Bruckmaier, G., Binder, K., & Krauss, S. (im Druck). Numerische Darstellungsarten statistischer Informationen. In E.-M. Plackner & D. Wörner (Hrsg.), *Daten und Zufall. MaMut – Materialien für den Mathematikunterricht, 3*. Hildesheim/Berlin: Franzbecker.

Numerische Darstellungsarten statistischer Informationen

1. Alltagsrelevanz statistischer Informationen

Wozu brauchen wir Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik überhaupt im Mathematikunterricht? Tatsächlich lässt sich diese Frage für keine andere der mathematischen Teildisziplinen mit Blick auf den Alltag so überzeugend beantworten.[1] In einer durchschnittlichen Zeitung befinden sich heutzutage mehr Statistiken als Goethe und Schiller in ihrem ganzen Leben gesehen haben. Laut Walter Krämer sind wir geradezu einem „Trommelfeuer“ aus Daten, Statistiken, Kurven und Trends ausgesetzt, das Wort „Prozent“ ist seiner Meinung nach sogar eines der häufigsten Substantive in deutschen Tageszeitungen (Krämer, 2009). Wir leben heute in einer Informationsgesellschaft mit enormen Datenmengen, was einen verständigen Umgang mit statistischen Informationen sehr wichtig macht. Diese Meinung teilt im Übrigen auch unsere Bundeskanzlerin Angela Merkel:

> „Unsere Gesellschaft muss stärker lernen, Risiken zu bewerten, ganz generell gesprochen. Das Leben mit der Chance und dem Risiko ist ein wichtiges gesellschaftliches Problem. Ich finde es in einer komplexer werdenden Welt auch wichtig, Kinder bereits frühzeitig an solche Abwägungen heranzuführen, die sie später immer wieder vornehmen müssen […]. Im Kindergarten und in der Schule können Kinder spielerisch lernen, was Wahrscheinlichkeit und Risiko bedeuten.
>
> Nehmen Sie die morgendliche Diskussion nach Hören des Wetterberichts, ob man nun die Regenjacke mitnimmt oder nicht. Denn die Regenjacke zu schleppen, wenn die Sonne scheint, ist das Unangenehmste, was einem nach der Schule passieren kann. Aber bei 30 Prozent Regenwahrscheinlichkeit keinen Schutz zu haben und nass zu werden, wäre auch ungemütlich. Darüber zu diskutieren, dass man für Schutz höheren Aufwand betreiben und abwägen muss, ob dieser sich lohnt, halte ich für wichtig.“
>
> (Interview der Zeitschrift Cicero mit Angela Merkel, 1.1.2007)

In Bezug auf statistische Informationen befinden sich die meisten Menschen in der Rolle von Konsumenten. Interessanterweise können dabei schon bei vermeintlich einfachen statistischen Informationen Verständnisschwierigkeiten auftreten, wie zum Beispiel bei dem in Fernsehen und Zeitung oft verwendeten Begriff der „Regenwahrscheinlichkeit“:

> Eine Umfrage unter US-amerikanischen Radiohörern ergab folgende verschiedene Interpretationen für die Meldung „30 % Regenwahrscheinlichkeit“: Es wird …
>
> … mit 30 % Wahrscheinlichkeit *im gesamten Sendegebiet* regnen.
> … mit 30 % Wahrscheinlichkeit *irgendwo im Sendegebiet* regnen.
> … in 30 % der *Fläche* des Sendegebietes regnen, man weiß nur nicht wo.
> … in 30 % der *Zeit* regnen, man weiß nur nicht wann.

Tatsächlich intendiert ist jedoch eine weitere (und nur sehr selten genannte) Interpretation, nämlich „in 30 % der *Tage mit vergleichbaren Wetterbedingungen* regnet es.“ (Gigerenzer, 2013).

Darüber hinaus gibt es natürlich auch (bewusst oder unbewusst) manipulierte statistische Informationen. Ohne Kenntnisse entsprechender Manipulationsmöglichkeiten ist die Gefahr groß, irreführenden Aussagen aus Werbung oder Politik unkritisch Glauben zu schenken. Eine Sensibilisierung von Schülerinnen und Schülern in Bezug auf einen fragwürdigen und manipulativen Gebrauch von Statistik ist daher ebenfalls von elementarer Relevanz.

---

[1] Auch im Hinblick auf die akademischen Karrieren der Schülerinnen und Schüler können statistische Kompetenzen von Bedeutung sein: Statistik ist eines der meistunterrichteten Fächer im Rahmen zahlreicher (natur- *und* geisteswissenschaftlicher) Studiengänge (vgl. Gigerenzer & Krauss, 2001).

Die Bedeutung eines kompetenten Umgangs mit statistischen Informationen (inklusive der Kenntnis möglicher Fehler und Fallen) wird folgerichtig auch in den Lehrplänen thematisiert. Auch folgende gelegentlich genannte Bildungsziele des Stochastikunterrichts weisen auf diesen Problembereich hin (vgl. dazu auch die Bildungsstandards zur Leitidee L5 „Daten und Zufall“, KMK, 2003):

- Förderung des Entscheidens und Urteilens unter Unsicherheit
- Verhinderung von Fehlvorstellungen durch frühe Instruktion und geeignete Repräsentationen
- Zurechtfinden in der Informationsgesellschaft
- Sensibilisierung gegenüber einem zweifelhaften Gebrauch und bewusster Manipulation durch Statistik

Wir vertreten im vorliegenden Beitrag die These, dass im heutigen Stochastikunterricht dabei jedoch ein wichtiger Aspekt vernachlässigt wird, der für Verständnisschwierigkeiten zumindest mitverantwortlich ist: In Lehrplänen und Schulbüchern werden zur Darstellung statistischer Informationen ausführlich die Begriffe „Prozent“ und „Wahrscheinlichkeit“ thematisiert (dies gilt schulformübergreifend und für alle Bundesländer). Dagegen finden alternative Darstellungsarten, die in unserer Informationsgesellschaft (z. B. im Fernsehen, in Zeitungen und im Radio) ebenfalls verwendet werden, im Unterricht leider kaum Beachtung. Im Folgenden werden wir typische Darstellungen (für eine Übersicht siehe Tab. 1) aus den Medien denen aus der Schule gegenüberstellen und erläutern, wie fehlende Kompetenzen bezüglich dieser Darstellungsarten (sowie deren Umrechnung) für Verständnisschwierigkeiten sorgen können. Wenn wir den Begriff „Darstellungsart statistischer Information“ verwenden, meinen wir damit im Folgenden numerische Darstellungsarten.

2. Numerische Darstellungsarten statistischer Informationen

2.1 Darstellungsarten in den Medien

Wirft man einen Blick in Zeitungen oder in das Internet, sieht man, dass der Prozentbegriff tatsächlich sehr oft verwendet wird. Gleichzeitig fällt aber auch auf, dass es noch weitere häufig verwendete Darstellungsarten gibt:

Zwei von fünf Alleinerziehenden beziehen Hartz IV

In etwa jeder fünften deutschen Familie ist nur ein Erwachsener allein für die Kinder verantwortlich, mit steigender Tendenz. Und für sie ist das Armutsrisiko besonders hoch: Rund 40 Prozent aller Alleinerziehenden beziehen Hartz IV – während bei Familien mit zwei Elternteilen nur acht Prozent auf die Grundsicherung angewiesen sind. Die Kinderarmut in der Bundesrepublik sei damit zum großen Teil darauf zurückzuführen, dass die betroffenen Kinder in Familien mit nur einem Elternteil aufwachsen – zu diesem Ergebnis kommt eine Studie im Auftrag der Bertelsmann-

Europäische Union

Arbeit bedeutet nicht immer ein Leben ohne

In fast neun von zehn Fällen sind die Alleinerziehenden Frauen. Häufig stoßen sie an Grenzen, psychisch, körperlich und auch finanziell. "Kinder leiden, wenn finanzielle Sorgen oder Stress den Alltag prägen. Kinder Alleinerziehender sind nicht nur öfter von Armut betroffen. Die Mütter arbeiten auch häufiger in Vollzeit", sagt Stiftungsvorstand Dräger. Für die Kinder bedeutet das häufig, keinen Zugang zu Bildungs-, Kultur- oder Freizeitangeboten zu haben.

