

# Étale Kohomologie

Prof. Dr. Uwe Jannsen  
Sommersemester 2015

## Inhaltsverzeichnis

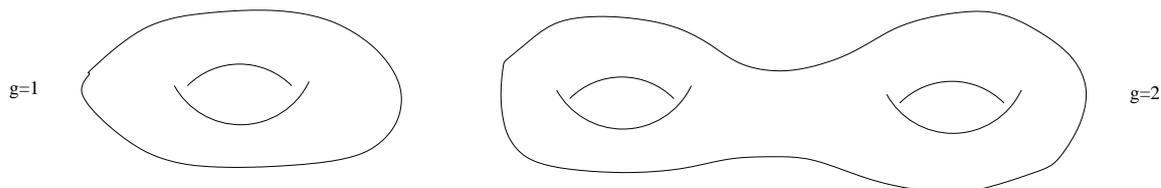
1	Einleitung	1
2	Grothendieck-Topologien/Siten	2
3	Konstruktionen für Prägarben und Garben	4
4	Die abelschen Kategorien der Garben und Prägarben	14
4.A	Darstellbare Funktoren, Limiten, und Colimiten	17
4.B	Filtrierte Kategorien	31
5	Kohomologie auf Siten	33
6	Spektralsequenzen	38
7	Der étale Situs	51
8	Der étale Situs eines Körpers	59
9	Henselsche Ringe	64
10	Beispiele von étalen Garben	74
11	Der Zerlegungssatz	82
12	Čech-Kohomologie	88
13	Vergleich von Siten	96
14	Abstiegstheorie und die multiplikative Gruppe	100
15	Schemata der Dimension 1	107



# 1 Einleitung

In der Mathematik sucht man oft Invarianten, mit denen man die betrachteten Objekte charakterisieren oder klassifizieren kann. Häufig werden solche Invarianten durch Kohomologiegruppen gewonnen.

Am ältesten ist diese Vorgehensweise in der Topologie, wo man zum Beispiel die singulären Kohomologiegruppen  $H^i(X, \mathbb{Q})$  eines topologischen Raums  $X$  betrachtet, die durch explizite ‘Zykel’ und ‘Ränder’ definiert werden. Sie genügen zum Beispiel, um das sogenannte Geschlecht  $g$  einer (kompakten) Riemannschen Fläche  $X$  zu charakterisieren: Sieht  $X$  topologisch wie eine Kugel mit  $g$  Henkeln aus:



so ist  $\dim_{\mathbb{Q}} H^1(X, \mathbb{Q}) = 2g$ . Diese Kohomologiegruppen kann man auch als Garbenkohomologie (der konstanten Garbe) beschreiben.

Riemannsche Flächen können auch als komplexe algebraische Kurven aufgefasst werden, also als algebraische Kurven über dem Körper  $\mathbb{C}$  der komplexen Zahlen. Für beliebige algebraische Varietäten  $X$  über einem beliebigen Körper  $k$  (oder beliebige Schemata) kann man ebenfalls eine Garbenkohomologie betrachten, bezüglich der Zariski-Topologie, und diese ist nützlich für kohärente Garben, zum Beispiel bei der Grothendieck-Serre-Dualität und dem Satz von Riemann-Roch.

Die Zariski-Kohomologie einer algebraischen Varietät  $X$  über  $\mathbb{C}$  liefert aber nicht die singuläre Kohomologie des topologischen Raums  $X(\mathbb{C})$ ; dies liegt daran, dass die letztere Topologie viel feiner als die Zariski-Topologie ist. Weiter möchte man auch eine analoge Topologie für Varietäten über beliebigen Körpern  $k$  haben. Für Körper positiver Charakteristik zeigte Serre aber, dass es keine Kohomologietheorie  $H^*(-, \mathbb{Q})$  gibt, so dass  $H^1(X, \mathbb{Q})$  die Dimension  $2g$  für eine glatte projektive Kurve von Geschlecht  $g$  hat. Eine solche Theorie war aber von Weil gefordert worden, um die Weil-Vermutungen für Varietäten über endlichen Körpern zu zeigen, mittels einer Fixpunktformel wie man sie aus der Topologie kennt.

