abb. 2).

Das bedeutet aber, daß die Gesamtfläche der Rechtecke mit geometrisch wachsendem Abstand vom Ursprung *arithmetisch* wächst. Bei Napiers Rechentafeln sahen wir, daß der Zusammenhang zwischen einer geometrisch wachsenden Größe und einer arithmetisch wachsenden Größe *logarithmisch* ist.

Also: *Bei der Hyperbel des Apollonius ist die Beziehung zwischen der Gesamtfläche von Fermats' Rechtecken und der Grundlinie dieser Rechtecke logarithmisch.*

Einer der Studenten von Saint-Vincent, Alfonso Anton de Sarasa (1618–1667) schrieb diese Beziehung explizit nieder: $F(t) = \log t$. Er verwendete damit als erster

[4]Dies hat nichts mit der Definitionslücke von $y = 1/x$ bei $x = 0$ zu tun, sondern gilt auch, wenn man die Fläche unter $y = 1/x$ z.B. von $x = 1$ bis $x = a$ betrachtet.

die logarithmische *Funktion*. Bis dahin nämlich waren Logarithmen hauptsächlich als Rechenmittel angesehen. De Sarasa bezog sich aufgrund der Definitionslücke von $y = 1/x$ bei $x = 0$ auf die Fläche unter der Hyperbel von $x = 1$ bis $x = t$ (Abb. 3).

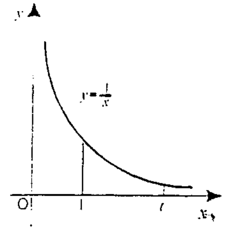

Abb. 3

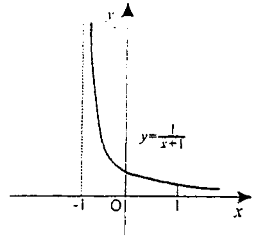

Abb. 4

Doch leider eignete sich die richtige Formel $F(t) = \log t$ noch nicht für numerische Berechnungen, da in ihr keine spezielle Basis auftritt. Es ist nicht möglich, eine beliebige Basis zu wählen, denn die Fläche unter der Hyperbel existiert unabhängig von einer speziellen Basis. Vergleichbar damit wäre die folgende Situation: Die Formel für die Beziehung zwischen Fläche und Radius eines Kreises $F = kr^2$ ist zwar bekannt, aber der genaue Wert von k (in diesem Fall also π) konnte noch nicht bestimmt werden.

Die Frage war also:

$$F(t) = \log_? t.$$

Heute wissen wir, daß gilt $F(t) = \log_e t$ und schreiben dafür auch

$$F(t) = \ln t.$$

Diesen Logarithmus zur Basis e nennt man den "natürlichen Logarithmus". Der Weg, der nun auf die Definition von e als *Reihe* führte, wurde zuerst von Isaac Newton (1643–1727) beschritten. Newton benutzte die Binomialentwicklung für $(a + b)^n$, die er als erster auch auf negative und sogar auf gebrochene n ausdehnte, um Gleichungen von Kurven als Potenzreihen auszudrücken. Diese unendlichen Reihen in der Veränderlichen x integrierte er nun gliedweise, indem er die Fermatsche Formel $x^{n+1}/(n+1)$ auf jedes einzelne Glied der Reihe anwandte. Newtons besonderes Interesse galt der Gleichung $y = 1/(x+1)$: Er verschob die Hyperbel des Apollonius entlang der x-Achse um eine Einheit nach links, um für die Flächenbetrachtung wieder, wie Fermat, bei $x = 0$ beginnen zu können (Abb. 4).

Für die Fläche unter dieser Hyperbel von 0 bis t fand er die Formel $\log(1 + t)$ und dafür wiederum die Reihe

$$\log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots.$$

Zum ersten Mal war es nun theoretisch möglich, die Fläche unter der Hyperbel numerisch zu berechnen und das, obwohl die Basis immer noch nicht bekannt war.

Statt die Basis zu bestimmen, rechnete Newton einfach *genau den* Logarithmus aus, der zu der Fläche unter der Hyperbel des Appolonius gehörte. Praktisch jedoch hatte diese Methode keinen Nutzen, da diese Reihe zu langsam konvergiert. Leider veröffentlichte Newton seine Entdeckung nicht und fühlte sich um die ihm gebührende Anerkennung betrogen, als der Holsteiner Nicolaus Mercator (1620–1687) in seinem Buch "Logarithmotechnica" (erschienen 1668) diese Potenzreihe für den Logarithmus erstmals veröffentlichte.