Jeder Fünfte sucht einen neuen Job

Der Trend bei der Bewerbung geht dabei derzeit immer mehr in Richtung E-Mail. Als Informationsgeber bei der Jobsuche werden Tageszeitungen bevorzugt.

Fast jeder Fünfte – 18 Prozent der Befragten – sucht derzeit dringend einen neuen Job. Foto: dpa

FRANKFURT/MAIN. Neues Jahr, neues Glück: Das denken nicht wenige auch im Hinblick auf die Karriere. Fast jeder Fünfte (18 Prozent) sucht derzeit dringend einen neuen Job. Das zeigt eine bevölkerungsrepräsentative Umfrage des Marktforschungsinstituts Toluna. Jeder Neunte (11 Prozent) gibt als Grund an, keinen festen Job zu haben. Jeder Fünfzehnte (7 Prozent) ist momentan beschäftigt, will aber möglichst bald wechseln. Etwas mehr als jeder Fünfte (22 Prozent) schaut sich hin und wieder

DIE WELT (09.03.2014) Mittelbayerische Zeitung (18.12.2013)

Abbildung 1: Zeitungsauschnitte mit verschiedenen Darstellungen statistischer Information

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass in den Medien vor allem drei Darstellungsarten sehr häufig vorkommen, um statistische Informationen numerisch wiederzugeben: *Prozent*, die Schreibweise *jeder Wievielte* und *natürliche Häufigkeiten*.

Ausdrücke wie „in 2 von 5 Fällen" setzen sich aus der absoluten Häufigkeit eines bestimmten Merkmals (z. B. 2 Hartz IV-Empfänger) und der zugehörigen Bezugsgröße (z. B. 5 Alleinerziehende) zusammen. Der entsprechende Begriff „natürliche Häufigkeiten" für diese Kombination wurde von den Kognitionspsychologen Gigerenzer und Hoffrage (1995) vorgeschlagen, die empirisch zeigen konnten, dass diese Darstellungsart in vielen Situationen leichter verständlich ist als beispielsweise eine Prozentangabe (z. B. 40 %). Dieser didaktische Vorschlag wird später noch im Einzelnen erläutert.

Zu beachten ist außerdem, dass in den Medien in der Regel *Anteile* und keine *Wahrscheinlichkeiten* kommuniziert werden (eine Ausnahme davon bildet z. B. die Regenwahrscheinlichkeit). Dies ist begrifflich natürlich ein Unterschied, denn nur der Wahrscheinlichkeitsbegriff (in den Medien werden dafür auch oft die Begriffe „Chance" oder „Risiko" verwendet) transportiert explizit die Idee von Unsicherheit. Prinzipiell lassen sich mit den verschiedenen Darstellungsarten aber sowohl der Wahrscheinlichkeitsaspekt als auch der Anteilsaspekt thematisieren: So gibt es beispielsweise eine *Wahrscheinlichkeit* (eines Ereignisses) von 60 %, aber auch einen *Anteil* von 60 % in Bezug auf einen bestimmten Grundwert (z. B. 60 % aller Deutschen oder 60 % von 100 Euro).

2.2 Darstellungsarten in der Schule

Welche Begriffe und Darstellungsarten werden im Unterricht behandelt? Im Rahmen der Stochastik heißen Anteile auch *relative Häufigkeiten* (z. B. der Anteil der Elemente einer Menge mit einer bestimmten Merkmalsausprägung), die meist entweder als *gewöhnlicher Bruch*, als *Dezimalbruch* oder in der *Prozentschreibweise* dargestellt werden (z. B. $\frac{4}{50} = 0{,}08 = 8\,\%$). Auch *absolute Häufigkeiten* sind Teil des Schulcurriculums, aber leider nur selten natürliche Häufigkeiten. Insbesondere im Gymnasium rückt dann vor allem der Wahrscheinlichkeitsbegriff in den Vordergrund (Laplace-Wahrscheinlichkeit, je nach Schulform auch der empirische und axiomatische Wahrscheinlichkeitsbegriff). Wahrscheinlichkeiten werden im Stochastikunterricht ebenfalls als Dezimal- bzw. gewöhnlicher Bruch oder in der Prozentschreibweise dargestellt. Interessanterweise finden sich in den Medien für Anteile vergleichsweise selten Dezimal- bzw. gewöhnliche Brüche (gemeint sind hier die entsprechenden Zahlenangaben; die Wortentsprechungen „ein Viertel" oder „die Hälfte" kommen durchaus vor). Wahrscheinlichkeitsangaben werden in den Medien fast ausschließlich in der Prozentschreibweise dargestellt. Die Prozentdarstellung wird somit als einzige der Darstellungen sowohl in den Medien (primär für Anteile) als auch in der Schule (für Anteile und Wahrscheinlichkeiten) regelmäßig verwendet.

2.3 Zusammenfassung aller Darstellungsarten

Tabelle 1 listet insgesamt sechs verschiedene Schreibweisen auf, die der prozentualen Angabe „25 %" entsprechen. Auf die Frage „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit …?" eignen sich vor allem die Darstellungsarten (1), (2), (3) und (6). Die Tatsache, dass (4) und (5) sich nicht als Antworten auf Wahrscheinlichkeitsfragen eignen (sondern eher „Anteilscharakter" haben), könnte auch ein Grund dafür sein, dass diese Darstellungen im Stochastikunterricht in der Regel kaum thematisiert werden. Chancenverhältnisse kommen sowohl in Schulbüchern als auch in Medien relativ selten vor. Sie eignen sich weniger zur Darstellung eines Anteils, sondern werden vor allem zur Darstellung einer (positiven) Gewinnchance oder eines (negativen) Risikos verwendet.

Tabelle 1: Verschiedene Darstellungsarten statistischer Information

Nr.	Numerische Darstellungsart	Beispiel	oft verwendet in …
(1)	Prozente	25 %	Schule und Medien
(2)	Dezimalbrüche	0,25	Schule
(3)	Gewöhnliche Brüche	$\frac{1}{4}$	Schule
(4)	Natürliche Häufigkeiten	1 von 4	Medien
(5)	„jeder Wievielte“	Jeder Vierte	Medien
(6)	Chancenverhältnisse	1 : 3 (lies: „1 zu 3“)	(eher selten verwendet)

Man könnte nun glauben, dass die Vernachlässigung der Darstellungen (4) und (5) in der Schule folgenlos ist, da sich die verschiedenen Darstellungsarten problemlos ineinander überführen lassen. Wie der folgende Abschnitt zeigt, ist dies aber leider alles andere als selbstverständlich.

2.4 Schwierigkeiten bei der Umrechnung

Vor allem mit den in der Schule häufig verwendeten Darstellungen (1), (2) und (3) scheint zuerst einmal alles einfach: 25 % entsprechen 0,25 bzw. $\frac{1}{4}$. Bezüglich solcher Umrechnungen lieferte eine Telefonumfrage des Emnid-Instituts allerdings ein interessantes Ergebnis: Im Auftrag der Süddeutschen Zeitung wurde einer repräsentativen Stichprobe von 1000 Deutschen folgende Frage gestellt: „Was bedeutet 40 %?“ Folgende Antwortalternativen wurden zur Auswahl vorgegeben: 1. Ein Viertel, 2. Vier von zehn, 3. Jeder Vierzigste. Wie Abbildung 2 verdeutlicht, konnte erstaunlicherweise nur etwa die Hälfte der Befragten korrekt angeben, dass Option 2 („vier von zehn“) die richtige Antwort ist.

