Lehrerfortbildung

Zahlen im Mathematikunterricht aus unterschiedlichen Perspektiven

„Die Welt der Zahlen“

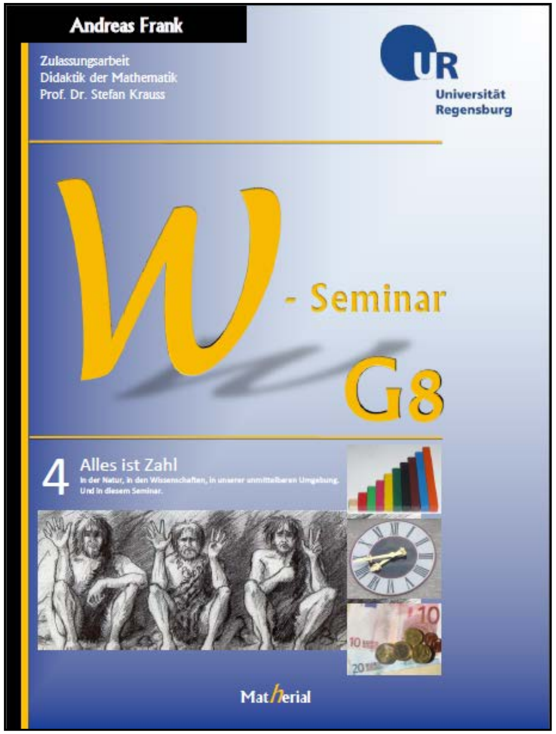
als W-Seminar

08. Oktober 2015

Universität Regensburg

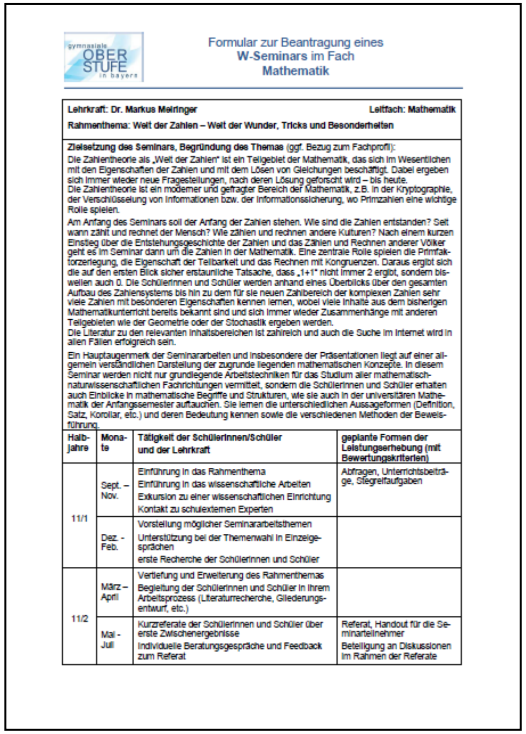
Andreas Frank
Lehrstuhl Didaktik der Mathematik
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Zulassungsarbeit
„Alles ist Zahl"



April 2012

W-Seminar
„Die Welt der Zahlen"



Formular zur Beantragung eines
**W-Seminars im Fach
Mathematik**

Lehrkraft: Dr. Markus Meiringer **Leitfach: Mathematik**

Rahmenthema: Welt der Zahlen – Welt der Wunder, Tricks und Besonderheiten

Zielsetzung des Seminars, Begründung des Themas (ggf. Bezug zum Fachprofil):

Die Zahlentheorie als „Welt der Zahlen" ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich im Wesentlichen mit den Eigenschaften der Zahlen und mit dem Lösen von Gleichungen beschäftigt. Dabei ergeben sich immer wieder neue Fragestellungen, nach deren Lösung geforscht wird – bis heute.
Die Zahlentheorie ist ein moderner und gefragter Bereich der Mathematik, z.B. in der Kryptographie, der Verschlüsselung von Informationen bzw. der Informationssicherung, wo Primzahlen eine wichtige Rolle spielen.

Am Anfang des Seminars soll der Anfang der Zahlen stehen. Wie sind die Zahlen entstanden? Seit wann zählt und rechnet der Mensch? Wie zählen und rechnen andere Kulturen? Nach einem kurzen Einstieg über die Entstehungsgeschichte der Zahlen und das Zählen und Rechnen anderer Völker geht es im Seminar dann um die Zahlen in der Mathematik. Eine zentrale Rolle spielen die Primfaktorzerlegung, die Eigenschaft der Teilbarkeit und das Rechnen mit Kongruenzen. Daraus ergibt sich die auf den ersten Blick sicher erstaunliche Tatsache, dass „1+1" nicht immer 2 ergibt, sondern bisweilen auch 0. Die Schülerinnen und Schüler werden anhand eines Überblicks über den gesamten Aufbau des Zahlensystems bis hin zu dem für sie neuen Zahlbereich der komplexen Zahlen sehr viele Zahlen mit besonderen Eigenschaften kennen lernen, wobei viele Inhalte aus dem bisherigen Mathematikunterricht bereits bekannt sind und sich immer wieder Zusammenhänge mit anderen Teilgebieten wie der Geometrie oder der Stochastik ergeben werden.
Die Literatur zu den relevanten Inhaltsbereichen ist zahlreich und auch die Suche im Internet wird in allen Fällen erfolgreich sein.