Erst seit Leonhard Eulers Buch "Introductio in Analysis Infinitorum" 1748 erschienen war, nahm die Zahl e einen zentralen Platz in der Mathematik ein. Euler war es auch, der als erster den Buchstaben e für die Zahl $2{,}71828182846\ldots$ verwendete: "Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc $2{,}71828\ldots$ constanter litteram $e\ldots$ " heißt es auf S.90 dieses Buches. Erstmalig findet sich die Verwendung des Buchstaben jedoch bereits in einem Manuskript von Euler, das auf 1727 oder 1728 datiert wird (das allerdings erst 1862 veröffentlicht wurde). In der "Introductio in Analysis Infinitorum" entwickelt Euler auch die Exponentialreihe. Das Vorgehen Eulers faßt Felix Klein in wenigen Worten zusammen: An die Spitze seiner Entwicklung stellt Euler (wie Newton) den binomischen Satz:

$$(1+k)^m = 1 + \frac{m}{1}k + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}k^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3 + \cdots.$$

Diese Entwicklung spezialisiert er für den Ausdruck $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{ny}$ wobei er nur ganzzahlige ny betrachtet. Er läßt dann n (unter Aufrechterhaltung der Bedingung ny ganzzahlig) zur Grenze ∞ übergehen und nimmt in der Reihenentwicklung diesen Grenzprozeß in jedem einzelnen Gliede vor. So erhält er:

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots$$

wobei e durch $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ definiert ist. Diese Herleitung verdeutlicht auch den Zusammenhang zwischen den beiden heute üblichen Definitionen von e, denn für $y=1$ liefert diese Reihe nun ebenfalls die Zahl e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots.$$

Zwar hat bereits Newton 1669 in einer Jugendarbeit mit dem Titel "De analysi per aequationes numero terminorum infinitas" (die erst später gedruckt wurde) durch die Methode der *Reihenumkehr* aus seiner Logarithmusreihe diese Exponentialreihe – sogar ohne die Definition $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ zu benutzen – gewonnen, aber erst Euler führte in seinem Buch "Introductio in Analysin Infinitorum" den Buchstaben e ein und verwendete diese Zahl dann auch für zahlreiche andere Herleitungen. Deswegen heißt die Zahl e heute auch "Eulersche Zahl".

4. Ausblicke

4.1. Die Reihendarstellung und die Limesdarstellung im Vergleich. Wir wollen nun die beiden Darstellungen von e miteinander vergleichen: Es stellt sich heraus, daß die Reihendarstellung von e wesentlich schneller konvergiert als die Limesdarstellung:

	$e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$e := \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$
$n=2$	2,25	2,5
$n=4$	2,44...	2,70...
$n=6$	2,52...	2,718...
$n=8$	2,56...	2,71827...
$n=10$	2,59...	2,7182818...

Die Reihendarstellung hat weiterhin den Vorteil, daß man damit gut Rechnungen mit e anstellen kann. Dafür sollen nun zwei Beispiele folgen: Erstens die *Berechnung* von e selbst und zweitens der Beweis, daß e *wirklich irrational* ist.

Die Darstellung als Reihe $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ gestattet es (im Gegensatz zur Limesdarstellung), e mit beliebiger Genauigkeit zu *berechnen*: Die Summe der ersten 13 Glieder (also von $1/0!$ bis $1/12!$) ist 2,71828183. Der Fehler, d.h. die Differenz zwischen diesem Wert und dem wahren Wert von e, läßt sich mit Hilfe der geometrischen Reihe abschätzen. Die Differenz beträgt nämlich:

$$\frac{1}{13!} + \frac{1}{14!} + \frac{1}{15!} + \cdots$$

und es gilt:

$$\frac{1}{13!} + \frac{1}{14!} + \frac{1}{15!} + \cdots < \frac{1}{13!}\left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{13^3} + \cdots\right) = \frac{1}{13!}\frac{1}{1-\frac{1}{13}} = \frac{1}{12\cdot 12!}.$$

Dieser Wert beeinflußt aber die achte Stelle der Differenz nicht mehr. Berücksichtigt man einen möglichen Fehler in der letzten Stelle, hat man e (als 2,7182818) durch die ersten 13 Glieder der Reihe auf 7 Stellen genau.