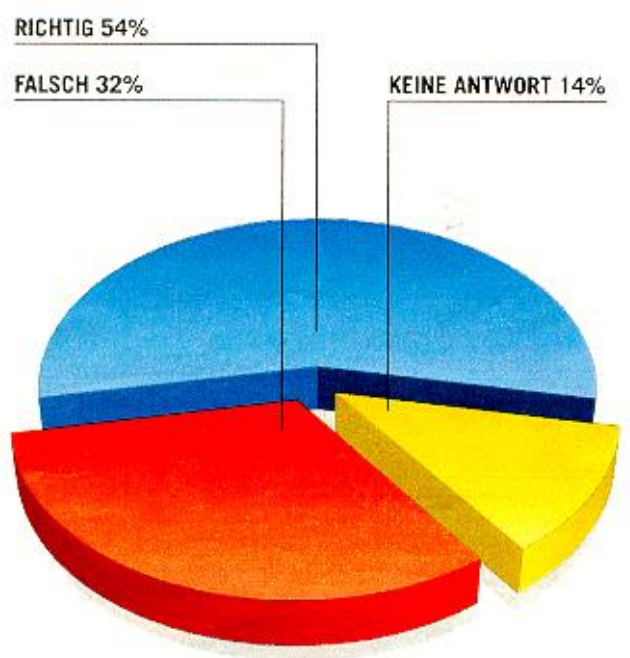


Abbildung 2: Ergebnisse einer Umfrage zur Umrechnung von „40 Prozent“ (Süddeutsche Zeitung Magazin, 1.1.2006)

Wir werden später (in Abschnitt 3 zu den Unterrichtsmaterialien) noch sehen, dass dies durchaus kein Zufallsbefund ist, sondern dass – gerade im Zusammenhang mit den Darstellungsarten „Prozent“ und „jeder Wievielte“ – Verständnisschwierigkeiten weit verbreitet sind.

Tatsächlich können die möglichen Umrechnungen unterschiedlich anspruchsvoll sein (bei 6 Darstellungsarten und je 2 Übersetzungsrichtungen ergeben sich insgesamt 30 mögliche Darstellungswechsel). Die Umrechnungen der in der Schule üblichen Schreibweisen sind dabei noch die einfachsten: Die Übersetzung von (2) in (3) entspricht der Umwandlung von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche (bzw. umgekehrt), die in der Schule im Rahmen der Bruchrechnung ausführlich behandelt wird (im Folgenden berücksichtigen wir deshalb nur noch gewöhnliche Brüche). Auch die Umwandlung von natürlichen Häufigkeiten (4) ist unproblematisch: „x von y“ = $\frac{x}{y}$ = $\frac{100\,x}{y}$ %

In Bezug auf die andere in den Medien häufig verwendete Darstellungsart (5) ist aber leider nur eine Richtung einfach: „jeder y-te“ entspricht offensichtlich $\frac{1}{y}$. Interessanterweise sind Umrechnungen *in* diese Darstellungsart nicht für alle Zahlenwerte sinnvoll interpretierbar: Zum Beispiel ist zwar klar, dass der Stammbruch $\frac{1}{x}$ (bzw. die natürliche Häufigkeit „1 von x“) genau „jedem x-ten“ entspricht. Welche Form aber hat $\frac{2}{7}$ (bzw. „2 von 7“) in dieser Darstellung? Ein entsprechender Bruch mit Zähler 1 wäre $\frac{1}{3{,}5}$ und somit ergäbe sich der schwer interpretierbare Ausdruck „jeder 3,5-te“. Genauso lässt sich beispielsweise auch 37 % nicht in der Schreibweise „jeder Wievielte“ darstellen. Die Umrechnungsformel hierfür lautet „x % entspricht „jeder $\frac{100}{x}$-te“, und dieser Ausdruck ist nur eindeutig (und ohne zu runden) interpretierbar, wenn x ein Teiler von 100 ist. Daraus folgt im Besonderen, dass die Darstellung „jeder x-te“ grundsätzlich nur für Anteile kleiner oder gleich 50 % möglich ist (größere Anteile müssten zwischen „jeder“ und „jeder Zweite“ liegen).

Eine weitere Besonderheit ist bei der Darstellung als Chancenverhältnis (6) zu beachten. Bei den Laplace-Wahrscheinlichkeiten werden die „günstigen Fälle“ zu „allen Fällen“ ins Verhältnis gesetzt. Im Gegensatz dazu werden beim Chancenverhältnis die „günstigen Fälle“ den „ungünstigen Fällen“ gegenübergestellt, was dazu führt, dass der Wahrscheinlichkeit $\frac{x}{y}$ das Chancenverhältnis x : (y–x) entspricht. Die fälschliche Gleichsetzung einer Chance von etwa 1 : 3 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ ist ein nahe liegender Fehler, der sicherlich auch auf die uneinheitliche Verwendung des Doppelpunktes zurückzuführen ist (bei einem Chancenverhältnis darf der Doppelpunkt nicht als Divisionszeichen interpretiert werden).

In Abschnitt 6.1 finden sich Unterrichtsmaterialien zu Kapitel 2 (Zeitungsausschnitte, die Fehler bei der Darstellung statistischer Informationen enthalten mit entsprechenden Aufgabenstellungen für Schülerinnen und Schüler).

3. Didaktischer Tipp: Natürliche Häufigkeiten!

Gibt es eine Darstellungsart (vgl. Tab. 1), die grundsätzlich empfehlenswert ist? Empirische Studien zeigen, dass bestimmte Aufgaben in der Tat alleine dadurch leichter werden, dass die Darstellungsart der statistischen Informationen verändert wird – und zwar in natürliche Häufigkeiten (Wassner, Krauss & Martignon, 2002). Dieser didaktische Trick soll im Folgenden anhand dreier Aufgaben illustriert werden, deren richtige Lösung der menschlichen Intuition zuwiderläuft:

Aufgabe 1: Mammografie-Aufgabe (mit Prozenten)

Mit dem Ziel der Früherkennung von Brustkrebs werden Frauen angehalten, regelmäßig eine Mammografie durchführen zu lassen. Für symptomfreie Frauen im Alter zwischen 40 und 50 Jahren, die routinemäßig eine Mammografie durchführen lassen, liegen folgende Informationen vor:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau Brustkrebs (B) hat, beträgt **1 %**.
Wenn die Krankheit vorliegt, wird sie durch die Mammografie mit einer Wahrscheinlichkeit von **80 %** erkannt.
Jedoch erhalten auch gesunde Frauen mit einer Wahrscheinlichkeit von **9,6 %** fälschlicherweise einen positiven Mammografie-Befund.

Eine Frau dieser Altersgruppe erhält nun einen positiven Mammografie-Befund (M+).

Frage: Wie groß ist demnach die Wahrscheinlichkeit, dass sie tatsächlich an Brustkrebs erkrankt ist? ________ %

Die statistischen Informationen sind in Form von (bedingten) Wahrscheinlichkeiten gegeben: $P(B) = 1\%$, $P(M+|B) = 80\%$ und $P(M+|\overline{B}) = 9{,}6\%$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(B|M+)$ beträgt laut der Formel von Bayes (vgl. Abb. 4 links) ungefähr 7,8 %.