Ein Hauptaugenmerk der Seminararbeiten und insbesondere der Präsentationen liegt auf einer allgemein verständlichen Darstellung der zugrunde liegenden mathematischen Konzepte. In diesem Seminar werden nicht nur grundlegende Arbeitstechniken für das Studium aller mathematisch-naturwissenschaftlichen Fachrichtungen vermittelt, sondern die Schülerinnen und Schüler erhalten auch Einblicke in mathematische Begriffe und Strukturen, wie sie auch in der universitären Mathematik der Anfangssemester auftauchen. Sie lernen die unterschiedlichen Aussageformen (Definition, Satz, Korollar, etc.) und deren Bedeutung kennen sowie die verschiedenen Methoden der Beweisführung.

Halbjahre	Monate	Tätigkeit der Schülerinnen/Schüler und der Lehrkraft	geplante Formen der Leistungserhebung (mit Bewertungskriterien)
11/1	Sept. – Nov.	Einführung in das Rahmenthema Einführung in das wissenschaftliche Arbeiten Exkursion zu einer wissenschaftlichen Einrichtung Kontakt zu schulexternen Experten	Abfragen, Unterrichtsbeiträge, Stegreifaufgaben
	Dez. - Feb.	Vorstellung möglicher Seminararbeitsthemen Unterstützung bei der Themenwahl in Einzelgesprächen erste Recherche der Schülerinnen und Schüler	
11/2	März – April	Vertiefung und Erweiterung des Rahmenthemas Begleitung der Schülerinnen und Schüler in ihrem Arbeitsprozess (Literaturrecherche, Gliederungsentwurf, etc.)	
	Mai - Juli	Kurzreferate der Schülerinnen und Schüler über erste Zwischenergebnisse Individuelle Beratungsgespräche und Feedback zum Referat	Referat, Handout für die Seminarteilnehmer Beteiligung an Diskussionen im Rahmen der Referate

Abiturjahrgang 2013/2015

Erfahrungsbericht aus
dem W-Seminar

Aspekte, die der Einführung in das Rahmenthema dienten

Themen, die von den Oberstufenschülerinnen und -schülern in ihren Seminararbeiten bearbeitet wurden

08. Oktober 2015

Aufgabe aus dem W-Seminar:

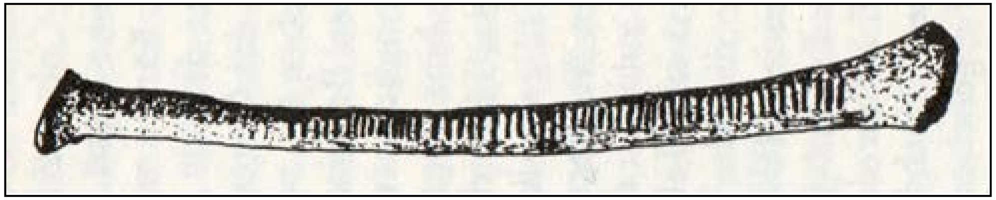
Heute ist Donnerstag, der 08. Oktober 2015.

Welcher Wochentag ist heute in 80 Jahren,
also am 08. Oktober 2095?

Was ist eigentlich eine Zahl?

- eine Zahl ist ein „durch ein bestimmtes Zeichen oder eine Kombination von Zeichen darstellbarer abstrakter Begriff, mit dessen Hilfe gerechnet, mathematische Operationen durchgeführt werden können“
(http://www.duden.de/rechtschreibung/Zahl)

- *Zahl* stammt etymologisch vom althochdeutschen Wort *zala* ab, und das bedeutet „Zahl; Menge; Aufzählung; Bericht, Rede“, eigentlich „eingekerbtes Merkzeichen“
(http://www.duden.de/rechtschreibung/Zahl)