Mit der Reihendarstellung läßt sich aber noch mehr über e herausfinden. Man kann durch einen Widerspruchsbeweis zeigen, daß e wirklich irrational ist: Angenommen, e wäre eine rationale Zahl in der Form $e = p/q$ mit zwei ganzen Zahlen p und q. Dabei wäre $q \geqslant 2$, da offensichtlich $2 < e < 3$. Wenn $q = 1$ wäre, würde $e = p/1$ eine ganze Zahl zwischen 2 und 3 sein, was unmöglich ist. Man betrachte jetzt die Reihendarstellung

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

also $\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$. Multipliziert man nun beide Seiten mit $q!$, erhält man auf der linken Seite

$$\frac{p}{q}\cdot q! = \frac{p}{q}\cdot q(q-1)(q-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = p(q-1)(q-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

und auf der rechten Seite

$$[q!+q!+3\cdot 4\cdot\ldots\cdot q+4\cdot 5\cdot\ldots\cdot q+\cdots+(q-1)q+q+1]+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots.$$

Auf der linken Seite steht offenbar eine ganze Zahl. Auf der rechten Seite ist der Ausdruck in eckigen Klammern ebenfalls eine ganze Zahl. Man kann nun aber sehen, daß der Rest eine positive Zahl $< 0{,}5$ ist: Da $q \geqslant 2$ ist jedes Glied der Reihe

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)+\cdots}$$

nicht größer als das entsprechende Glied der Reihe $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots$ deren Summe

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

ist. Also erhält man einen Widerspruch zur Annahme, denn eine ganze Zahl plus eine positive Zahl, die kleiner als 0,5 ist, kann keine ganze Zahl sein. Daß e wirklich irrational ist, wurde übrigens zuerst von Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) bewiesen. Daß e *transzendent* ist, zeigte erstmals Charles Hermite (1822–1901).

4.2. Interessante Zahlenbeziehungen mit *e*. Zum Abschluß sollen zur Zahl e noch einige bemerkenswerte Zahlenspielereinen und einige interessante Aufgaben vorgestellt werden, die auch gut in einer Unterrichtsstunde verwendet werden können.

1) Die positive ganze Zahl 2 läßt sich mit Hilfe von e als unendliches Produkt darstellen:

$$2=\frac{e^1}{e^{1/2}}\cdot\frac{e^{1/3}}{e^{1/4}}\cdot\frac{e^{1/5}}{e^{1/6}}\cdots.$$

2) Euler zeigte 1746, daß der komplexe Ausdruck i^i unendlich viele reelle Werte annimmt:

$$i^i=e^{-(\pi/2+2k\pi)}$$

mit $k=\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$.

3) e tritt als Lösung folgender Aufgabe auf: Für welche reelle Zahl x ist der Ausdruck $\sqrt[x]{x}$ maximal?

4) Die beste rationale Approximation von e mit Hilfe ganzer Zahlen unter 1000 ist:

$$\frac{878}{323}=2{,}718266254\ldots$$

5) Wenn n Briefe in n adressierte Umschläge gesteckt werden, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß jeder Brief in einen falschen Umschlag gesteckt wird? Für $n\to\infty$ geht diese Wahrscheinlichkeit gegen $1/e = 0{,}367879441\ldots$.

6) $e^{e^e} = 3814279{,}104\ldots$. Die nächste Zahl dieser Folge, $e^{e^{e^e}}$, hat bereits 1656521 (ganzzahlige) Stellen!

7) Euler fand auch folgende *unendliche Kettenbrüche* für e:

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}}}}}$$

bzw.:

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cdots}}}}}$$

8) Ein Bankdirektor muß eine neue Sekretärin einstellen. Die Bewerberinnen stellen sich der Reihe nach vor. Eine einmal abgewiesene Sekretärin kann nicht mehr gewählt werden. Während der Vorstellungsgespräche fertigt der Direktor eine Rangliste über die Qualität der Bewerberinnen an. Wenn man davon ausgeht, daß der Direktor die beste aller Bewerberinnen einstellen möchte, wieviel Prozent aller erwarteten Bewerberinnen sollte er dann abwarten, bis er die nächste Bewerberin, die seine bisherige Nummer eins schlägt, endgültig wählt?

Er sollte $1/e$ (= 36,8%) aller potentiellen Berberinnen abwarten. Daß er dann mit der Wahl der Nächstbesten die beste aller Bewerberinnen trifft, hat eine (mit dieser Strategie maximale) Wahrscheinlichkeit von ebenfalls $1/e$ (= 36,8%).