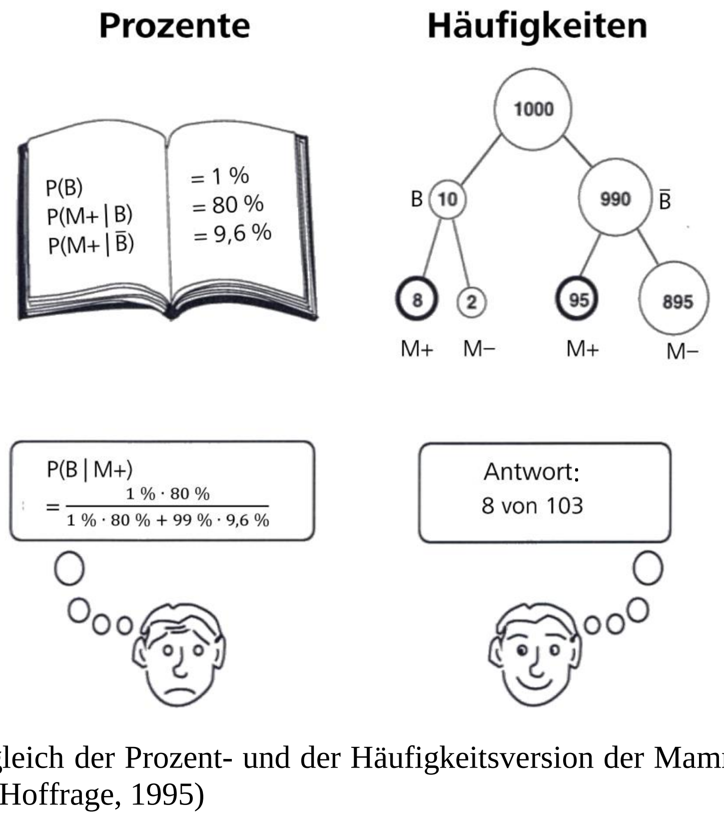


Abbildung 4: Vergleich der Prozent- und der Häufigkeitsversion der Mammografie-Aufgabe (vgl. Gigerenzer & Hoffrage, 1995)

Dieses Ergebnis widerspricht der Intuition – übliche Schätzungen liegen häufig bei 70-80 %. Experimente mit Erwachsenen und Schülern zeigen, dass diese Aufgabe wesentlich einfacher wird, wenn die statistischen Informationen in natürlichen Häufigkeiten dargestellt werden („10 von 1000“ statt „1 %“, „8 von 10“ statt „80 %“, „95 von 990“ statt „9,6 %“):

Aufgabe 1: Mammografie-Aufgabe (mit natürlichen Häufigkeiten)

Betrachten wir eine Stichprobe von 1000 symptomfreien Frauen im Alter zwischen 40 und 50 Jahren, die routinemäßig eine Mammografie durchführen lassen. Für diese Stichprobe liegen folgende Informationen vor:

10 von 1000 Frauen haben Brustkrebs.
8 von 10 Frauen, die Brustkrebs haben, erhalten einen positiven Mammografie-Befund.
95 von 990 Frauen, die keinen Brustkrebs haben, erhalten dennoch einen positiven Mammografie-Befund.

Frage: Wie viele der Frauen, die einen positiven Mammografie-Befund erhalten haben, sind tatsächlich an Brustkrebs erkrankt?

______ von ______ (statt einer bedingten Wahrscheinlichkeit)

Nun finden deutlich mehr Versuchspersonen die richtige Antwort, nämlich 8 von 103 Frauen (≈ 7,8 %). Warum ist die „Häufigkeitsversion" einfacher? Dafür gibt es mehrere Gründe: Die natürlichen Häufigkeiten sind die einzige Darstellungsart mit einer konkreten Bezugsgröße (Referenzmenge von 1000 Frauen), wobei alle weiteren statistischen Informationen Teilmengen dieser Bezugsgröße sind. Somit kann man sich alle gegebenen Informationen gut vorstellen und diese darüber hinaus in einen „Häufigkeitsbaum" eintragen (Abb. 4 rechts). Man „sieht" nun: Obwohl die Mammografie die Krankheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % entdeckt, gibt es trotzdem viel mehr gesunde Frauen mit positivem Mammografie-Befund (95) als kranke Frauen mit positivem Befund (8) – einfach weil es grundsätzlich viel mehr gesunde Frauen gibt als kranke (990 vs. 10). Diese Verschachtelung von Informationen lässt sich am besten mit natürlichen Häufigkeiten darstellen (im Gegensatz dazu beziehen sich Brüche bzw. Prozente immer wieder auf 1 bzw. auf 100 %). Ist die Information in natürlichen Häufigkeiten gegeben, braucht man den Satz von Bayes zur Lösung also gar nicht mehr – selbst Mittelstufenschülerinnen und -schüler können diese Aufgabe nun lösen!

Empirische Studien (Binder, Krauss & Bruckmaier, 2015) legen nahe, dass auch ein Baumdiagramm mit relativen Häufigkeiten (bzw. Prozenten) das Verständnis nicht wesentlich unterstützen kann – ohne konkrete Stichprobe bleiben die normierten Informationen abstrakt. Leider werden in der Schule aber meistens gerade Baumdiagramme mit relativen Häufigkeiten (an den Pfaden) und nur selten Baumdiagramme mit absoluten Häufigkeiten (in den Knoten) eingesetzt. Didaktisch besonders empfehlenswert für Aufgaben im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (z. B. zum Satz von Bayes) ist die Darstellung statistischer Information in Form eines sogenannten „Häufigkeitsdoppelbaumes" (Wassner, 2004):

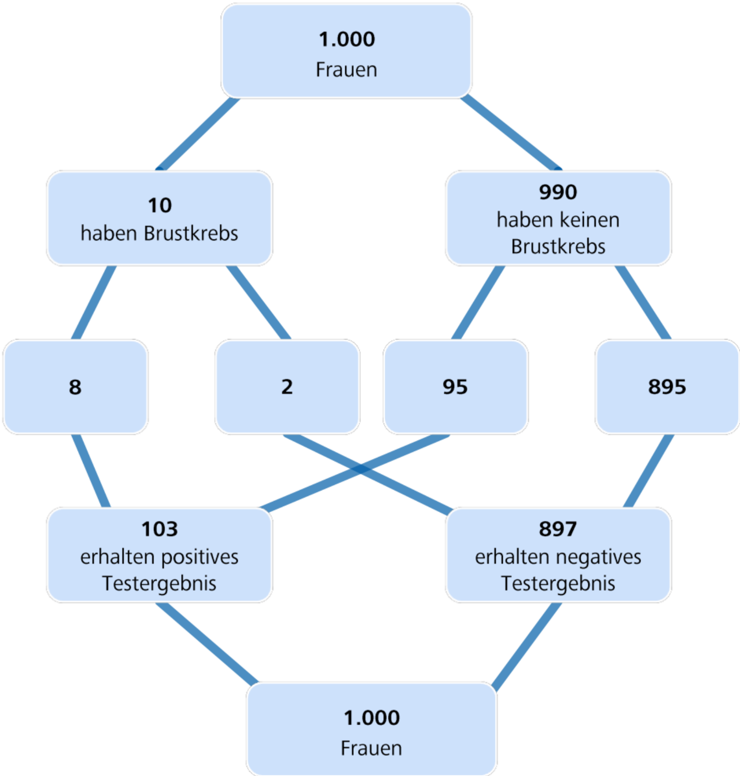


Abbildung 6: Häufigkeitsdoppelbaum

Ein Häufigkeitsdoppelbaum beinhaltet sämtliche Informationen, die auch in einer Vierfeldertafel (inkl. beider Randverteilungen) angegeben werden. Alle relevanten Fragen, zu deren Beantwortung in der Prozent-Darstellung die Berechnung einer bedingten Wahrscheinlichkeit erforderlich gewesen wäre, lassen sich nun durch das einfache Ablesen eines Anteils (in Form natürlicher Häufigkeiten) beantworten. Wenn man mit Schülerinnen und Schülern übt, Prozentangaben in Aufgabenstellungen zum Satz von Bayes in natürliche Häufigkeiten zu übersetzen, wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung für solche Aufgaben sogar überflüssig! Um die Idee von Baumdiagrammen mit relativen Häufigkeiten zu integrieren, lassen sich bei Bedarf natürlich auch relative Häufigkeiten an den Ästen eines Häufigkeit(doppel)baumes ergänzen.