Die Lösung hierfür fand Grothendieck, indem er, zusammen mit M. Artin, die étale Kohomologie entwickelte. Diese liefert für jedes  $\ell \neq \text{char}(k)$  Kohomologiegruppen  $H^i(X, \mathbb{Q}_{\ell})$ , die die von Weil geforderten Eigenschaften besitzen, und mit denen Deligne dann auch schließlich die Weilvermutungen beweisen konnte.

## 2 Grothendieck-Topologien/Siten

Grothendiecks Ansatz für die étale Kohomologie (und seitdem für viele andere Theorien) war, sich von topologischen Räumen zu lösen. Er bemerkte, dass man nur den Begriff ‘Überdeckungen’ mit gewissen Eigenschaften benötigt, um Garben und ihre Kohomologien zu definieren, wobei man ‘offene Menge’ durch ‘Objekt in einer Kategorie’ ersetzt.

**Definition 2.1** Sei  $\mathcal{X}$  eine Kategorie und  $\mathcal{C}$  eine weitere Kategorie. Eine **Prägarbe auf  $\mathcal{X}$  mit Werten in  $\mathcal{C}$**  ist ein *kontravarianter* Funktor

$$P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}.$$

Morphismen von Prägarben sind Morphismen von Funktoren.

(Wir ignorieren dabei –tatsächlich nicht-triviale – mengentheoretische Probleme, indem wir annehmen, dass die Kategorie  $\mathcal{X}$  klein ist). Ist  $\mathcal{C}$  die Kategorie  $\underline{Ab}$  der abelschen Gruppen (bzw.  $\underline{Rg}$  der Ringe, bzw. ...), so spricht man von Prägarben von abelschen Gruppen [kurz: abelsche Prägarben] (bzw. von Ringen, bzw. ...).

**Beispiel 2.2** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Diesem kann man die folgende Kategorie  $\underline{X}$  zuordnen:

Objekte sind die offenen Mengen  $U \subseteq X$ . Morphismen sind die Inklusionen  $V \subseteq U$ . Dann sieht man, dass eine Prägarbe auf  $\underline{X}$  in Grothendiecks Sinn genau eine klassische Prägarbe ist: Für jede Inklusion  $V \subseteq U$  hat man wegen der kontravarianten Funktorialität einen Pfeil  $P(U) \rightarrow P(V)$ , und die Funktoreigenschaften liefern gerade die Prägarben-Eigenschaften für diese ‘Restriktionen’  $res_{U,V}$ .

**Definition 2.3** Sei  $\mathcal{X}$  eine Kategorie.

(a): Eine **Grothendieck-Topologie** auf  $\mathcal{X}$  besteht aus einer Menge  $\mathcal{T}$  von Familien  $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} U)_{i \in I}$  von Morphismen in  $\mathcal{X}$ , genannt **Überdeckungen** von  $\mathcal{T}$ , so dass gilt:

(T1) Ist  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  in  $\mathcal{T}$  und  $V \rightarrow U$  ein Morphismus in  $\mathcal{X}$ , so existieren alle Faserprodukte  $U_i \times_U V$ , und  $(U_i \times_U V \rightarrow V)_{i \in I}$  ist in  $\mathcal{T}$ .

(T2) Ist  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  in  $\mathcal{T}$  und  $(V_{ij} \rightarrow U_i)_{j \in J_i}$  in  $\mathcal{T}$  für alle  $i \in I$ , so ist die durch Komposition der Morphismen entstehende Familie

$$(V_{ij} \rightarrow U)_{i,j}$$

in  $\mathcal{T}$ .

(T3) Ist  $\varphi : U' \rightarrow U$  ein Isomorphismus, so ist  $(U' \xrightarrow{\varphi} U)$  in  $\mathcal{T}$ .