9) **Die Jahrhundert formel.** Wenn man heute einen Mathematiker fragt, welche die drei berühmtesten Zahlen seien, werden sicherlich folgende Zahlen genannt:

$$\pi = 3{,}14159265\ldots, \qquad e = 2{,}71828182846\ldots \quad \text{und} \quad i=\sqrt{-1}.$$

Interessanterweise verdanken wir Euler nicht nur den Buchstaben e, sondern auch die Buchstaben für die anderen beiden Zahlen i und π. (Es gibt auch Autoren, die schreiben, daß der griechische Buchstabe π für die Zahl 3.14159265 ... schon vor Euler verwendet wurde). Die ersten beiden Zahlen sind irrational und – geometrisch betrachtet – bestehen folgende Beziehungen:

Kreis: Fläche $F = r^2\pi$ insbesondere: $F=\pi$, falls $r=1$.

Hyperbel: Fläche $F=\log_e x$ insbesondere: $F=1$, falls $x=e$.

Kann man also e und π durch diese geometrischen Beziehungen eine gewisse Verwandtschaft zuerkennen, so scheint zumindest für die komplexe Zahl i, welche die Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ darstellt, weder mit e noch mit π irgendein Zusammenhang zu bestehen.

Euler jedoch fand, daß

$$e^{i\pi} = -1.$$

Diese Gleichung gehört zu den schönsten Formeln der gesamten Mathematik. Sie spricht Mystiker, Wissenschaftler, Philosophen und Mathematiker gleichermaßen an. Die vier Konstanten repräsentieren die vier Hauptzweige der klassischen Mathematik: Die Arithmetik ist durch die 1 repräsentiert, die Algebra durch i, die Geometrie durch π und die Analysis durch e.

Benjamin Peirce (1809–1880), der als Mathematiker in Harvard dozierte und der Vater des berühmten Philosophen Charles Saunders Peirce war, sagte zu seinen Studenten über diese Formel: "*Meine Herren, sie ist gewiß absolut paradox; wir können sie nicht verstehen und wir wissen nicht, was sie bedeutet. Aber wir haben sie bewiesen und wissen daher, daß sie wahr ist.*"

Er war so begeistert von dieser Formel, daß er für π und e neue, einander ähnliche Symbole vorschlug, um die Verwandtschaft dieser beiden Zahlen zu betonen. Es wird jedoch berichtet, daß seine Studenten die traditionelle Schreibweise bevorzugten.

Danksagung: Ich danke Judita Cofman und Leonhard Prechtel für wertvolle Literaturhinweise über die Zahl e. Laura Martignon und Christoph Wassner danke ich für die Durchsicht des Manuskripts aus mathematischer Sicht. Timmo Köhler und Sebastian Kubik danke ich für die Bereitstellung der Graphiken und schließlich danke ich Valerie Chase, Tanja Edelhäußer und Silke Atmaca für ihre Unterstützung bei der Fertigstellung dieses Manuskripts.

LITERATUR

1. Cantor, M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Teubner Verlag, Leipzig, 1892/1898.
2. Courant, R., Robbins, H., *Was ist Mathematik?*, Springer, Berlin, 1967.
3. Dörrie, H., *Triumpf der Mathematik*, Physica Verlag, Würzburg, 1958.
4. Ferguson, T. S., *Statistical science*, 4, 282–299, 1989.
5. Habetha, K., *Höhere Mathematik für Ingenieure und Physiker*, Klett, Stuttgart, 1979.
6. Honsberger, R., *Mathematical plums*, Math. Association of America, New York, 1979.
7. Klein, F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Springer, Berlin, 1933.
8. Maor, E., *Die Zahl e - Geschichte und Geschichten*, Birkhäuser, Basel, 1996.
9. Meschkowski, H., *Problemgeschichte der Mathematik II*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1981.
10. Rozsa, P., *Das Spiel mit dem Unendlichen*, Teubner Verlag, Leipzig, 1963.
11. Schneider, E., *Mathematik ernst und heiter*, Weiss, Berlin, 1968.
12. Smith, D. E., *A source book in mathematics*, Dover Publications, New York, 1959.
13. Toeplitz, O., *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1972.

Stefan Krauss
Max-Planck-Institut für Bildungsforschung
Lentzeallee 94, 14195 Berlin, Germany
E-mail: krauss@mpib-berlin.mpg.de