Um das Verständnis zu fördern, kann es unter Umständen bereits ausreichen, eine *Frage nach natürlichen Häufigkeiten* zu stellen. Dies ist zum Beispiel bei Aufgaben möglich, in denen gar keine (normierten) statistischen Informationen gegeben sind, die erst in natürliche Häufigkeiten übersetzt werden müssen:

> **Aufgabe 2: Linda-Aufgabe**
>
> Linda ist 32, sie hat in Philosophie promoviert und ist ausgesprochen intelligent. Sie ist sozial sehr engagiert und war früher in der Anti-Atomkraft-Bewegung aktiv.
>
> Was ist wahrscheinlicher?
>
> a) Linda ist Bankangestellte.
> b) Linda ist Bankangestellte und in der feministischen Bewegung aktiv.

Auch die Lösung dieser Aufgabe ist sehr kontraintuitiv: Die meisten Menschen entscheiden sich für „b“ (Versuchspersonen, die sich für „b“ entscheiden, berichten außerdem von sehr hoher Sicherheit ihrer Einschätzung). Aber es gilt allgemein: P(A „und“ B) $= P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$. Da Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen immer zwischen 0 und 1 liegen, muss $P(A \cap B)$ kleiner sein als die Wahrscheinlichkeiten der Einzelereignisse, weshalb Antwort „a“ richtig ist.

Obwohl in der Linda-Aufgabe gar keine Wahrscheinlichkeiten angegeben sind, lässt sich die Aufgabe dennoch so formulieren, dass eine Frage nach Häufigkeiten gestellt werden kann:

> **Aufgabe 2: Linda-Aufgabe (als Häufigkeitsversion)**
>
> Linda ist 32, sie hat in Philosophie promoviert und ist ausgesprochen intelligent. Sie ist sozial sehr engagiert und war früher in der Anti-Atomkraft-Bewegung aktiv.
>
> Stell dir 200 Frauen vor, auf die Lindas Beschreibung passt.
>
> Wie viele davon sind:
>
> a) Bankangestellte?
> b) Bankangestellte und in der feministischen Bewegung aktiv?

Wie empirische Studien zeigen konnten, fällt es den meisten Versuchspersonen nun leichter zu erkennen, dass die in (b) beschriebene Menge eine Teilmenge von (a) ist und somit kleiner sein muss. Es genügt also in diesem Fall, eine fiktive Stichprobe von beispielsweise 200 Frauen als Referenzset vorzugeben, auf welche die beiden Alternativen nun bezogen werden können.

Abschließend wollen wir das Häufigkeitskonzept noch auf das berühmte „Ziegenproblem" anwenden, das sich auch in vielen Schulbüchern findet:

> **Aufgabe 3: Ziegenproblem**
>
> Stell dir vor, du nimmst an einer Spielshow teil, bei der du eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollst. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den anderen beiden stehen Ziegen. Du zeigst auf eine Tür, sagen wir Nummer 1. Sie bleibt vorerst geschlossen.
>
> Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet.
>
> Mit den Worten „Ich zeige dir mal was." öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer 3, und eine Ziege schaut ins Publikum.
>
> **Er fragt**:
> „Bleibst du bei Tür Nummer 1, oder wechselst du zu Tür Nummer 2?"
> Wie solltest du dich als Kandidat entscheiden?

Fast alle Befragten glauben fälschlicherweise, dass es keine Rolle spielt, ob man bleibt oder wechselt. Die Wahrscheinlichkeit, das Auto zu gewinnen, beträgt bei einem Wechsel aber $\frac{2}{3}$.

Man kann nun auf folgende Weise eine Häufigkeitsfrage einfügen:

> **Aufgabe 3: Ziegenproblem (mit Häufigkeitsfrage)**
>
> Stell dir vor, du nimmst an einer Spielshow teil, bei der du eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollst. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den anderen beiden stehen Ziegen. Du zeigst auf eine Tür, sagen wir Nummer 1. Sie bleibt vorerst geschlossen.
>
> Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet.
>
> Mit den Worten „Ich zeige dir mal was." öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer 3, und eine Ziege schaut ins Publikum.
>
> **Zwischenfrage:**
> „In wie vielen der drei möglichen Auto-Ziege-Konstellationen würdest du als Kandidat durch Bleiben gewinnen und in wie vielen würdest du durch Wechseln gewinnen?"
>
> **Erst jetzt die Entscheidungsfrage:**
> „Bleibst du bei Tür Nummer 1, oder wechselst du zu Tür Nummer 2?"
> Wie solltest du dich als Kandidat entscheiden?

Die gestellte Zwischenfrage legt einen Lösungsweg nahe, der gelegentlich auch in Schulbüchern (z. B. Lernstufen Mathematik 10, Cornelsen, S. 161) illustriert ist:

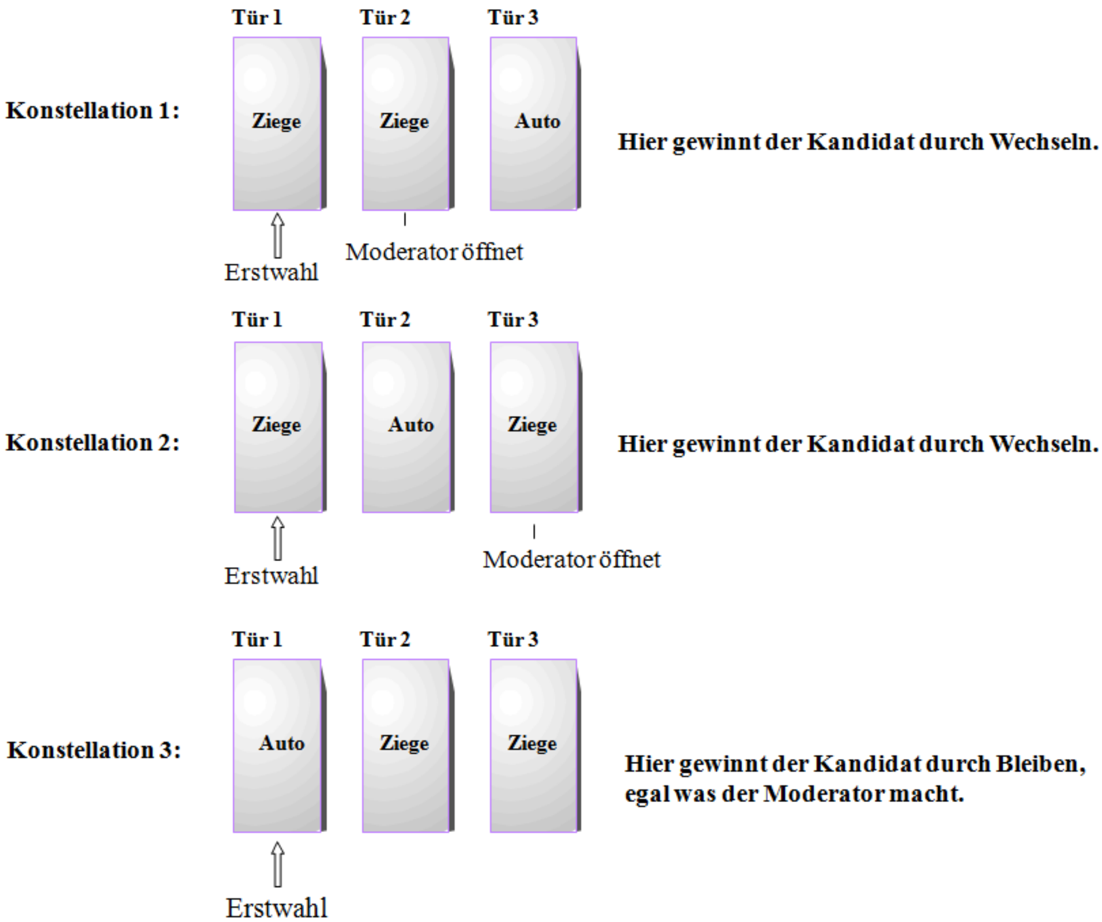


Abbildung 7: Illustration des Ziegenproblems in einer Häufigkeitsversion

In Abbildung 7 wird deutlich, dass nun eine Antwort in natürlichen Häufigkeiten gegeben werden kann („zwei von drei"). Eine ausführliche Diskussion des Ziegenproblems sowie Experimente zu diesem Problem mit Schülerinnen und Schülern finden sich in Krauss und Atmaca (2004).