(b) Ein **Situs** ist ein Paar  $\mathcal{S} = (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  mit einer Kategorie  $\mathcal{X}$  und einer Grothendieck-Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $\mathcal{X}$ . Man bezeichnet die unterliegende Kategorie  $\mathcal{X}$  auch mit  $Cat(\mathcal{S})$  und die Topologie auch mit  $Cov(\mathcal{S})$ , also  $\mathcal{S} = (Cat(\mathcal{S}), Cov(\mathcal{S}))$ . Manchmal wird auch  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  eine Grothendieck-Topologie genannt.

**Beispiel 2.4** Nimmt man im Beispiel 2.2 die üblichen Überdeckungen  $(U_i)_{i \in I}$  von offenen Mengen  $U \subseteq X$ , so bilden die zugehörigen Familien  $(U_i \hookrightarrow U)_{i \in I}$  eine Grothendieck-Topologie auf  $\underline{X}$ . Beachte: Das Faserprodukt von offenen Mengen  $U \subseteq X, V \subseteq X$  ist der Durchschnitt  $U \cap V$ .

**Definition 2.5** Sei  $\mathcal{S} = (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Situs, und sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit Produkten (also z.B. die Kategorie der Mengen oder der abelschen Gruppen). Eine Prägarbe

$$F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$$

heißt **Garbe** (bezüglich  $\mathcal{T}$ ), wenn für jede Überdeckung  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  in  $\mathcal{T}$  das Diagramm

$$F(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_i F(U_i) \xrightarrow[\alpha_2]{\alpha_1} \prod_{i,j} F(U_i \times_U U_j)$$

exakt ist, wobei rechts der Pfeil  $\alpha_1$  von den ersten Projektionen  $U_i \times_U U_j \rightarrow U_i$  und der Pfeil  $\alpha_2$  von den zweiten Projektionen  $U_i \times_U U_j \rightarrow U_j$  induziert wird (Dies bedeutet, dass  $\alpha$  der Differenzkern von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ist, siehe Alg. Geo. II, 1.A.18). Morphismen von Garben sind Morphismen der unterliegenden Prägarben.

**Bemerkung 2.6** Sei  $\mathcal{C}$  die Kategorie der Mengen. Bezeichnen wir für  $s \in F(U)$  die Komponente von  $\alpha(s)$  in  $F(U_i)$  mit  $s|_{U_i}$  und für  $(s_i) \in \prod_i F(U_i)$  die Bilder von  $s_i$  und  $s_j$  in  $F(U_i \times_U U_j)$  mit  $s_i|_{U_i \times_U U_j}$  bzw.  $s_j|_{U_i \times_U U_j}$  so erhalten wir wörtlich dieselben Bedingungen wie bei üblichen Garben auf topologischen Räumen, außer dass wir  $U_i \cap U_j$  durch  $U_i \times_U U_j$  ersetzen: Die Bedingungen sind:

- (i) Sind  $s, t \in \mathcal{F}(U)$  und ist  $s|_{U_i} = t|_{U_i}$  für alle  $i$ , so ist  $s = t$ .
- (ii) Ist  $(s_i)_{i \in I} \in \prod_i \mathcal{F}(U_i)$  mit  $s_i|_{U_i \times_U U_j} = s_j|_{U_i \times_U U_j}$  für alle  $i, j \in I$ , so gibt es ein  $s \in \mathcal{F}(U)$  mit  $s|_{U_i} = s_i$  für alle  $i \in I$ .

**Definition 2.7** (a) Ein Morphismus  $f : (X', \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$  von Siten ist ein kovarianter Funktor  $f^0 : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}'$  (!), welcher die folgenden Eigenschaften hat:

(S1) Ist  $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} U)$  in  $\mathcal{T}$ , so ist  $(f^0(U_i) \xrightarrow{f^0(\varphi_i)} f^0(U))$  in  $\mathcal{T}'$ .

(S2) Ist  $(U_i \rightarrow U)$  in  $\mathcal{T}$  und  $V \rightarrow U$  ein Morphismus in  $\mathcal{T}$ , so der kanonische Morphismus

$$f^0(U_i \times_U V) \rightarrow f^0(U_i) \times_{f^0(U)} f^0(V)$$

ein Isomorphismus für alle  $i$ .

