Modulprüfung

„Kapitalmarkttheorie 2“

Studienschwerpunkt „Finanzmarkttheorie“

8 Kreditpunkte

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

WS 2009/10

8.3.2010

Prof. Dr. Lutz Arnold

Bitte gut leserlich ausfüllen:
Name:
Vorname:
Matr.-nr.:

Wird vom Prüfer ausgefüllt:

A	B1	B2	B3	$\sum$

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben A1-A5 und zwei der drei Aufgaben B1-B3!

- Die Bearbeitungsdauer beträgt **90 Minuten**.
- In den Aufgaben **A1-A5** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar.
- Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen und Zwischenschritte!).
- Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.
- In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **15 Punkte** erreichbar.
- In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Foliensatz zur Vorlesung übernommen.
- Zugelassenes Hilfsmittel: nicht-programmmierbarer Taschenrechner.
- Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 14.

A1: Edgeworth-Box Betrachten Sie eine Zwei-Perioden-Ökonomie mit zwei möglichen Umweltzuständen in $t+1$ sowie ohne Konsum und Ausstattungen in t. Die eine Hälfte der Konsumenten hat Ausstattungen $(y^1_{t+1,1}, y^1_{t+1,2}) = (0{,}98; 0{,}02)$, die andere Hälfte $(y^2_{t+1,1}, y^2_{t+1,2}) = (0{,}02; 0{,}98)$. Beide haben die gleiche Nutzenfunktion.

(a) Zeichnen Sie den Ausstattungpunkt in eine Edgeworth-Box.

(b) Illustrieren Sie mit Indifferenzkurven, dass der Ausstattungspunkt keine Pareto-optimale Allokation ist.

(c) Welches Marktgleichgewicht ergibt sich, wenn Handel nur auf Spot-Märkten möglich ist? Liegt Pareto-Optimalität vor? Woran erkennt man das?

(d) Welche Art von Gütermärkten braucht man für Pareto-Optimalität? Was wird auf diesen Märkten gehandelt?

(e) Illustrieren Sie in der Edgeworth-Box das Marktgleichgewicht mit den Märkten aus Aufgabenteil (d), das sich ausgehend von den Anfangsausstattungen aus der Aufgabenstellung ergibt. Zeichnen Sie auch die Preisgerade ein, und illustrieren Sie, dass das Gleichgewicht Pareto-optimal ist.

(a), (b), (e)

(c)

(d)

A2: St.-Petersburg-Paradoxon Eine Lotterie zahlt 2^k Euro aus, wenn eine faire Münze erstmals nach dem k-ten Wurf „Kopf“ liefert.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Lotterie.

(b) Welchen Preis wäre ein risikoneutraler Akteur für diese Lotterie zu zahlen bereit?

(c) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{n}(k/2^k) = 2 - (n+2)/2^n$ für $n = 1$ zutrifft.

(d) Komplettieren Sie den Induktionsbeweis für die Gültigkeit der Formel aus Aufgabenteil (c).

(e) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel aus Aufgabenteil (c) den Erwartungsnutzen der Lotterie für einen Akteur mit logarithmischer Nutzenfunktion.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A3: No-trade equilibrium Betrachten Sie die 2-Perioden-Tauschökonomie. Alle Konsumenten i haben die gleiche Nutzenfunktion $u(c^i) = \ln c^i$ und den gleichen subjektiven Diskontfaktor $\beta = 0{,}8$. Aus Sicht von der Periode t gilt: Mit Wahrscheinlichkeit 0,5 tritt in $t+1$ Zustand 1 ein und für alle Konsumenten i ist $y^i_{t+1,1} = 10$; mit der Gegenwahrscheinlichkeit 0,5 tritt Zustand 2 ein und für alle Konsumenten i ist $y^i_{t+1,2} = 5$. Betrachten Sie ein no-trade equilibrium, in dem jeder Konsument stets seine Anfangsausstattung konsumiert.

(a) Wie lautet für die gegebene Nutzenfunktion der stochastische Diskontfaktor (SDF) $M_{t,t+1,s}$ in Abhängigkeit von den Anfangsausstattungen?

(b) Betrachten Sie ein Asset mit Payoffs (1, 0) in $t+1$. Berechnen Sie aus der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung für das riskante Asset den Preis dieses Assets in einer Periode t mit $c^i_t = 10$.

(c) Berechnen Sie den Preis des Assets aus Aufgabenteil (b) in einer Periode t mit $c^i_t = 5$.

(d) Betrachten Sie nun ein Asset mit Payoffs (0, 1). Berechnen Sie den Preis p_t in Perioden mit $c^i_t = 10$ bzw. mit $c^i_t = 5$.

(e) Warum ist das Asset mit den Payoffs (0, 1) sowohl in Perioden mit $c^i_t = 10$ als auch in Perioden mit $c^i_t = 5$ teurer als das Asset mit den Payoffs (1, 0)?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A4: Komplettierung des Finanzmarkts mit Optionen Betrachten Sie ein Asset mit Payoffs (1, 2, 4).

(a) Wie lauten die Payoff-Vektoren von Call-Optionen auf dieses Asset mit Ausübungspreisen (strike prices) 1 bzw. 2?

(b) Wie lautet das lineare Gleichungssystem, das das Portfolio (z_1, z_2, z_3) bestimmt, mit dem die Arrow security für Zustand 3 nachgebildet werden kann?

(c) Berechnen Sie das in Aufgabenteil (b) erwähnte Portfolio.

(d) Berechnen Sie die analogen Portfolios zur Nachbildung der Arrow securities für die anderen beiden Umweltzustände.