In Abschnitt 6.2 finden sich Unterrichtsmaterialien zu Kapitel 3.

4. Zusammenfassung

In der heutigen Informationsgesellschaft werden wir zunehmend mit statistischen Daten konfrontiert. Diese werden in den Medien häufig in anderer Form dargestellt als im Stochastikunterricht (z. B. „jeder Wievielte"). Gerade die Umrechnung zwischen den verschiedenen Darstellungsarten (Prozent, Dezimalbruch, gewöhnlicher Bruch, natürliche Häufigkeiten, „jeder Wievielte" und Chancenverhältnis) kann vielen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereiten. Möchte man die eingangs erwähnten Bildungsziele in Bezug auf die Leitidee „Daten und Zufall" ernst nehmen („Zurechtfinden in der Informationsgesellschaft", „Verhinderung von Fehlvorstellungen" etc.), müssen im Unterricht *alle* Darstellungsarten sowie deren Umrechnungen explizit thematisiert werden. Besonders bei kognitiv sehr anspruchsvollen Aufgaben kann die Darstellung statistischer Informationen in „natürlichen Häufigkeiten" verständnisfördernd sein.

Anmerkung:

Eine Sammlung von Zeitungssauschnitten mit statistischen Irrtümern findet sich auch im Internet zum Beispiel unter www.unstatistik.de/, www.jku.at/ifas/content/e101235/ sowie www.statistik2013.de/de/wettbewerb-statistische-irrtuemer.html.

5. Literatur

Binder, Krauss & Bruckmaier (2015). Welche Visualisierungen unterstützen Bayesianisches Denken wirklich? In H. Linneweber-Lammerskitten (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*. Münster: WTM.

Gigerenzer, G. (2013). *Wie man die richtigen Entscheidungen trifft.* München: Bertelsmann.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review, 102*(4), 684–704.

Gigerenzer, G., & Krauss, S. (2001). Statistisches Denken oder statistische Rituale? Was sollte man unterrichten? In M. Borovcnik, J. Engel & D. Wickmann (Hrsg.), *Anregungen zum Stochastikunterricht: Die NCTM-Standards 2000, Klassische und Bayessche Sichtweise im Vergleich* (S. 53–62). Hildesheim: Franzbecker.

KMK – Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.). (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Darmstadt: Luchterhand.

Krämer, W. (2009). *So lügt man mit Statistik* (12. Aufl.). Frankfurt am Main/New York: Campus.

Krauss, S., & Atmaca, S. (2004). Wie man Schülern Einsicht in schwierige stochastische Probleme vermitteln kann. Eine Fallstudie über das „Drei-Türen-Problem". *Unterrichtswissenschaft, 1*, 38–57.

Wassner, C. (2004). *Förderung Bayesianischen Denkens – Kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen.* Hildesheim: Franzbecker.

Wassner, C., Krauss, S., & Martignon, L. (2002). Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein? *Praxis der Mathematik, 44*(1), 12–16.

6. Materialien für den Mathematikunterricht

Im Folgenden sind Unterrichtsmaterialien zu den Kapiteln 2 und 3 zusammengestellt. In 6.1 finden sich Zeitungsausschnitte, die Fehler bei der Darstellung der statistischen Informationen enthalten. Jeder der Ausschnitte ist mit einer möglichen Aufgabenstellung für Schülerinnen und Schüler sowie einer kurzen Erläuterung versehen. In 6.2 finden sich Aufgaben zur vorteilhaften Darstellung in natürlichen Häufigkeiten.

6.1 Zeitungsausschnitte mit statistischen Irrtümern

6.1.1 Probleme mit dem Prozentbegriff

Beispiel 1:

Energiesparen

280 Prozent Strom können leicht gespart werden – beim Kochen, wenn der Deckel nicht vergessen wird. Das ist nur ein Beispiel: So empfiehlt sich etwa bei Speisen mit Garzeiten von mehr als 20 Minuten ein Schnellkochtopf. Damit lassen sich bis zu 50 Prozent Energie und 75 Prozent Zeit einsparen. Grundsätzlich verbrauchen Töpfe mit gewölbtem Boden 50 Prozent mehr Energie als solche mit einem ebenen Boden.

Hannoversches Wochenblatt, zitiert nach der Der SPIEGEL, 51/1995

Aufgabe:

a) Erkläre, wo der Fehler liegt!

b) Wie viel Prozent des Einsatzes kann man bei einem (beliebigen) Spiel maximal gewinnen bzw. verlieren?

Erläuterung:

An diesem Beispiel kann mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet werden, dass zwar beliebige Gewinnspannen oder Verteuerungen denkbar sind (z. B. 300 % oder auch 1000 %), aber niemals mehr als 100 % (nämlich alles) verloren oder gespart werden kann.

Beispiel 2:

Anstieg der Rauschgiftopfer gegenüber dem Vorjahr alarmierend

Anzahl der Drogentoten hat sich 1990 fast verdoppelt

WIESBADEN (dpa) Die Zahl der Rauschgifttoten in der Bundesrepublik ist 1990 alarmierend gestiegen und gegenüber dem vergangenen Jahr um fast 50 Prozent angewachsen.

Wie das Bundeskriminalamt (BKA) in Wiesbaden mitteilte, wurden bis Donnerstag 1365 Menschen Opfer ihrer Drogensucht.

Bis zum 27. Dezember 1989 waren der Wiesbadener Behörde 950 Rauschgifttote bekanntgeworden. Die neueste Zahl der Drogenopfer schließt erstmals die fünf neuen Bundesländer ein.

Aus datentechnischen Gründen lasse sich ihr Anteil statistisch noch nicht „herausrechnen", erklärte ein Sprecher des BKA.

Als Hauptgründe für den „eklatanten Anstieg" der Zahl der Drogentoten vermutet das Bundeskriminalamt das zunehmende Angebot von Rauschgiften mit sehr hohem Reinheitsgrad und die Unerfahrenheit der Süchtigen.

Goslarsche Zeitung (28.12.1990)

Aufgabe:

a) Kannst du selbst feststellen, welche der beiden Angaben stimmt: „Verdoppelt" oder „um 50 % gestiegen"?

b) Ist der Ausdruck „eklatanter Anstieg" in diesem Fall gerechtfertigt?

Erläuterung:

Die Steigerung von 950 auf 1365 Opfer entspricht etwa einer Erhöhung um 43 % (und keiner Verdopplung). Berücksichtigt man die Bevölkerungszunahme in Deutschland durch die Wiedervereinigung (um etwa 25 % von 64 Mio. auf 80 Mio.), relativiert sich dieser Anstieg.

Die fälschliche Gleichsetzung von „Verdopplung“ und „Erhöhung um 50 %“ ist ein beliebter Fehler, der vielleicht auch darauf zurückzuführen ist, dass im umgekehrten Fall eine „Halbierung“ tatsächlich einer „Verminderung um 50 %“ entspricht.