**Beispiel 2.8** Ist  $f : X' \rightarrow X$  eine stetige Abbildung von topologischen Räumen, so erhalten wir einen Morphismus  $f : \mathcal{S}(X') \rightarrow \mathcal{S}(X)$  der zugehörigen Siten (Beispiel 2.4) durch

$$f^{-1} : \frac{X}{U} \rightarrow \frac{X'}{f^{-1}(U)}.$$

### 3 Konstruktionen für Prägarben und Garben

Für eine Kategorie  $\mathcal{X}$  sei  $Pr(\mathcal{X})$  die Kategorie der abelschen Prägarben auf  $\mathcal{X}$ .

**Definition 3.1** (Push-forward) Sei  $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Morphismus von Sites und sei  $P' : \mathcal{X}' \rightarrow \underline{Ab}$  eine abelsche Prägarbe. Dann ist das direkte Bild/ Push-forward  $f_P P'$  von  $P'$  definiert als die Prägarbe

$$f_P P' = P' f^0 : \mathcal{X} \xrightarrow{f^0} \mathcal{X}' \xrightarrow{P'} \underline{Ab}.$$

Explizit ist also  $(f_P P')(U) = P'(f^0(U))$  für  $U$  in  $\mathcal{X}$  und  $f_P(\varphi) = P'(f^0(\varphi)) : P'(f^0(U_2)) \rightarrow P'(f^0(U_1))$  für  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  in  $\mathcal{X}$ . Für einen Morphismus  $\psi : P'_1 \rightarrow P'_2$  von abelschen Prägarben auf  $\mathcal{X}$  erhält man einen Morphismus

$$(3.1.1) \quad f_P \psi : f_P P'_1 \rightarrow f_P P'_2$$

wie folgt: Für  $U$  in  $\mathcal{X}$  definiere

$$\begin{array}{ccc} (f_P \psi)_U & : & (f_P P'_1)(U) \rightarrow (f_P P'_2)(U) \\ \parallel & & \parallel \\ \psi_{f^0(U)} & : & P'_1(f^0(U)) \rightarrow P'_2(f^0(U)) \end{array}$$

Man sieht leicht, dass dies einen Morphismus von Prägarben (3.1.1) gibt und dass man so einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} f_P : Pr(\mathcal{X}') & \rightarrow & Pr(\mathcal{X}) \\ & & P' \mapsto f_P P' \\ & & \psi \mapsto f_P \psi \end{array}$$

erhält.

**Proposition 3.2** Der Funktor

$$f_P : Pr(\mathcal{X}') \rightarrow Pr(\mathcal{X})$$

besitzt ein Linksadjungiertes

$$f^P : Pr(\mathcal{X}) \rightarrow Pr(\mathcal{X}').$$

Für Prägarben  $P \in Pr(\mathcal{X})$  und  $P' \in Pr(\mathcal{X}')$  gilt also

$$(3.2.1) \quad Hom_{\mathcal{X}'}(f^P P, P') \cong Hom_{\mathcal{X}}(P, f_P P'),$$

funktoriell in  $P$  und  $P'$ . Für eine Prägarbe  $P$  auf  $\mathcal{X}$  heißt  $f^P P$  das Urbild/Pull-back von  $P$ .

**Beweis von 3.2:** Für  $U'$  in  $\mathcal{X}'$  betrachte die folgende Kategorie  $I_{U'}$ : Objekte sind Paare  $(U, \psi)$ , wobei  $U$  ein Objekt in  $\mathcal{X}$  und

$$\psi : U' \rightarrow f^0(U)$$

ein Morphismus in  $\mathcal{X}'$  ist. Ein Morphismus  $(U_1, \psi_1) \rightarrow (U_2, \psi_2)$  ist ein Morphismus  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  in  $\mathcal{X}$ , für den das Diagramm

$$(3.2.2) \quad \begin{array}{ccc} & f^0(U_1) & \\ \psi_1 \nearrow & \downarrow f^0(\varphi) & \\ U' & & \\ \psi_2 \searrow & & \\ & f^0(U_2) & \end{array}$$

kommutativ ist. Dann haben wir einen Funktor

$$\begin{aligned} P : \quad I_{U'}^{op} &\rightarrow \underline{Ab} \\ (U, \psi) &\mapsto P(U) \\ \varphi &\mapsto P(\varphi) \end{aligned}$$