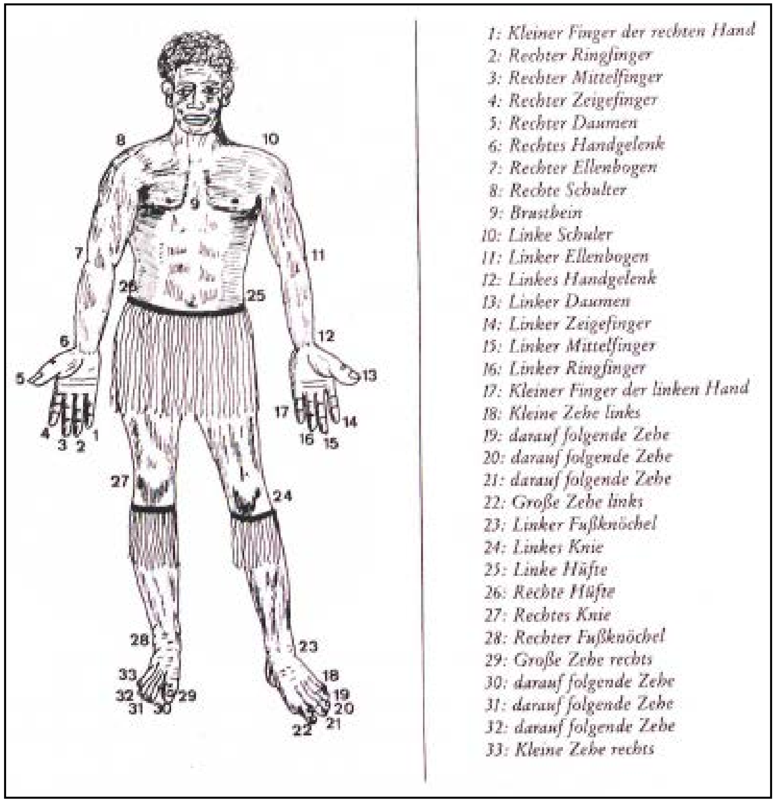


Knochen aus der Zeit zwischen dem 19. und 12. Jh. v. Chr. (Ifrah, S. 111)

- Kerbzeichen dienten dem Zweck des Zählens

Warum sind Zahlen überhaupt entstanden?

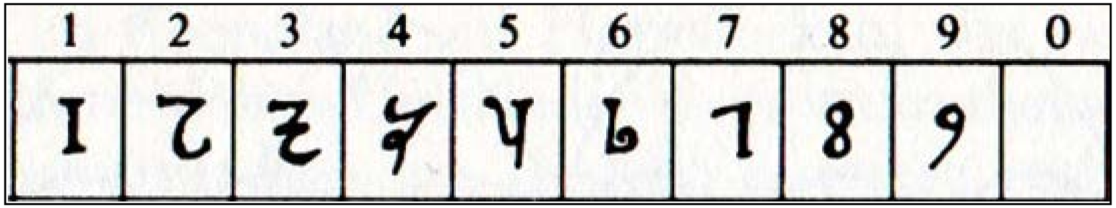
- Körperteile dienten als Hilfsmittel, um größere Mengen zahlenmäßig zu erfassen
- zu diesen Zählgesten kamen allmählich Laute dazu bis hin zu abstrakten Zahlwörtern
- der menschliche Verstand lernte, diesen abstrakten Zeichen eine konkrete Vorstellung zuzuordnen



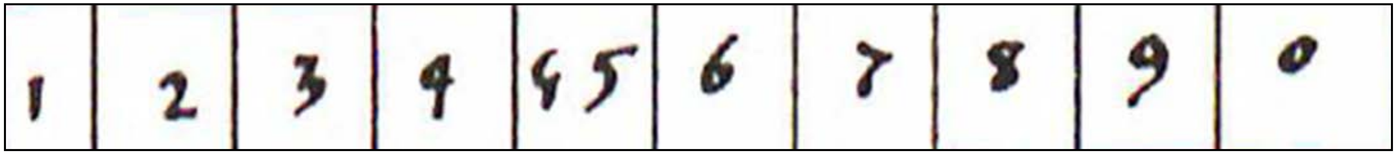
Körperbezogenes Zählverhalten eines Volkes australischer Ureinwohner (Ifrah, S. 30)

Wo kommen unsere Zahlen her?

- unsere heute verwendeten Zahlen wurden vor etwa 1500 Jahren in Nordindien entwickelt, im 8. Jh. durch die Araber übernommen und im Zuge arabischer Expansionsbewegungen bis nach Afrika und Spanien verbreitet
- diese Zahlschriften entwickelten sich weiter und hatten bereits große Ähnlichkeit mit unseren heute üblichen Ziffern



