1.2. Die Anwendung stochastischer Lernmodelle auf einfache Aufgaben

Alf ZIMMER, Universität Oldenburg

In diesem Anhang sollen die Grundprinzipien stochastischer Lernmodelle (mit diskreten Zuständen) beschrieben werden, wie sie von ATKINSON (s. S. 23 ff.) im Rahmen des computerunterstützten Unterrichts angewendet werden.

Die Gemeinsamkeit dieser Modelle liegt darin, daß in ihnen einfache Regeln aufgestellt werden, nach denen die Wahrscheinlichkeiten für Verhaltensweisen (Abgabe einer richtigen bzw. falschen Antwort) des Lernenden bestimmt werden können. Diese Regeln spezifizieren, in welcher Weise die Verhaltenswahrscheinlichkeit eines Lernenden zu einem Zeitpunkt t von

a) seinen individuellen Fähigkeiten,
b) der Struktur und Schwierigkeit der Aufgabe sowie
c) der Anzahl von erfolgreichen bzw. nicht erfolgreichen Lerndurchgängen bis zum Zeitpunkt k

abhängen.

Die Einfachheit der Regeln bedingt einerseits, daß diese Modelle jeweils nur für sehr spezifische Situationen gelten, zum anderen ermöglicht sie aber eine genaue Prüfung der Anwendbarkeit und einen Vergleich zwischen konkurrierenden Modellen. Diese Eigenschaften haben zur Anwendung der Modelle bei der Untersuchung der Bedingungen ‚einfacher' Lernaufgaben geführt; einfache Lernaufgaben in diesem Sinn sind u. a. Vokabellernen und Regellernen (z. B. Operationen mit Binärzahlen, Anwendung von Wahrheitstafeln etc.).

Im Rahmen der stochastischen Lernmodelle gibt es zwei entgegengesetzte Konzeptionen des Lernprozesses; in der einen Konzeption wird von einem graduellen Anstieg der Assoziationsstärke zwischen den Vorgaben und den dazugehörigen richtigen Reaktionen ausgegangen, in der anderen Konzeption wird von diskreten Zuständen auf der Seite des Lernenden ausgegangen; Beispiele für solche Zustände sind z. B.: fehlende Kompetenz – Kompetenz.

Speziell bei Aufgaben wie das Erlernen eines wissenschaftlichen Vokabulars, eines neuen Alphabets oder einer Programm-Sprache (FORTRAN IV, ALGOL 60 etc.) erscheint die Annahme diskreter Zustände im Lernprozeß bezogen auf einzelne Lerneinheiten adäquat. Da bei diesen Lernaufgaben der Einsatz von computer-unterstütztem Unterricht besonders erfolgversprechend erscheint, bietet es sich an, den jeweiligen aktuellen Lernzustand bezogen auf eine Lerneinheit und einen individuellen Lernenden mit Hilfe von Modellen zu analysieren, die von diskreten Lernzuständen ausgehen.

Mathematisch läßt sich die Abhängigkeit der Verhaltenswahrscheinlichkeiten von unterschiedlichen Zuständen durch sogenannte MARKOVsche Prozesse fassen. Diese Modelle gehen aus von a-priori-Wahrscheinlichkeiten für die Zustände und von Wahrscheinlichkeiten für den Übergang von einem Zustand in einen anderen bei jedem Lernvorgang.

Im weiteren wird nur auf diese Lernmodelle eingegangen, um die notwendigen Techniken zu vermitteln, mit deren Hilfe eine Diagnostik der jeweiligen individuellen Lernsituation (für Vokabel j besteht bei Schüler i die größte Wahrscheinlichkeit in den Zustand ‚Kompetenz' überzugehen) durchzuführen und dementsprechend den Lernprozeß zu optimieren.

Das einfachste Modell dieser Art nimmt nur zwei Zustände an: Nicht-Kompetenz und Kompetenz.

Grafisch läßt sich dieser Sachverhalt wie in Abbildung 1 darstellen.