(wobei  $I_{U'}^{op}$  die zu  $I_{U'}$  duale Kategorie bezeichnet) und definieren

$$(3.2.3) \quad (f^P P)(U') = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ (U, \psi) \in I_{U'}^{op}}} P(U)$$

als den induktiven Limes (Die Idee ist, dass  $(f^P P)(U')$  der induktive Limes aller Schnittmengen  $P(U)$  ist, für die “ $U'$  in  $f^0(U)$  enthalten ist”, siehe unten, Beispiel 3.4).

Ist  $\varphi' : U' \rightarrow V'$  ein Morphismus in  $\mathcal{X}'$ , so erhalten wir einen Funktor

$$I_{V'} \rightarrow I_{U'},$$

indem wir einem Objekt  $(V, V' \rightarrow f(V))$  in  $I_{V'}$  das Objekt  $(V, U' \xrightarrow{\varphi'} V' \rightarrow f(V))$  zuordnen, und einem Morphismus  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  denselben Morphismus.

Dies liefert einen Morphismus

$$(f^P P)(V') = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I_{V'}^{op}}} P(U) \rightarrow \lim_{\substack{\longrightarrow \\ I_{U'}^{op}}} P(U) = (f^P P)(U').$$

Hierdurch wird  $f^P P$  zu einem kontravarianten Funktor

$$f^P P : \mathcal{X}' \rightarrow \underline{Ab},$$

also zu einer abelschen Prägarbe auf  $\mathcal{X}'$ .

Wir zeigen nun die Adjunktion. Sei  $P'$  eine abelsche Prägarbe auf  $\mathcal{X}'$  und

$$(3.2.4) \quad v : f^P P \rightarrow P'$$

ein Morphismus von abelschen Prägarben. Für jedes  $U$  in  $\mathcal{X}$  hat man dann den Homomorphismus

$$(3.2.5) \quad v_{f^0(U)} : (f^P P)(f^0(U)) \rightarrow P'(f^0(U)) = (f_P P')(U).$$

Weiter ist das Paar  $(U, id_{f^0(U)})$  ein Objekt von  $I_{f^0(U)}$ , und wir erhalten den kanonischen Homomorphismus

$$(3.2.6) \quad P(U) \rightarrow \lim_{\substack{\rightarrow \\ (V, \psi) \in I_{f^0(U)}^{op}}} P(V) = (f^P P)(f^0(U)),$$

durch Komposition von (3.2.6) und (3.2.5) also einen Homomorphismus

$$(3.2.7) \quad P(U) \rightarrow (f_P P')(U),$$

der offenbar funktoriell in  $U$  ist, also einen Morphismus von abelschen Prägarben auf  $\mathcal{X}$

$$(3.2.8) \quad w : P \rightarrow f_P P'.$$

Sei umgekehrt ein Morphismus  $w$  wie in (3.2.2) gegeben, und sei  $U' \in ob(\mathcal{X}')$ . Dann hat man für jedes Objekt  $(U, \psi : U' \rightarrow f^0(U))$  in  $I_{U'}$  den Homomorphismus

$$P(U) \xrightarrow{w_U} (f_P P')(U) = P'(f^0(U)) \xrightarrow{P'(\psi)} P'(U').$$

Dieser ist funktoriell in  $(U, \psi)$  und liefert daher einen Homomorphismus (universelle Eigenschaft des induktiven Limes)

$$(f^P P)(U') = \lim_{\substack{\rightarrow \\ (U, \psi) \in I_{U'}^{op}}} P(U) \rightarrow P'(U'),$$

der seinerseits funktoriell in  $U'$  ist und somit einen Morphismus

$$v : f^P P \rightarrow P'$$

von abelschen Prägarben auf  $\mathcal{X}'$  ergibt.

Schließlich zeigt man leicht, dass die Zuordnungen  $v \mapsto w$  und  $w \mapsto v$  zueinander invers sind.