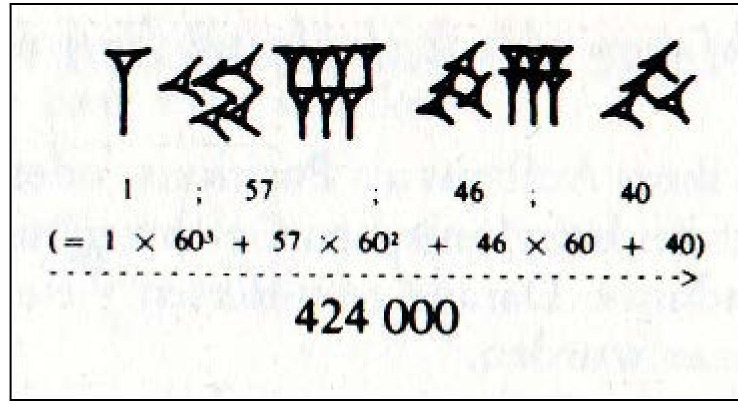
Spanische Handschrift aus dem Jahr 976 (Ifrah, S. 531)



Italienische Handschrift aus dem 15. Jh. (Ifrah, S. 535)

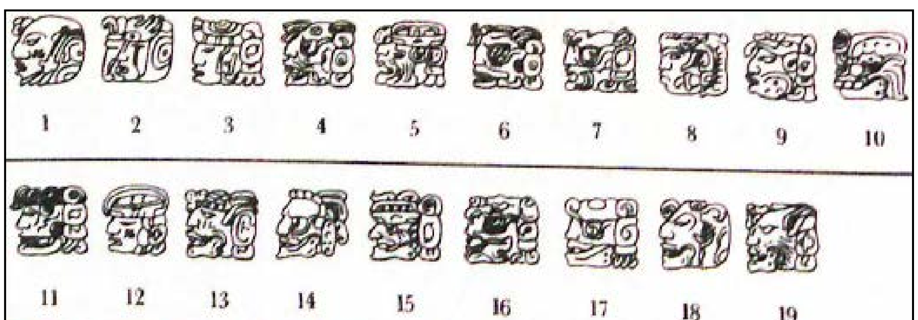
Wie sehen Zahlen in anderen Kulturen aus?

- die *Babylonier* verwendeten schon ab 2000 v. Chr. eine Zahlschrift mit Stellenwertsystem, ein Sexagesimalsystem (Basis 60)

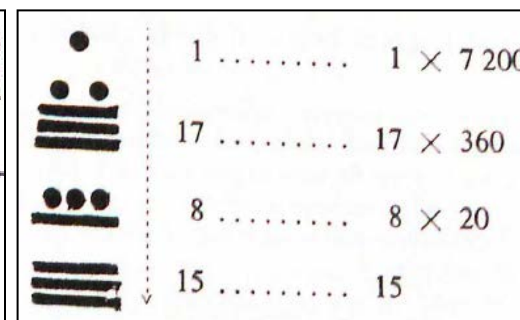


Babylonische Zahldarstellung (Ifrah, S. 415)

- die Schriften der Volksgruppe der *Maya* (Basis 20)



Hieroglyphenschrift der Maya
(Ifrah, S. 462)



Einfache Schrift der Maya
(Ifrah, S. 472)

Was verbindet man sonst noch mit Zahlen?

Rechercheergebnisse
der Schülerinnen und Schüler
aus dem W-Seminar

Die Zahl 7

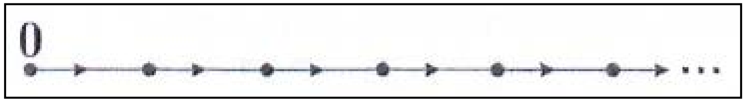
- im Christentum: Verbindung von
  3 = Geist und Seele (Dreifaltigkeit: Vater, Sohn, Heiliger Geist) sowie
  4 = Körper (vier Elemente: Feuer, Wasser, Erde, Luft)
- in Sprichwörtern: „das verflixte 7. Jahr"
- in der Religion: Gott hat die Welt an 7 Tagen erschaffen
- im Katholizismus: die 7 Sakramente, die 7 Todsünden

Die Zahl 12

- in der Musik: 12 Töne in der chromatischen Tonleiter der westlichen Musik
- in der Astrologie: 12 Sternzeichen, auch im chinesischen Kalender 12 Tierzeichen
- im Christentum: 12 Jünger Jesu

Was genau kennzeichnet die natürlichen Zahlen?

Ausgangspunkt ist folgende bekannte Darstellung von $\mathbb{N}_0$:



(Hischer, S. 211)

Ziel sind Axiome, die die Eigenschaften von $\mathbb{N}_0$ ganz präzise beschreiben.

Dedekind-Peano-Axiome Im Folgenden sei ν die Nachfolgerfunktion.