Beispiel 3:

ZEIT: Sie warnen in Ihrem Essay auch vor einer Wiederholung der Fehler, die man in Skandinavien gemacht hat. Wie würden Sie die Entwicklung dort beschreiben?
Juul: Die letzte große qualitative Untersuchung in Dänemark hat gezeigt, dass es 24 Prozent der befragten Jungen zwischen drei und sechs Jahren nicht gut geht in der Kita. Bei den Mädchen waren es zehn Prozent. Mehr als ein Drittel aller Kinder fühlt sich also nicht wohl. Das sollte man sehr ernst nehmen. Es lässt sich auch fest-

DIE ZEIT (15.11.2012)

Aufgabe:

a) Wo liegt der Fehler?

b) Nimm an, dass gleich viele Mädchen wie Jungen befragt wurden. Wie viel Prozent aller Kinder fühlen sich demnach nicht wohl?

Erläuterung:

Dies ist ein typisches Beispiel dafür, dass man Prozentwerte von Teilgruppen nicht einfach addieren kann: Wenn $\frac{2}{3}$ der Mädchen und $\frac{2}{3}$ der Jungen im Sportverein sind, dann sind insgesamt $\frac{2}{3}$ aller Kinder im Sportverein (dieses Beispiel eignet sich besonders gut zur Verdeutlichung für Schülerinnen und Schüler, da nicht $\frac{4}{3}$ aller Kinder im Sportverein sein können).

6.1.2 Probleme bei der Darstellungsart „jeder Wievielte“

Beispiel 4:

Erschreckende Wissenslücken
Erwachsene in Deutschland können im internationalen Vergleich nur mittelmäßig lesen und Texte verstehen. Gleiches gilt für Grundrechenarten wie Prozentrechnen. Dies zeigt der erste PISA-Test zu den Alltagskompetenzen von Erwachsenen in 24 wichtigen Industrienationen der Welt.
Die „PISA für Große“-Studie verschärft die Aussage früherer Studien: Jeder Sechste liest nur so gut wie ein zehnjähriges Kind. Das ist beim Kopfrechnen nur unwesentlich besser, schließlich hapert es hier bei jedem Fünften mit dem Einmaleins.
Der erfreulichste Teil der Studie:

Leipziger Volkszeitung (9.10.2013)

Aufgabe:

a) Welche Aussage ist falsch?

b) Übersetze die Angaben „jeder Sechste“ und „jeder Fünfte“ in eine Prozentangabe!

Erläuterung:

Dieser (in den Medien erstaunlich oft vorkommende) Fehler beim Größenvergleich ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass die Ordnungsrelation für natürliche Zahlen (hier: $6 > 5$) einfach auf Angaben der Art „jeder Wievielte“ übertragen wird. Tatsächlich gilt aber: Wenn $x > y$, dann bezeichnet „jeder x-te“ einen kleineren Anteil als „jeder y-te“ (genauso gilt für die entsprechenden Brüche: $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$).

Beispiel 5:

Fast jeder zweite Sachse lebt allein

Sachsen „versingelt“. Hier leben immer mehr Menschen allein. Fast jeder zweite der 4,2 Millionen Einwohner wohnt – statistisch betrachtet – allein in seinen vier Wänden.

8. Haushalte 2007 bis 2009 nach Haushaltsgröße[1)]

Haushalte mit ... Person(en)	2009	
	1 000	%
1	944,9	42,6
2	808,2	36,5
3	283,4	12,8
4	143,9	6,5
5 und mehr	35,2	1,6

10. Bevölkerung in Haushalten 2009 nach Altersgruppen, Geschlecht und Familienstand sowie nach Haushaltsgröße[1)] (in 1 000)

Merkmal	Insgesamt	In Haushalten mit ... Person(en)				
		1	2	3	4	5 und mehr
Insgesamt	**4 174,0**	**944,9**	**1 616,5**	**850,3**	**575,5**	**186,8**

Sächsische Zeitung (21.10.2010)

Aufgabe:

a) Warum ist die Überschrift falsch?

b) Wie lautet die korrekte Antwort auf die Frage, wie viel Prozent der Sachsen alleine leben?

Erläuterung:

Der Autor des Artikels hat übersehen, dass der Anteil der allein lebenden Menschen natürlich kleiner ist als der Anteil der Singlehaushalte. Wenn man einzelne Menschen zählt, müssen Mehrpersonenhaushalte entsprechend öfter gezählt werden. Im unteren Teil der Grafik sieht man, dass tatsächlich nur $\frac{944.900}{4.174.000} \approx 22{,}6\,\%$ der Menschen alleine leben.

6.1.3 Besonders tückisch: „Prozent“ und „jeder Wievielte“ in einer Meldung!

Beispiel 6:

Jeder vierte will unsterblich sein

HAMBURG (kna) - Einer Umfrage zufolge wollen 44 Prozent der Deutschen nicht älter als 80 Jahre alt werden. Höchstens 100 Jahre alt wollen 18 Prozent werden, wie eine gestern veröffentlichte Befragung für die Zeitung „Die Woche“ ergeben hat. Vier Prozent hätten angegeben, sie wollten unsterblich werden.

Mainzer Allgemeine Zeitung (7.8.1997)

Aufgabe:

a) Finde den Fehler in dieser Zeitungsmeldung!

b) Übersetze den Ausdruck „jeder Vierte“ in eine Prozentangabe und den Ausdruck „vier Prozent“ in eine Angabe der Form „jeder Wievielte“!

Erläuterung:

Die Zeitungsnotiz illustriert Probleme bei der Umrechnung der Darstellung „jeder Wievielte“ in eine Prozentangabe. Auch wenn sich in diesem Fall nicht eindeutig sagen lässt, welche der Aussagen richtig ist, kann vermutet werden, dass sich in der Befragung ein Anteil von 4 % ergeben hat, der in einen prägnanten (aber leider falschen) Titel übertragen wurde. Vermutlich möchte also jeder Fünfundzwanzigste unsterblich sein.

Beispiel 7:

Aus der *Norderneyer Badezeitung*: „Fuhr vor einigen Jahren noch jeder zehnte Autofahrer zu schnell, so ist es mittlerweile heute ‚nur noch‘ jeder fünfte. Doch auch fünf Prozent sind zu viele, und so wird weiterhin kontrolliert, und die Schnellfahrer haben zu zahlen.“

Norderneyer Badezeitung
(zitiert nach *DER SPIEGEL* 41/1991, S. 352)

Aufgabe:

a) In dieser Zeitungsmeldung finden sich zwei Fehler! Finde diese Fehler!

b) Korrigiere eine der drei Zahlenangaben, so dass beide Fehler „gleichzeitig verschwinden“!

Erläuterung:

Erster Fehler: „Jeder Fünfte“ ist mehr als „jeder Zehnte“ (und nicht weniger; vgl. Bsp. 4).
Zweiter Fehler: „Jeder Fünfte“ entspricht nicht 5 % (sondern 20 %; vgl. Bsp. 6).
Beide Fehler wären behoben, wenn „jeder Fünfte“ durch 5 % (bzw. durch „jeder Zwanzigste“) ersetzt werden würde.

Abschließend wollen wir die wichtigsten der bisher genannten Fehler noch einmal zusammenfassen.

Tabelle 2: Zusammenfassung einiger häufiger Fehlvorstellungen

Fehlvorstellung	**richtig ist …**
Eine Verkleinerung um mehr als 100% ist möglich.	Nur eine Steigerung um mehr als 100% ist möglich.
Eine Steigerung von 50 % entspricht einer Verdopplung.	Eine Steigerung von 100 % entspricht einer Verdopplung.
„Jeder Sechste" ist größer als „jeder Fünfte".	„Jeder Sechste" ist kleiner als „jeder Fünfte".
x % entspricht „jeder x-te".	x % entspricht „jeder $\frac{100}{x}$ -te.
¼ entspricht 1 : 4 (Chance von „1 zu 4").	¼ entspricht 1 : 3 (Chance von „1 zu 3").