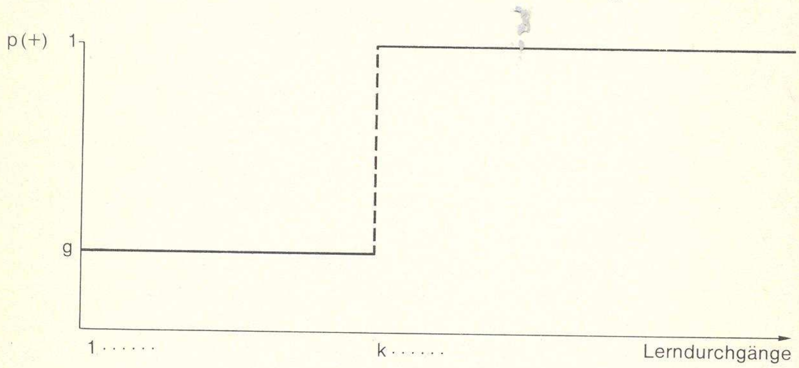

Abb. 1: Die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit einer richtigen Antwort von den Lerndurchgängen

In der Abbildung bedeuten g die Wahrscheinlichkeit, im Zustand der Nicht-Kompetenz die richtige Antwort zu geben, und k der Zeitpunkt, zu dem vom Zustand ‚Nicht-Kompetenz' in den Zustand ‚Kompetenz' übergegangen wird.

Mit Hilfe der folgenden Axiome (oder koordinierenden Definitionen) lassen sich Schätzfunktionen der individuellen Parameter des Lernmodells bestimmen:

1. Die Aufgabe in jedem Aufgabe-Antwort-Paar kann mathematisch durch ein hypothetisches Reiz-Element repräsentiert werden.
2. Bei jeder Darbietung der Aufgabe wird diese korrekt identifiziert.
3. Bei jedem Durchgang befindet sich der Lernende hinsichtlich des Aufgabe-Antwort-Paares im Zustand der Kompetenz (K) oder Nichtkompetenz (N).
4. Nach jedem Durchgang mit korrekter Antwort ist die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand N in den Zustand K überzugehen, gleich c und die Wahrscheinlichkeit, im Zustand K zu verbleiben, gleich 1.
5. Im Zustand K wird mit Wahrscheinlichkeit 1 die richtige Antwort gegeben; im Zustand N ist die Wahrscheinlichkeit einer korrekten Antwort gleich g.
6. Der Lernende beginnt jeweils im Zustand N.

Für die Umsetzung dieser Axiome in empirische Realisation erscheint es notwendig, die einzelnen Sätze weiter auszuführen. Die Annahme eines hypothetischen Reizelements (in Axiom 1) besagt lediglich, daß es sich um eine Aufgabe handeln muß, die hinreichend verschieden von anderen Aufgaben ist und die nicht aus mehreren Unteraufgaben besteht.
Mit dem Postulat von Axiom 2, wird für idealisierte, d. h. störungs- und ermüdungsfreie Lernsituationen angenommen, daß jede Aufgabe erstens bemerkt und zweitens nicht mit einer anderen Aufgabe verwechselt wird.
Die Axiome 3, 4 und 5 definieren den Alles-oder-Nichts-Charakter dieses Modells; durch empirische Untersuchungen läßt sich jeweils prüfen, ob die aus den Axiomen abzuleitenden Aussagen mit den experimentellen Ergebnissen in Einklang zu bringen sind. Empirisch prüfbare Aussagen sind z. B.

a) die Lernrate c ist für einen gegebenen Lernenden konstant (Axiom 4),
b) eine einmal gelernte richtige Antwort wird nicht mehr vergessen (Axiom 4),
c) solange der Zustand N vorliegt, wird mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit g die richtige Antwort erraten.

In Axiom 6 wird angenommen, daß kein Vorwissen besteht; während diese Annahme für Lerninhalte wie Programmiersprachen oder Boolesche Algebra zutreffen mag, erscheint sie z. B. beim Vokabel- oder Begriffslernen fraglich.
Formal lassen sich diese Eigenschaften des Modells für ein einfaches Aufgabe-Antwort-Paar folgendermaßen fassen:
1. p (korrekte Antwort / Zustand N) = g
2. p (korrekte Antwort / Zustand K) = 1
3. Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$
\begin{array}{llcc}
 & & \multicolumn{2}{c}{\text{Zustand in Durchgang } k+1} \\
 & & K & N \\
\text{Zustand in Durchgang } k & \begin{array}{c} K \\ N \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1-c \end{bmatrix}}
\end{array}
$$

Mit Hilfe von gewichteten Graphen läßt sich die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten veranschaulichen (Abbildung 2).