(e) Wie lautet das Portfolio, das einen Euro in allen Umweltzuständen auszahlt?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A5: Unmöglichkeit negativer Bubbles (a) Wie lautet die fundamentale Asset-pricing-Gleichung für das riskante Asset (ohne Herleitung)?
(b) Wie lautet die fundamentale Asset-pricing-Gleichung für das sichere Asset (ohne Herleitung)?
(c) Zeigen Sie: Wenn f_t eine Lösung der Asset-pricing-Gleichung aus Aufgabemteil (a) ist, dann muss eine Bubble $b_t = p_t - f_t$ die Gleichung $b_t = E_t(M_{t,t+1} b_{t+1})$ erfüllen.
(d) Zeigen Sie mit einem Widerspruchsbeweis: Eine negative Bubble $b_t < 0$ wird mit positiver Wahrscheinlichkeit noch negativer.
(e) Warum kann es negative Bubbles nicht geben?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Aufgabe B1: Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie in der 2-Perioden-2-Zustände-Ökonomie mit Finanzmärkten

Betrachten Sie die Ökonomie mit zwei Umweltzuständen und mit dem sicheren und dem riskanten Asset aus der Vorlesung. Der Spot-Preis des homogenen Konsumguts ist in beiden Perioden auf eins normiert.

(a) Das Periode-$t+1$-Vermögen von Konsument i ist

$$a^i_{t+1,s} = (y^i_t - c^i_t)\left[\omega^i_t \frac{p_{t+1,s} - (1+r_{t+1})p_t + x_{t+1,s}}{p_t} + (1+r_{t+1})\right].$$

Wie lauten die Budgetgleichungen von i?

(b) Definieren Sie ein Gleichgewicht für diese Ökonomie (EFM).

(c) Formulieren Sie den Ersten Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie für diese Ökonomie. Gebrauchen Sie dabei die Preise

$$p_t = q_{t+1,1}$$
$$\frac{1}{1+r_{t+1}} = q_{t+1,1} + q_{t+1,2}.$$

(d) Formen Sie die Budgetgleichung von i aus Aufgabenteil (a) so um, dass man erkennt, dass er sich die gleichen Konsumvektoren $\mathbf{c}^i$ leisten kann wie im ECCM. Welchen Konsumvektor wählt i?

(e) Argumentieren Sie, dass die Gütermärkte geräumt sind. Leiten Sie aus den Budgetgleichungen der Individuen für Zustand 1 die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{I} \omega^i_t (y^i_t - c^{i*}_t) = 0$$

her. Zeigen Sie, dass auch die Finanzmärkte geräumt sind (so dass die Definition eines EFM aus Aufgabenteil (b) erfüllt ist).

Aufgabe B2: Anwendungen der fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen

(a) Definieren Sie den stochastischen Diskontfaktor (SDF) $M_{t,t+1,s}$. Wie lauten die beiden fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen?

(b) Wie lautet die Kovarianz $\sigma_{M,p+x}$ zwischen dem SDF und dem Asset-Payoff $p_{t+1} + x_{t+1}$? Leiten Sie aus der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung für ein riskantes Asset her, wie der Asset-Preis p_t von $E_t(p_{t+1} + x_{t+1})$, dem sicheren Zins r_{t+1} und $\sigma_{M,p+x}$ abhängt.

(c) Sei $p_t = 1$. Wie hoch ist dann die Rendite R_{t+1} des riskanten Assets? Bestimmen Sie seine Risikoprämie $E_t(R_{t+1}) - r_{t+1}$.

(d) Zeigen Sie anhand Ihres Ergebnisses aus Aufgabenteil (c), dass idiosynkratisches Risiko nicht bepreist wird.

(e) Drücken Sie die Risikoprämie aus Aufgabenteil (c) alternativ anhand des β's des Assets aus. Defineren Sie β.

(f) In der 2-Perioden-Ökonome mit $S \geq 2$ Zuständen, Erwartungsnutzen und Arrow securities gilt: $\tilde{p}_{t,s} = \pi_s M_{t,t+1,s}$. Zeigen Sie, dass dies mit der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung für ein riskantes Asset in Einklang steht.

Aufgabe B3: Modigliani-Miller-Theorem

Betrachten Sie die Ökonomie mit Unternehmen j mit Outputs $\tilde{y}^j_{t+1,s}$, Arrow securities und Unternehmensschulden $b^j_t \geq 0$.

(a) Wie hoch ist der Wert v^j_t von Unternehmen j ohne Schulden (d.h. bei $b^j_t = 0$)? Wie teuer ist ein sicheres Asset, das in jedem Zustand einen Euro auszahlt?

(b) Wie lauten die Budgetgleichungen von Individuum i (berücksichtigen Sie darin festverzinsliche Guthaben b^i_t)?

(c) Was besagt das Modigliani-Miller-Theorem?

(d) Zeigen Sie: Wenn Konsument i sich den Konsumvektor $\mathbf{c}^i$ leisten kann, falls kein Unternehmen Schulden emittiert ($\mathbf{c}^i \in (B^i)'''$), dann kann er sich den gleichen Konsumvektor auch bei Unternehmensverschuldung leisten, indem er $b^i_t = \sum_{j=1}^J \theta^{ij} b^j_t$ wählt.

(e) Zeigen Sie: Wenn Konsument i sich den Konsumvektor $\mathbf{c}^i$ bei Vorliegen von Unternehmensschulden leisten kann ($\mathbf{c}^i \in (B^i)''''$), dann kann er sich den gleichen Konsumvektor auch in Abwesenheit von Unternehmensverschuldung leisten, indem er $b^i_t = 0$ wählt.

(f) Zeigen Sie, dass Markträumung in der Ökonomie ohne Schulden Räumung aller Märkte in der Ökonomie mit Schulden impliziert (was den Beweis des Modigliani-Miller-Theorems komplettiert).

Kapitalmarkttheorie 2 WS 2009/10