**Bemerkung 3.3** Dasselbe gilt für Prägarben mit Werten in einer Kategorie  $\mathcal{C}$ , falls in  $\mathcal{C}$  beliebige direkte Limiten existieren, also z.B.  $\mathcal{C} = \underline{Set}, \underline{Rg}, \dots$

**Beispiel 3.4** Sei  $f : X' \rightarrow X$  eine stetige Abbildung topologischer Räume und

$$f : \mathcal{S}(X') \rightarrow \mathcal{S}(X), \quad U \mapsto f^{-1}(U),$$

der zugehörige Morphismus von Siten. Dann sind

$$f_P : Pr(X') \rightarrow Pr(X), \quad f^P : Pr(X) \rightarrow Pr(X')$$

die üblichen Funktoren. Dies ist klar für  $f_P$ : Es ist  $(f_P P')(U) = P'(f^{-1}(U))$ . Aber auch für  $f^P$  erhält man die übliche Konstruktion: für  $U' \subseteq X'$  ist  $I_{U'}$  die geordnete Menge (!) der offenen Mengen  $U \subseteq X$  mit  $f(U') \subseteq U$ , also  $U' \subseteq f^{-1}(U)$ , und  $f^P P(U') = \lim_{\substack{\rightarrow \\ f(U') \subseteq U}} P(U)$ .

Für einen Situs  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  sei  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  die Kategorie der abelschen Garben (bezüglich  $\mathcal{T}$ ) auf  $\mathcal{X}$ . Wir haben eine volltreue Einbettung

$$i = i_{\mathcal{T}} : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \hookrightarrow Pr(\mathcal{X}).$$

**Satz 3.5** Die Einbettung  $i$  besitzt ein Linksadjungiertes

$$a = a_{\mathcal{T}} : Pr(\mathcal{X}) \rightarrow Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}).$$

Es gibt also für alle Prägarben  $P$  und alle Garben  $F$  Isomorphismen, funktoriell in  $P$  und  $F$ ,

$$Hom_{Pr}(P, iF) \xrightarrow{\sim} Hom_{Sh}(aP, F).$$

Für eine Prägarbe  $P$  heißt  $aP$  die (bezüglich  $\mathcal{T}$ ) assoziierte Garbe.

Zum Beweis brauchen wir einige Vorbereitungen.

**Definition 3.6** Eine **Verfeinerungsabbildung**

$$(V_j \rightarrow U)_{j \in J} \rightarrow (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$$

von **Überdeckungen von  $U$**  ist eine Abbildung  $\varepsilon : J \rightarrow I$  der Indexmengen und eine Familie  $(f_j)_{j \in J}$  von  $U$ -Morphismen  $f_j : V_j \rightarrow U_{\varepsilon(j)}$ .

Mit den Verfeinerungsabbildungen als Morphismen, und den offensichtlichen Kompositionen, erhalten wir die Kategorie  $\mathcal{T}(U)$  der Überdeckungen von  $U$  (bezüglich der Topologie  $\mathcal{T}$ ).

**Definition 3.7** Sei  $U$  in  $\mathcal{X}$  und  $P$  eine abelsche Prägarbe auf  $\mathcal{X}$ .

(a) Für jede Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$  in  $\mathcal{T}$  heißt

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, P) = \ker\left(\prod_i P(U_i) \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha_1} \\ \xrightarrow{\alpha_2} \end{matrix} \prod_{i,j} P(U_i \times_U U_j)\right)$$

die **nullte Čech-Kohomologie** von  $P$  bezüglich  $\mathfrak{U}$ . Hierbei seien  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  wie in Definition 2.5 definiert.

(b) Nenne

$$\check{H}^0(U, P) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^0(\mathfrak{U}, P)$$

die **nullte Čech-Kohomologie** von  $P$  für  $U$ , wobei der direkte Limes über die Kategorie  $\mathcal{T}(U)^{op}$  geführt wird.

