

Master-Prüfung
„Kapitalmarkttheorie II“

Schwerpunktmodulgruppe „Finanzmärkte“

6 Kreditpunkte

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

WS 2022/23

6.3.2023

Prof. Dr. Lutz Arnold

Bitte gut leserlich ausfüllen:

Name:

Vorname:

Matr.-nr.:

Wird vom Prüfer ausgefüllt:

A	B1	B2	B3	Σ

**Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben A1-A5
und zwei der drei Aufgaben B1-B3!**

- Die Bearbeitungsdauer beträgt **90 Minuten**.
- In den Aufgaben **A1-A5** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar.
- Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen und Zwischenschritte!).
- Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.
- In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **15 Punkte** erreichbar.
- In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Foliensatz zur Vorlesung übernommen.
- Zugelassenes Hilfsmittel: nicht-programmierbarer Taschenrechner.
- Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 13.

A1: Edgeworth-Box Betrachten Sie eine Zwei-Zeitpunkte-Ökonomie mit zwei möglichen Umweltzuständen in $t + 1$, die jeweils mit 50% Wahrscheinlichkeit eintreten, sowie ohne Konsum und Ausstattungen in t . Die eine Hälfte der Konsumenten hat Ausstattungen $(y_1^1, y_2^1) = (1, 4)$, die andere Hälfte $(y_1^2, y_2^2) = (4, 1)$. Beide haben die gleiche Nutzenfunktion $U^i = c_1^i c_2^i$.

- (a) Berechnen Sie die Grenzrate der Substitution (MRS) $-dc_2^i/dc_1^i = (\partial U^i/\partial c_1^i)/(\partial U^i/\partial c_2^i)$.
- (b) Ersetzen Sie in der Bedingung für Pareto-Optimalität (gleiche MRS) $c_1^1 = 5 - c_1^2$ und $c_2^1 = 5 - c_2^2$, und berechnen Sie den Zusammenhang zwischen c_1^1 und c_2^1 , den Pareto-optimale Allokationen erfüllen.
- (c) Illustrieren Sie mit Indifferenzkurven die Menge der Pareto-optimalen Allokationen in einer Edgeworth-Box.
- (d) Markieren Sie in Ihrer Grafik das Marktgleichgewicht mit kontingenten Gütermärkten. Wie viel konsumieren die einzelnen Konsumenten?
- (e) Wird das CCM-Gleichgewicht aus Aufgabenteil (d) erreicht, wenn nicht kontingente Güter, sondern stattdessen ein sicheres Asset gehandelt wird? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A2: St.-Petersburg-Paradoxon Ein fairer Würfel wird solange geworfen, bis zum ersten Mal eine 5 oder eine 6 fällt. Passiert das beim ersten Wurf, werden €3 ausbezahlt, beim zweiten Wurf €9, allgemein beim n -ten Wurf € 3^n .

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für „keine 5 oder 6“ bis zum einschließlich n -ten Wurf? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim n -ten Wurf erstmals eine 5 oder eine 6 fällt?

(b) Formulieren Sie anhand der Formel für den Erwartungswert der Auszahlung das St.-Petersburg-Paradoxon.

(c) Wie lautet die (Summen-) Formel für den Erwartungsnutzen für einen Spieler mit logarithmischer Nutzenfunktion?

(d) Verwenden Sie die Formel $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$, um den Erwartungsnutzen aus Aufgabenteil (c) zu berechnen.

(e) Beweist Aufgabenteil (d), dass das St.-Petersburg-Paradoxon durch eine strikt konkave Nutzenfunktion gelöst ist?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A3: Finanzmarktvollständigkeit Sei $S = 3$. Es gibt $K = 3$ Assets. Die Payoff-Vektoren sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Welches Portfolio (z_1, z_2, z_3) liefert den Payoff-Vektor $(1, 0, 0)$?
- (b) Zeigen Sie, dass der Payoff-Vektor $(0, 1, 0)$ nicht realisiert werden kann.
- (c) Sind die Payoff-Vektoren linear unabhängig? Warum? Wie hängt das Ergebnis aus Aufgabenteil (b) damit zusammen?
- (d) Wie hoch ist der sichere Zinssatz, wenn das erste Asset €0,50 kostet und das zweite €0,45?
- (e) Argumentieren Sie, dass es kein Portfolio gibt, das einen in jedem Zustand unterschiedlichen Payoff liefert. Was bedeutet das für die Möglichkeit, den Finanzmarkt mit Optionen zu komplettieren?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A4: CAPM Im CAPM gilt für ein riskantes Einkommen α mit Rendite r^α :

$$1 = (1 + Er^\alpha) [a - bv^M (1 + Er^M)] - bv^M \sigma^{\alpha M}.$$

- (a) Definieren Sie v^α und r^α .
- (b) Wenden Sie die angegebene Gleichung auf ein sicheres Asset mit Payoff 1 an.
- (c) Wenden Sie nun die angegebene Gleichung auf ein riskantes Asset j und auf den Markt an. Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil (b), um jeweils den Ausdruck in eckigen Klammern zu eliminieren.
- (d) Stellen Sie die Gleichungen aus Aufgabenteil (c) so um, dass die CAPM-Formel resultiert.
- (e) Begründen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Jedes Asset j , dessen Renditen eine positive Varianz aufweisen, liefert eine positive Risikoprämie $Er^j - r$.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Aufgabe B1: Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie in der CCM-Ökonomie

Betrachten Sie die Ökonomie mit $S (\geq 2)$ Umweltzuständen und kontingenten Gütermärkten (CCMs).

