

# SEMINAR: MATHEMATISCHE LOGIK UND KATEGORIENTHEORIE

ULRICH BUNKE, HOANG KIM NGUYEN

Dieses Seminar bietet eine Einführung in die Mathematische Logik und Kategorientheorie und deren Zusammenhang. Wir werden die Grundlagen beider Gebiete kennenlernen und sehen wie Logiken zu Kategorien führen. Umgekehrt hat jede Kategorie mit genügend reicher Struktur eine interne Logik. Dies führt uns zum Begriff eines (elementaren) Topos. Interessanterweise wurde die Theorie der Topoi von Grothendieck eingeführt um Algebraische Geometrie zu studieren. Topoi bilden somit eine Brücke zwischen Geometrie und Logik, wobei wir auf der logischen Seite bleiben werden. Als Ziel wollen wir die kategorielle Formulierung des Russellschen Paradoxon herleiten und einen kategoriellen Beweis des ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz führen.

**Literatur.** Der Grossteil des Seminars wird dem Buch *Topoi: The categorical analysis of logic* von Robert Goldblatt folgen [Gol84]. Dieses Buch ist eine sanfte Einführung sowohl in die Kategorientheorie als auch in Topos-theorie und Logik.

Für die Formulierung des Russellschen Paradoxon und des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes werden wir den Originalartikel *Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories* von Bill Lawvere lesen [Law06].

## 0. EINFÜHRUNG

**Vortrag 1.** Einführungsvortrag.

## 1. KATEGORIENTHEORIE

**Vortrag 2.** Kategorien, Funktoren, natürliche Transformationen, Limites und Kolimites, Beispiele.

*Literatur:*

**Vortrag 3.** Adjunktionen und Beispiele, Monos, Epis, Exponentiation.

*Literatur:* [Gol84, Ch. 3.1-3.4, 3.16]

## 2. TOPOI

**Vortrag 4.** Unterobjekte, klassifizierende Unterobjekte, elementare Topoi, erste Beispiele, Aussonderungsaxiom.

*Literatur:* [Gol84, Ch. 4.1-4.4, 4.7, 4.8]

**Vortrag 5.** Epi-Mono Faktorisierung, Extensionalität, Bivalenz.

*Literatur:* [Gol84, Ch. 5]

## 3. AUSSAGENLOGIK UND TOPOI

**Vortrag 6.** Aussagenkalkül, Boolesche Algebren, Topos Semantik.

*Literatur:* [Gol84, Ch. 6]

**Vortrag 7.** Unterobjekt Gitter, Boolesche Topoi, Extensionalität.

*Literatur:* [Gol84, Ch. 7]

**Vortrag 8.** Einführung Konstruktivismus, Heyting Algebren, Kripke Semantik.

*Literatur:* [Gol84, Ch. 8]

## 4. PRÄDIKATENLOGIK UND TOPOI

**Vortrag 9.** Formale Sprachen, Modelle in Topoi.

*Literatur:* [Gol84, Ch. 11.1-11.5]

**Vortrag 10.** Vollständigkeit.

*Literatur:* [Gol84, Ch. 11.6-11.9]

**Vortrag 11.** Zusammenhang zwischen Adjunktionen und Quantoren.

*Literatur:* [Gol84, Ch. 15]

## 5. GÖDEL

**Vortrag 12.** Fixpunktsätze in kartesisch abgeschlossenen Kategorien, Russelsche Paradoxon.

*Literatur:* [Law06, Sections 1 und 2]

**Vortrag 13.** Syntaktische Kategorien, 1. Gödelscher Unvollständigkeitssatz.

*Literatur:* [Law06, Section 3]

## REFERENCES

- [Gol84] Robert Goldblatt. *Topoi*, volume 98 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1984. The categorial analysis of logic.
- [Law06] F. William Lawvere. Diagonal arguments and Cartesian closed categories. *Repr. Theory Appl. Categ.*, (15):1–13, 2006. Reprinted from *Category Theory, Homology Theory and their Applications, II* (Battelle Institute Conference, Seattle, Wash., 1968, Vol. Two) pp. 134–145 [MR0242748].