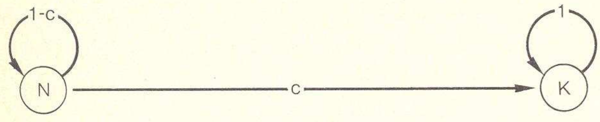

Abb. 2: Graphen der Übergänge zwischen den Zuständen K und N

Zur Überprüfung des Modells lassen sich nun die Wahrscheinlichkeiten, nach einem Durchgang noch nicht gelernt zu haben (Zustand N) bzw. gelernt zu haben (Zustand K), berechnen. Wenn nicht gelernt worden ist, muß der Lernende einmal vom Zustand N wieder in den Zustand N übergegangen sein:

$$4.\ P(N \text{ nach } 1 \text{ Durchgängen} = \overbrace{(1-c)\cdot(1-c)\ldots(1-c)}^{\text{k-mal}} = (1-c)^{k}$$

da N und K einander ausschließende und erschöpfende Zustände sind, ergibt sich für p (K nach k Durchgängen) = 1 – (1–c).
Der Graph der Wahrscheinlichkeit, in Zustand K zu sein in Abhängigkeit von den Durchgängen k, wird in Abbildung 3 wiedergegeben.

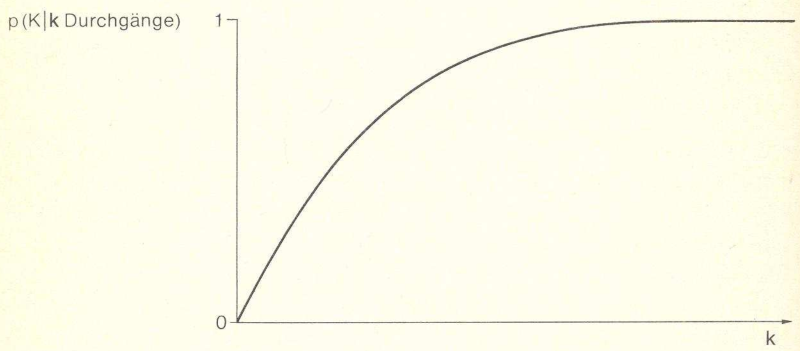

Abb. 3: Die Abhängigkeit der Zustandswahrscheinlichkeit von den Lerndurchgängen

Um zu überprüfen, ob ein Lernprozeß tatsächlich die vom Modell geforderten Alles- oder-Nichts-Eigenschaften besitzt, kann man bei vielen Aufgabe-Antwort-Paaren die Wahrscheinlichkeiten p (N/k Durchgänge) und p (N/k + 1 Durchgänge) schätzen, und überprüfen, ob

$$\frac{p\,(N|k+1 \text{ Durchgänge})}{p\,(N|k \text{ Durchgänge})} = 1\text{-}c$$

für alle k. Finden sich deutliche Unterschiede, so weist dies auf eine Abhängigkeit des Parameters c von k hin.
Wie aus Daten eines Lernversuches der Parameter c, der die Lernfähigkeit der Versuchsperson charakterisiert, geschätzt werden kann, soll an dem folgenden Beispiel demonstriert werden (‚+' bedeutet hier korrekte Antwort; ‚–' falsche).
Für die Schätzung des Parameters c liegen verschiedene Methoden vor (s. Atkinson, Bower, Crothers 1965); die hier vorgestellte Maximum-Likelihood-Methode liefert Schätzungen derart, daß die Chance (Likelihood) des Auftretens der beobachteten Daten maximiert wird. Andere Schätzverfahren für Parameter in Lernmodellen basieren auf der Momentmethode, der Methode der kleinsten Quadrate oder auf dem Minimum-χ^2-Verfahren.
Das Ergebnis einer Lernaufgabe, bestehend aus fünf Begriffen, die in multiple-choice-Vorgabe mit jeweils fünf Antwortmöglichkeiten erlernt werden, sind in Tabelle 1 wiedergegeben.
Als Kriterium für das Erlernen eines Begriffs werden hier fünf richtige Antworten nacheinander genommen, das entspricht bei fünf Alternativen und damit einer Ratewahrscheinlichkeit $g = 0.2$, einer Zufallswahrscheinlichkeit $p(\alpha) \leq 0.005$.
Für eine Maximum-Likelihood-Schätzung von c werden als Daten die