(N1) $0 \in \mathbb{N}_0$

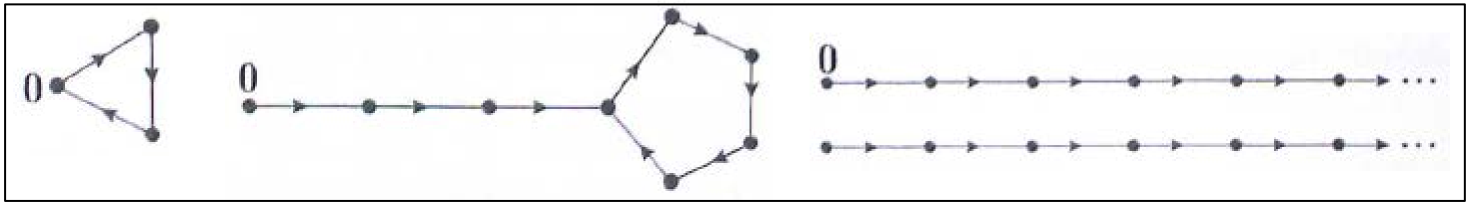
(N2) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0\colon \quad \nu(n) \in \mathbb{N}_0$

(N3) $\forall\, n \in \mathbb{N}_0\colon \quad \nu(n) \neq 0$

(N4) $\forall\, m,n \in \mathbb{N}_0\colon \quad \big(\nu(m) = \nu(n)\big) \Rightarrow (m = n)$

(N5) $\forall\, T \subseteq \mathbb{N}_0\colon \quad [(0 \in T) \wedge (\forall n \in T \Rightarrow \nu(n) \in T)] \quad \Rightarrow \quad T = \mathbb{N}_0$

Was ist hier falsch?



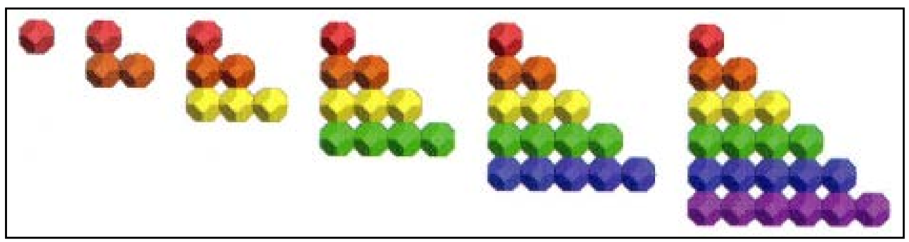
(Hischer, S. 211 f.)

Welche Zahlen verbergen sich hinter der Gaußschen Summenformel?

Gaußsche Summenformel: $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

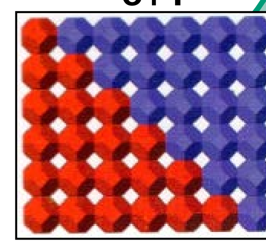
von den Dreieckszahlen zur Formel

Für $n =$	1	2	3	4	5	6	…
ergibt sich	1	3	6	10	15	21	…



Die ersten sechs Dreieckszahlen (Conway & Guy, S. 42)

6+1



6

(Conway & Guy, S. 43)

Die *Dreieckszahlen* sind (wie z. B. auch Quadratzahlen, Fünfecks-zahlen oder Pyramidenzahlen) figurierte Zahlen, weil sie zu einer geometrischen Figur in Beziehung stehen.

Warum sind Primzahlen so interessant?

Primzahlen faszinieren seit Jahrtausenden die Menschen:
Wie findet man Primzahlen? Wie viele Primzahlen gibt es?
Wie sind Primzahlen verteilt? Welche ist die größte Primzahl?
Beleg hierfür ist u.a. die Jagd nach immer neuen Rekord-Primzahlen.

Aufgabe aus dem W-Seminar:

a) Schätzen Sie, wie groß die bislang größte bekannte Primzahl ist (d.h. wie viele Dezimalstellen sie hat)!

b) Wie viele DIN-A-4-Seiten würden Sie ungefähr benötigen, wenn Sie auf jedem karierten Blatt Papier in jedes Kästchen eine Ziffer schreiben würden?

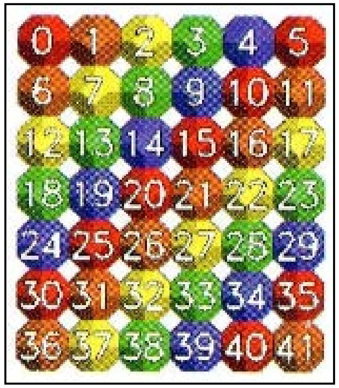
a) Die Primzahl $2^{57.885.161} - 1$ hat $17.425.170$ Stellen.
b) Man benötigt ca. 7.260 DIN-A-4-Seiten.

Welcher Wochentag ist heute in 80 Jahren?

Aufgabe aus dem W-Seminar:

Heute ist Donnerstag, der 08. Oktober 2015.