- (a) Erklären Sie, was ein CCM ist.
- (b) Definieren Sie machbare („feasible“) Allokationen $(\mathbf{c}^i)_{i=1}^I$. Definieren Sie formal, wann eine Allokation Pareto-optimal ist.
- (c) Wie lautet i 's Budgetbeschränkung? Definieren Sie ein Gleichgewicht mit CCMs (ECCM).
- (d) Formulieren Sie den ersten Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie für die CCM-Ökonomie. Beweisen Sie ihn. Nehmen Sie dazu an, dass es eine Pareto-superiore machbare Allokation gibt; zeigen Sie, dass diese Allokation zu Gleichgewichtspreisen teurer ist; und führen Sie das zu einem Widerspruch.
- (e) Erklären Sie, was eine Arrow security (AS) ist.
- (f) Erklären Sie (ohne Beweise), mit welchen AS-Preisen und welchen AS-Portfolios ausgehend von einem ECCM ein Gleichgewicht mit Arrow securities (ECAS) erreicht werden kann.
- (g) Ist die Allokation in einem wie in Aufgabenteil (f) konstruierten ECAS Pareto-optimal? Beweist das allgemein, dass die Allokation in einem ECAS Pareto-optimal ist?

Aufgabe B2: Die fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen mit Finanzmarktvollständigkeit

Betrachten Sie die Ökonomie mit S Umweltzuständen, vollständigen Finanzmärkten und

$$U^i = u^i(c_0^i) + \beta^i \sum_{s=1}^S \pi_s u^i(c_s^i).$$

- (a) Nehmen Sie zunächst an, dass es eine vollständige Menge von Arrow securities (ASs) gibt. Eliminieren Sie mit Hilfe der Budgetrestriktionen c_0^i und c_s^i aus U^i .
- (b) Lösen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen für ein optimales AS-Portfolio nach \tilde{p}_s auf.
- (c) Definieren Sie den stochastischen Diskontfaktor (SDF) M_s . Argumentieren Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses zu Aufgabenteil (b), dass der SDF im Gleichgewicht für alle i gleich ist.
- (d) Betrachten Sie nun ein Gleichgewicht mit vollständigen Finanzmärkten (ECFM) mit der gleichen Allokation wie in einem Gleichgewicht mit ASs (ECAS). Warum ist auch der SDF der gleiche? Wie hängen die Asset-Preise p_k mit den AS-Preisen zusammen? Erklären Sie diesen Zusammenhang mit einem Satz.
- (e) Leiten Sie aus der Formel aus Aufgabenteil (d) die fundamentalen Asset-pricing-Gleichungen her. Erklären Sie, welches von zwei Assets mit gleichen erwarteten Payoffs $E(a_k)$ teurer ist.
- (f) Beweisen Sie:

$$p_t = \frac{E_t(p_{t+1} + a_{t+1})}{1 + r_{t+1}} + \sigma_{M,p+a}$$

(wobei hier $p_{t+1} = 0$ ist).

Aufgabe B3: Stock market economy

- (a) Wie lauten die Budgetrestriktionen in der Stock market economy (SME) mit einer vollständigen Menge von Arrow securities (ASs)?

(b) Definieren Sie ein Gleichgewicht in der SME (ESME).

(c) Wie lautet die Formel, die die Gütermenge y_s^i angibt, die i erhält, wenn es seine ursprünglichen Eigentumsanteile an den Unternehmen $\bar{\theta}^i$ nicht ändert?

(d) Formulieren Sie das Theorem, das den Zusammenhang zwischen einem ESME und einem Gleichgewicht für die Tauschökonomie (ECAS) mit Ausstattungen in Höhe der Werte y_s^i aus Aufgabenteil (c) sowie jeweils einer vollständigen Menge von ASs herstellt.

(e) Definieren Sie die Mengen $B^{i'}$ und $B^{i'''}$, und erläutern Sie, was

$$c^{i*} \in B^{i'''} \subseteq B^{i'}$$

bedeutet.

(f) Beweisen Sie die Gültigkeit der Formel aus Aufgabenteil (e). Benutzen Sie im zweiten Teil das Portfolio $\tilde{z}^{i'}$ mit

$$\tilde{z}_s^{i'} = \tilde{z}_s^i + \sum_{j=1}^J (\theta^{ij} - \bar{\theta}^{ij}) \tilde{y}_s^j, \quad s = 1, \dots, S.$$

(g) Komplettieren Sie den Beweis des Theorems aus Aufgabenteil (d), indem Sie Marktträumung begründen.