Tab. 1: Verzeichnis der richtigen und falschen Antworten

Begriffe	Durchgänge: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	+	–	–	+	–	–	+	+	+	+	+
2	–	+	–	–	–	+	+	+	+	+	+
3	–	–	+	–	+	–	+	+	+	+	+
4	–	–	–	–	+	+	+	+	+	+	+
5	–	+	–	–	–	–	+	+	+	+	+

Tab. 2: Anzahl von Fehlern und Durchgängen pro Begriff

$f_1 = 2$	$d_1 = 6$
$f_2 = 1$	$d_2 = 5$
$f_3 = 2$	$d_3 = 6$
$f_4 = 0$	$d_4 = 4$
$f_5 = 1$	$d_5 = 6$
$\sum_i^n f_i = 6$	$\sum_i^n d_i = 27$

Anzahl von Fehlern (f_j) und die Anzahl von Durchgängen (d_i) pro Begriff bis zum letzten Fehler benötigt (s. Tabelle 2).
Aus den Axiomen läßt sich ableiten, daß die Wahrscheinlichkeit von genau k Durchgängen bis zum letzten Fehler

$$5. \quad p\,(d_i = k) = \frac{c\,(1-g)\,(1-c)^{k-1}}{1-g+g\,c}$$

ist; für den Fall, daß kein Fehler gemacht wird, vereinfacht sich dies zu

$$6. \quad p\,(d_i = 0) = \frac{c\,g}{1-g+g\,c}$$

Unter der Annahme, daß es sich um einen Alles- oder-Nichts-Prozeß handelt, ist die Wahrscheinlichkeit, daß exakt m Fehler bei d_i Durchgängen auftreten, die binomiale Wahrscheinlichkeit für m–1 Fehler in den ersten d_i –1 Durchgängen

$$7. \quad p\,(f_i = m | d_i \geq m) = \binom{d_i - 1}{m - 1} (1-g)^{m-1}\, g^{d_i - m}$$

$$7.a) \quad p\,(f_i = 0 | d_i = 0) = 1$$

Aus diesen Überlegungen folgt, daß die Chance (Likelihood) für eine spezielle Sequenz von richtigen und falschen Antworten den folgenden Gleichungen entspricht:

$$8. \quad L\,(+, -, \ldots, +) = \frac{c}{1-g+g\,c} (1-g)^{f_i}\, g^{d_i}\, (1-c)^{d_i - 1}$$

bzw. für den Fall, daß nur richtige Antworten gegeben wurden

$$8.a) \quad L\,(+, +, \ldots, +) = \frac{cg}{1-g+cg}$$

In Gleichung 8 wird einfach dargestellt, daß der letzte Fehler in Durchgang d_i stattgefunden hat multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit der speziellen Sequenz von + und –.
Für die Zusammenfassung aller Sequenzen zum Zweck der Schätzung von c ist es einfacher, wenn die Notation vereinfacht wird:

$$9. \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i = D$$

$$9.a) \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i = F$$

Die Anzahl der Aufgaben, bei denen keine falschen Antworten gegeben wurden, wird mit D_0 bezeichnet (im vorliegenden Beispiel ist $D_0 = O$). Unter der Annahme, daß die Lernwahrscheinlichkeiten für die einzelnen Aufgaben ausschließlich von c abhängen, lassen sich die Chancen für das Auftreten der einzelnen Antwortsequenzen aufmultiplizieren und ergeben dann die Likelihood-Funktion für c.

$$10. \qquad L(c) = \left(\frac{cg}{1-g+cg}\right)^{D_0} \prod_{i}^{n} \frac{c\,(1-g)^{f_i}\; g^{d_i-f_i} \quad (1\;c)^{d_i-i}}{1-g+cg}$$

$$11. \qquad L(c) = \left(\frac{c}{1-g+cg}\right)^{n} g^{D+D_0-F}\,(1-g)^{F}\,(1-c)^{D+D_0-n}$$

Da die Schätzung von c, die L(c) maximiert auch log L(c) maximiert, wird aus Gründen der Vereinfachung mit log L(c) weitergearbeitet, weil hierbei aus Produkten Summen und aus Exponenten Faktoren werden.