6.2 Aufgaben zur Darstellung in natürlichen Häufigkeiten

Aufgabe:

Stelle dir bitte vor, du interessierst dich für die Frage, inwiefern an Realschulen die Belegung eines bestimmten Zweiges die Wahl des späteren Ausbildungsberufs beeinflusst. Dafür stehen dir folgende Informationen zur Verfügung:

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 32,5 % wählt ein Realschüler eine technische Ausbildung.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 64 % hat ein Realschüler, der eine technische Ausbildung wählt, in der Schule den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig belegt.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % hat ein Realschüler, der keine technische Ausbildung wählt, in der Schule ebenfalls den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig belegt.

Frage:

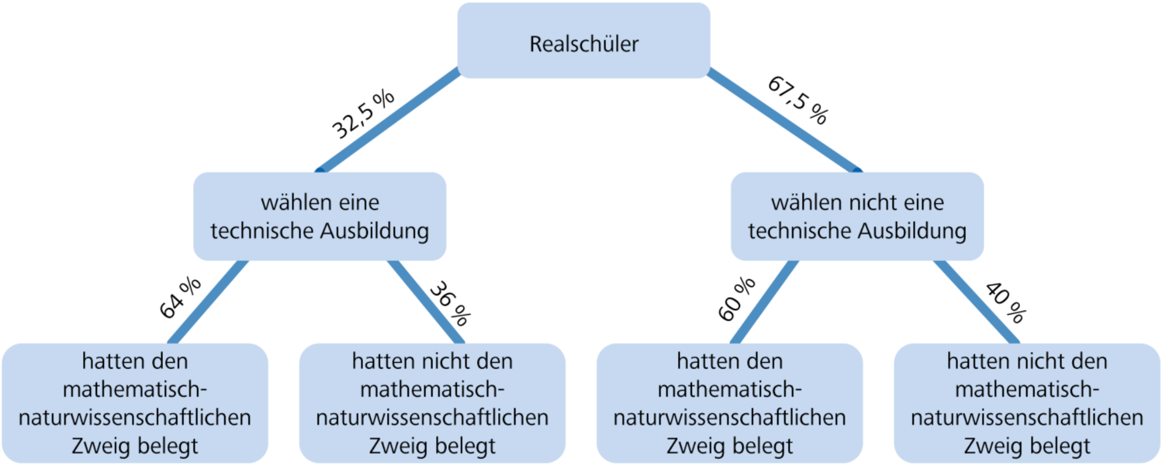
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Realschüler, der den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig belegt hat, später eine technische Ausbildung wählt?

a) Löse die Aufgabe – wie in der Schule üblich – mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten (Aufgabe nur für Schülerinnen und Schüler aus dem Gymnasium, 11. Jahrgangsstufe, geeignet).
b) Übersetze die Informationen in der Aufgabenstellung nun in natürliche Häufigkeiten. Gehe dabei von einer Stichprobe von 1.000 Realschülern aus. Gib die Antwort in natürlichen Häufigkeiten an.
c) Warum ist es nicht ausreichend, wenn du bei Aufgabe (b) nur eine Stichprobe von 100 Realschülern zugrunde legst? Kann man dieses Problem immer vermeiden?
d) Fertige zuerst einen Häufigkeitsbaum für die Situation von Aufgabe (b) an und mache daraus anschließend einen Häufigkeitsdoppelbaum.
e) Denke dir selber Fragestellungen nach möglichen Wahrscheinlichkeiten bezüglich der Situation aus und beantworte diese mit dem Häufigkeitsdoppelbaum.

Erläuterung:

zu a)

Baumdiagramm mit relativen Häufigkeiten:



Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Realschüler, der den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig belegt hat, später eine technische Ausbildung wählt $\frac{32{,}5\,\% \cdot 64\,\%}{32{,}5\,\% \cdot 64\,\% + 67{,}5\,\% \cdot 60\,\%} \approx 33{,}9\,\%$.

zu b)

Gesamtstichprobe: 1.000 Realschülern

325 von 1.000 Realschülern wählen eine technische Ausbildung.

208 von 325 Realschülern, die eine technische Ausbildung wählen, haben in der Schule den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig belegt.

405 von 675 Realschülern, die keine technische Ausbildung wählen, haben in der Schule ebenfalls den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig belegt haben.

Demnach wählen 208 von 613 ($= 208 + 405$) Realschülern ($\approx 33{,}9\,\%$), die den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig belegt haben, später eine technische Ausbildung.

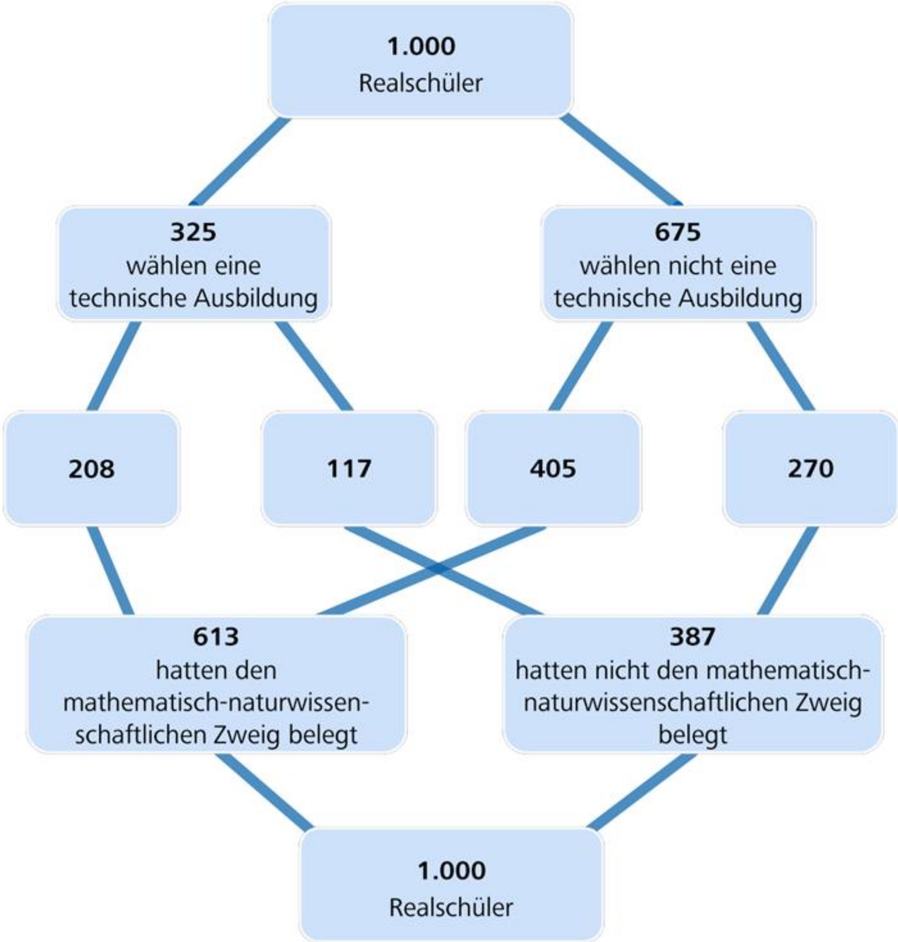
zu c)

Es kommen dann beispielsweise halbe oder 20,8 Personen heraus.

Das kann man grundsätzlich vermeiden, wenn man die „imaginäre“ Stichprobe nur groß genug wählt.

zu d)

(Doppel-)Baumdiagramm mit natürlichen Häufigkeiten:



zu e)

Mögliche Fragestellungen:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Realschüler keine technische Ausbildung wählt?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Realschüler, der keine technische Ausbildung wählt, in der Schule auch keinen mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig belegt hatte?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Realschüler, der den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig belegt hatte, später keine technische Ausbildung wählt?