Welcher Wochentag ist heute in 80 Jahren, also am 08. Oktober 2095?



Restklassen modulo 5
(Conway & Guy, S. 38)

Ein Jahr hat 365 Tage, alle vier Jahre ist Schaltjahr. Vom 08.10.2015 bis zum 08.10.2095 vergehen also $80 \cdot 365 + 20$ Tage.

$$80 \cdot 365 = 80 \cdot (350 + 14 + 1) \equiv 80 \cdot 1 \ (mod\ 7) \equiv 3 \ (mod\ 7)$$

$$20 \equiv 6 \ (mod\ 7)$$

$$80 \cdot 365 + 20 \equiv 3 + 6 \ (mod\ 7) \equiv 2 \ (mod\ 7)$$

Somit ist der 08. Oktober 2095 ein „Donnerstag plus 2 Tage“, also ein Samstag.

Warum reichen die rationalen Zahlen nicht aus?

Aufgabe aus dem W-Seminar:

Betrachten Sie folgende in $\mathbb{Q}$ rekursiv definierte Folge:

$$x_1 = 1, \quad x_n = 1 + \frac{1}{1+x_{n-1}}$$

Was ist das Besondere an dieser Zahlenfolge?

Berechnen Sie dazu die ersten Folgenglieder und betrachten Sie die Ergebnisse in Dezimalschreibweise!

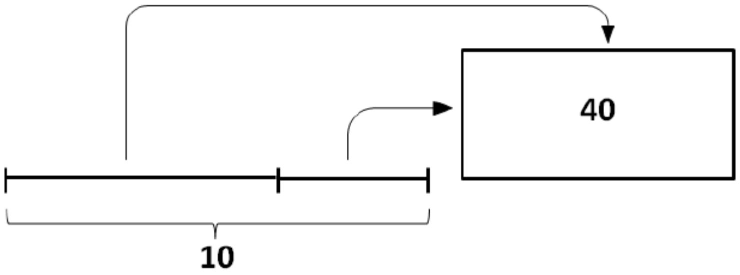
$x_1 = 1$
$x_2 = 1{,}5$
$x_3 = 1{,}4$
$x_4 = 1{,}416666666\ldots$
$x_5 = 1{,}413793103\ldots$
$x_6 = 1{,}414285714\ldots$
$x_7 = 1{,}414201183\ldots$
$x_8 = 1{,}414215686\ldots$
$x_9 = 1{,}414213198\ldots$

Ergebnis: Die Zahlenfolge konvergiert gegen eine Zahl, die nicht Element der Menge der rationalen Zahlen ist:
$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$

Kommt nach den reellen Zahlen noch was?

Aufgabe aus dem W-Seminar: Die „Cardano-Aufgabe“

Der italienische Mathematiker Cardano setzte sich mit der Aufgabe auseinander, eine Strecke der Länge 10 so in zwei Stücke zu zerlegen, dass das aus ihnen gebildete Rechteck die Fläche 40 hat.



Stellen Sie eine Gleichung für die Berechnung der Fläche des Rechtecks auf und bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung!

$$x \cdot (10 - x) = 40$$

$$-x^2 + 10x - 40 = 0$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Sind imaginäre Zahlen real?

(Conway & Guy, S. 238)

Gibt es besonders „schöne" Zahlen?

Die *Euler-Formel*, die schönste Formel der Mathematik, vereint fünf besonders schöne Zahlen miteinander, die fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik: (vgl. Beutelspacher, S. 181 ff.)

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- neutrales Element der Addition: 0
- neutrales Element der Multiplikation: 1
- Kreiszahl: π
- Eulersche Zahl: e
- imaginäre Einheit: i

Übersicht über die Einführungsphase (Gliederung)

1 Sitzung

1 Geschichte und Bedeutung der Zahlen

1.1 Die Entstehungsgeschichte der Zahlen
1.2 Die arabisch-indischen Ziffern
1.3 Zahlen in anderen Kulturen
1.4 Zahlensymbolik und andere Assoziationen

1 Sitzung

2 Geschichte und Bedeutung der Mathematik

2.1 Die Entstehungsgeschichte der Mathematik
2.2 Teilgebiete der Mathematik
2.3 Persönlichkeiten der Mathematik
2.4 Die Sprache der Mathematiker und ihre Formulierungen

8 Sitzungen

3 Das Mathemativersum – eine Welt voller Zahlen

3.1 Von den natürlichen bis zu den reellen Zahlen – und noch weiter? (Inhaltsübersicht siehe nächste Folie)
3.2 Fünf wunderbare Zahlen – die „schönste Formel der Mathematik“

Übersicht über die Einführungsphase (Kapitel 3.1)