$$12. \qquad \log L(c) = n \log c - n \log(1-g+cg) + (D + D_0 - F) \log g$$
$$+ F \log(1-g) + (D + D_0 - n) \log(1-c)$$

Um das Maximum dieser Funktion zu bestimmen, wird partiell nach c differenziert und die erste Ableitung gleich Null gesetzt.

$$13. \qquad \frac{\partial \log L(c)}{\partial c} = \frac{n\,(1-g)}{c\,(1-g+cg)} - \frac{D + D_0 - n}{1-c}$$

$$14. \qquad O = g\,(D + D_0 - n)\,c^2 + (1-g)\,(D + D_0)\,c - (1-g)\,n$$

Durch Bestimmung der 2. Ableitung ist leicht festzustellen, daß die größere reelle Wurzel das Maximum angibt. Damit ergibt sich für die Schätzung von c

$$\hat{c} = \frac{\sqrt{(1-g)^2 (D + D_O)^2 + 4\,g(1-g)\,n\,(D + D_O - n)} - (1-g)\,(D + d_O)}{2\,g(D + D_O - n)}$$

Für das vorliegende Beispiel ergibt sich

$$\hat{c} = \frac{\sqrt{(1-0{,}2)^2 \cdot (27+0)^2 + 4 \cdot 0{,}2\,(1-0{,}2) \cdot 5 \cdot (27+0-5)} - (1-0{,}2) \cdot 27+0)}{2 \cdot 0{,}2\,(27+0-5)}$$

$$= 0{,}173$$

Sehr detaillierte Untersuchungen über die Eigenschaften von Maximum-Likelihood-Schätzungen für stochastische Lernmodelle finden sich bei TACK (1976).

Für Aufgaben von der vorgestellten Art wiesen SUPPES & GINSBURG (1963) nach, daß die Wahrscheinlichkeiten für einen Erfolg im Zustand N nicht immer konstant bleibt, sondern vor allem bei komplexeren Aufgaben die Wahrscheinlichkeiten für korrekte Antworten die in Abbildung 4 dargestellte Abhängigkeit von den Lerndurchgängen zeigen.

In diesem Modell finden sich 3 Zustände: Nichtkompetenz (N), Teilkompetenz (T), Kompetenz (K). Unter dem Begriff der Teilkompetenz ist ein Zustand zu verstehen, in dem eine Unteraufgabe in den Zustand der Kompetenz übergegangen ist. Ein Beispiel dafür aus dem Bereich des Erlernens wissenschaftlicher Termini der Psychologie wäre, wenn man von einem Begriff weiß, daß er aus dem Teilbereich Motivation stammt;

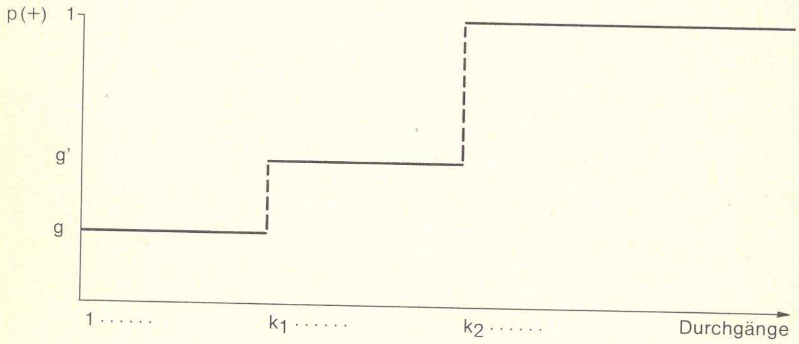

Abb. 4: Die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit einer richtigen Antwort von den Lerndurchgängen bei schwierigeren Aufgaben

durch dieses Teilwissen verringert sich die Anzahl der in Frage kommenden Begriffsdefinitionen und damit erhöht sich die Wahrscheinlichkeit einer richtigen Antwort von g auf g^1 zum Zeitpunkt k_1. In diesem Zustand bleibt die Ratewahrscheinlichkeit wieder konstant, bis zum Zeitpunkt k_2 die Kompetenz erreicht wird.
Mathematisch läßt sich ein solcher Lernprozeß durch die unter 13 angegebene Matrix von Übergangswahrscheinlichkeiten darstellen.

13.

$$\begin{array}{lcc} & & \text{Zustand in Durchgang } k+1 \\ & & \begin{array}{ccc} K & \;\;T\;\; & N \end{array} \\ \text{Zustand in Durchgang } k & \begin{array}{c} K \\ T \\ N \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1-b & 0 \\ 0 & c & 1-c \end{bmatrix} \end{array}$$

Dieser Matrix entspricht der gerichtete Graph in Abbildung 5.

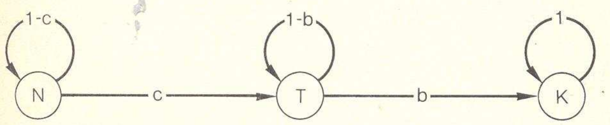

Abb. 5: Graphen der Übergänge im Drei-Zustandsmodell

In diesem Modell ist ein direktes Übergehen vom Zustand N in den Zustand K nicht möglich; dies bedeutet, daß eine Teilaufgabe zunächst beherrscht werden muß, ehe die Gesamtaufgabe gelöst werden kann. Verallgemeinernd kann festgehalten werden, daß für eine Aufgabe, die aus n streng hierarchisch geordneten Teilaufgaben besteht, ein $(n+1)$-Zustandsmodell adäquat ist. Für viele praktische Zielsetzungen stimmt jedoch das Drei-Zustandsmodell hinreichend genau mit den Daten überein.
Die Bestimmung der Parameter c und b erfolgt analog dem Vorgehen im Zwei-Zustandsmodell, nachdem der Zeitpunkt k_1 bestimmt worden ist. Atkinson (s. o.) erweitert diese Konzeption noch dadurch, daß er die beim Vokabellernen z. B. besonders häufig auftretenden Interaktionen berücksichtigt, indem er neben dem Drei-Zustandsmodell für das direkte Erlernen einer Aufgabe noch zwei weitere Modelle für die Beeinflussung des Lernens einführt (s. Tabelle 3).

Tab. 3: Bedingungen für die Anwendung der jeweiligen Drei-Zustandsmodelle bei Erlernen einer Aufgabe j

Bedingung	Lernmodell
Aufgabe j wird vorgegeben	$\begin{array}{cc} & k+1 \\ & \begin{array}{ccc} N & T & K \end{array} \\ k \begin{array}{c} N \\ T \\ K \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ a & 1-a & 0 \\ bc & c(1-b) & 1-c \end{array}\right] \end{array}$
andere Aufgabe wird vorgegeben und mit der Antwort für j reagiert	$\begin{array}{cc} & k+1 \\ & \begin{array}{ccc} N & T & K \end{array} \\ k \begin{array}{c} N \\ T \\ K \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-f & f \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$
andere Aufgabe wird vorgegeben und mit einer anderen Antwort als der für j reagiert	$\begin{array}{cc} & k+1 \\ & \begin{array}{ccc} N & T & K \end{array} \\ k \begin{array}{c} N \\ T \\ K \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ (1-f)a & (1-f)(1-a) & f \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$

In diesen Modellen lassen sich die Parameter a, b, c und f mit Reaktionswahrscheinlichkeiten der folgenden psychischen Prozesse identifizieren:

a) Codierung der Aufgabe für eine permanente Speicherung (Langzeitgedächtnis)
b) Identifikation des Lerninhalts mit Elementen aus dem Langzeitgedächtnis
c) Bildung einer Assoziation zwischen Aufgabe und Antwort im Kurzzeitspeicher
d) Löschung der Assoziation durch Einflüsse anderer Aufgaben.

Die Schätzung dieser Parameter für den individuell Lernenden ermöglicht bei computer-unterstütztem Unterricht die Identifikation von jeweils der Aufgabe, für die die Wahrscheinlichkeit der Erreichung von Zustand K maximal ist.

Als allgemeine weiterführende Literatur ist das Buch von TACK (1976) zu empfehlen; speziell für Techniken der Modellkonstruktion kann man am besten auf LEVINE & BURKE (1972) verweisen.

Literatur

LEVINE, G. & BURKE, J. C. Mathematical Model Techniques for Learning Theories. New York: Academic Press, 1972.

SUPPES, P. & GINSBURG, R. A fundamental property of all-or-none-models. Psych. Rev. 1963, *70*, 139–161.

TACK, W. H. Stochastische Lernmodelle. Stuttgart: Kohlhammer, 1976.