- axiomatischer Aufbau der natürlichen Zahlen (Dedekind-Peano-Axiome)
- Gaußsche Summenformel, weitere Summen- und Produktformeln
- Teilbarkeit und Primzahlen (Primfaktorzerlegung, Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie, Primzahlsuche, Satz des Euklid)
- Beweisprinzip der vollständigen Induktion, direkter Beweis, indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis
- kongruente Zahlen (Restklasse, Äquivalenzklasse, Rechenregeln)
- Zahlenfolgen (Definition, Bildungsmöglichkeiten, Eigenschaften)
- algebraische und transzendente Zahlen
- komplexe Zahlen (imaginäre Einheit i, Real- und Imaginärteil, Rechenregeln, konjugiert komplexe Zahl, Betrag und Argument einer komplexen Zahl)
- Darstellung komplexer Zahlen als Punkte in der Gaußschen Zahlenebene, Darstellung als geordnete Paare reeller Zahlen
- Umrechnung komplexer Zahlen (kartesische Koordinaten, Polarkoordinaten)

Seminararbeitsthemen aus dem W-Seminar

Vergleich von Zahlensystemen

- Zahlensystem der Maya:
  Ursprung, Entwicklung, Verwendung
- Zahlensystem der Römer:
  Ursprung, Entwicklung, Verwendung
- Vergleich beider Zahlensysteme:
  Vor- und Nachteile, heutige Verwendung

10x360 + 14x20 + 8x1

3888

MMMDCCCLXXXVIII

3x1000 + 1x500 + 3x100 + 1x50 + 3x10 + 1x5 + 3x1

Quaternionen

- Definition der komplexen Zahlen
  Rechnen in $\mathbb{C}$
  Rotation im 2-dimensionalen Raum
- Definition der Quaternionen
  Rechnen in $\mathbb{H}$
  Rotation im 3-dimensionalen Raum

$$z = a + b \cdot i$$

$$q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$$

Seminararbeitsthemen aus dem W-Seminar

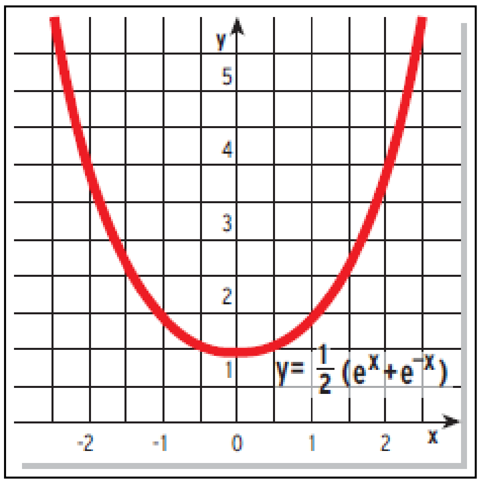
Die Eulersche Zahl *e*

- Herleitung (Problem der stetigen Verzinsung)
- Darstellungsmöglichkeiten, Eigenschaften
- Anwendungen (Kettenlinie, logarithmische Spirale)

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{\ddots}}}}$$



„Kettenlinie"
(Rauchhaupt, S. 59)

Gateway Arch, St. Louis, USA
(https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/00/St_Louis_night_expblend_cropped.jpg/240px-St_Louis_night_expblend_cropped.jpg)

Hinweis: Geschichtliches zur Zahl *e* finden Sie im angehängten Artikel.

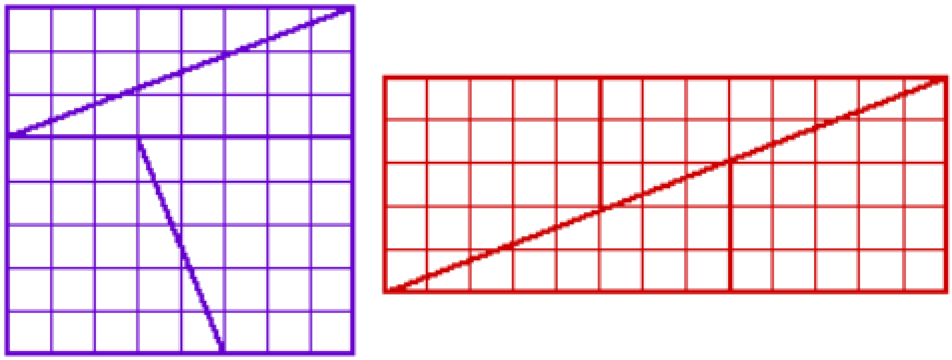
Seminararbeitsthemen aus dem W-Seminar

Die Fibonacci-Zahlen

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

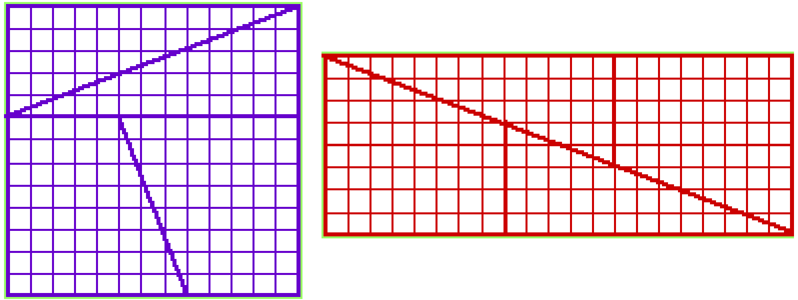
- Definition, Eigenschaften, Herleitung (Kaninchenaufgabe)
- Verwandtschaft mit dem Goldenen Schnitt
- Vorkommen in der Natur
- Das „Fibonacci-Jigsaw-Puzzle“
  (http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibpuzzles2.html#jigsaw1)

„5, 8, 13“-Puzzle



$8 \cdot 8 = \mathbf{64}$? $\mathbf{65} = 5 \cdot 13$

„8, 13, 21“-Puzzle



$13 \cdot 13 = \mathbf{169}$? $\mathbf{168} = 8 \cdot 21$

Seminararbeitsthemen aus dem W-Seminar

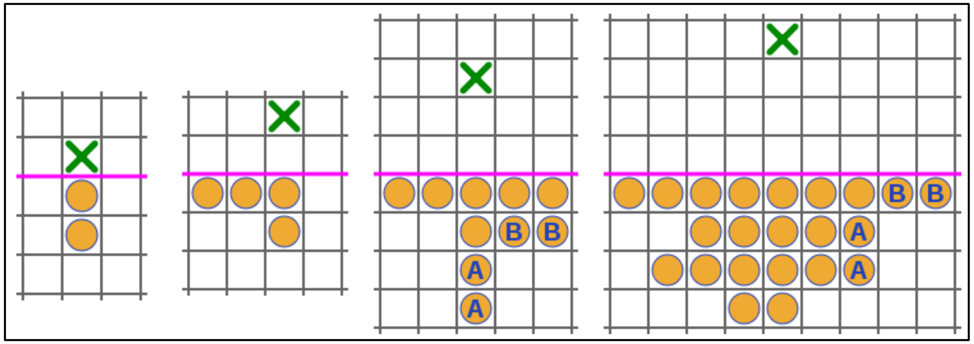
Der Goldene Schnitt Φ

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- Definition, Konstruktion (innere und äußere Teilung)
- Goldene Geometrie (Goldenes Fünfeck, Goldenes Dreieck, Goldenes Rechteck)
- Der Goldene Schnitt außerhalb der Mathematik
- Das Spiel „Conway's Soldaten"

Ziel ist, die Soldaten möglichst weit in die gegnerische Hälfte zu befördern.

1. Reihe 2. Reihe 3. Reihe 4. Reihe



Lösungsmöglichkeiten zu „Conways Soldaten"
(https://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s_Soldiers)

Geht das unendlich weit?

Nein. Bereits die 5. Reihe kann nicht mehr erreicht werden.

Gezeigt werden kann dies mit einem Beweis, in dem der Goldene Schnitt benutzt wird
(vgl. http://www.mathe-seiten.de/conway.pdf).

Übersicht über die Seminararbeitsthemen

- Die 1. Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 2014
- Vergleich von Zahlensystemen
- Das Pascalsche Dreieck
- Stellenwertsysteme und Teilbarkeitsregeln
- Euklidischer Algorithmus
- Mersennesche und Fermatsche Primzahlen
- Die Geschichte des letzten Satzes von Fermat
- Ungelöste Probleme der Zahlentheorie
- Die Fibonacci-Zahlen
- Der Goldene Schnitt Φ
- Die Kreiszahl π
- Die Eulersche Zahl e
- Quaternionen

Vielen Dank
für die Aufmerksamkeit!

Literatur

Beutelspacher, A. (2010). *Albrecht Beutelspachers Kleines Mathematikum. Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik* (2., durchgesehene Aufl.). München: C. H. Beck.

Conway, J. H. & Guy, R. K. (1997). *Zahlenzauber. Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen.* Basel: Birkhäuser.

Frank, A. (2012). *Alles ist Zahl.* Unveröffentlichte Zulassungsarbeit, Universität Regensburg.

Hischer, H. (2012). *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl.* Wiesbaden: Springer.

Ifrah, G. (1991). *Universalgeschichte der Zahlen* (2. Aufl.). Frankfurt am Main/New York: Campus.

Rauchhaupt, U. von (7. Februar 2010). Die steile Zahl. *Frankfurter Allgemeine Sonntagszeitung, 5*, 59.