**Bemerkung 3.8** Eine Prägarbe  $\mathcal{P}$  auf  $\mathcal{X}$  ist also genau eine Garbe bezüglich  $\mathcal{T}$ , wenn für alle  $U$  in  $\mathcal{X}$  und alle  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$  in  $\mathcal{T}(U)$  der kanonische Homomorphismus

$$P(U) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, P)$$

ein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist auch  $P(U) \rightarrow \check{H}^0(U, P)$  ein Isomorphismus.

**Beweis von Satz 3.5** Sei  $P$  eine abelsche Prägarbe auf  $\mathcal{X}$ . Für  $U$  in  $\mathcal{X}$  definiere

$$\tilde{P}(U) := \check{H}^0(U, P).$$

Dies liefert eine Prägarbe, denn für  $\varphi : V \rightarrow U$  in  $\mathcal{X}$  haben wir einen kanonischen Homomorphismus

$$(3.5.1) \quad \varphi^* : \check{H}^0(U, P) \rightarrow \check{H}^0(V, P),$$

weil wir für jede Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$  von  $U$  die Überdeckung  $\mathfrak{U}_V := (U_i \times_U V \rightarrow V)$  von  $V$  erhalten, also einen induzierten Homomorphismus

$$(3.5.2) \quad \check{H}^0(\mathfrak{U}, P) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}_V, P),$$

und durch Übergang zu den Limiten dann (3.5.1).

Ein Morphismus von abelschen Prägarben

$$\psi : P_1 \rightarrow P_2$$

induziert einen kanonischen Morphismus von Prägarben

$$(3.5.3) \quad \tilde{\psi} : \tilde{P}_1 \rightarrow \tilde{P}_2$$

wie folgt: Für jede Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$  induziert  $\psi$  einen Homomorphismus

$$(3.5.4) \quad \check{H}^0(\mathfrak{U}, P_1) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, P_2).$$

Dies ist verträglich mit Verfeinerungen und ergibt im Limes über  $\mathcal{T}(U)^{op}$  einen Homomorphismus

$$(3.5.5) \quad \tilde{\psi}_U : \check{H}^0(U, P_1) \rightarrow \check{H}^0(U, P_2).$$

Für jeden Morphismus  $\varphi : V \rightarrow U$  ist dabei das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\psi}_U : & \check{H}^0(U, P_1) & \longrightarrow & \check{H}^0(U, P_2) \\ & \varphi^* \downarrow & & \downarrow \varphi^* \\ \tilde{\psi}_V : & \check{H}^0(V, P_1) & \longrightarrow & \check{H}^0(V, P_2) \end{array}$$

kommutativ. Dies liefert (3.5.3). Man sieht leicht, dass dies einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} Pr(\mathcal{X}) & \rightarrow & Pr(\mathcal{X}) \\ P & \mapsto & \tilde{P} \\ \psi & \mapsto & \tilde{\psi} \end{array}$$

ergibt.

**Definition 3.9** Eine Prägarbe  $P$  heißt *separiert* bezüglich  $\mathcal{T}$ , wenn für jede Überdeckung  $(U_i \rightarrow U)$  in  $\mathcal{T}$  der Homomorphismus

$$P(U) \rightarrow \prod_i P(U_i)$$

injektiv ist. (Äquivalent ist, dass  $P(U) \rightarrow \check{H}^0((U_i \rightarrow U), P)$  injektiv ist).

**Lemma 3.10** (a) Ist  $P$  eine abelsche Prägarbe, so ist  $\tilde{P}$  separiert.

(b) Es gibt einen kanonischen Morphismus  $P \rightarrow \tilde{P}$ .

(c) Ist  $P$  eine separierte abelsche Prägarbe, so ist  $P \rightarrow \tilde{P}$  ein Monomorphismus und  $\tilde{P}$  eine Garbe.

(d) Ist  $F$  eine Garbe, so ist  $F \rightarrow \tilde{F}$  ein Isomorphismus.

**Vorbemerkung zum Beweis:** Wir werden später sehen (siehe 3.11 und 3.12):

1) Für jedes Element  $\bar{s} \in \check{H}^0(U, P)$  gibt es eine Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$  in  $\mathcal{T}(U)$  und ein Element  $s \in \check{H}^0(\mathfrak{U}, P)$ , das unter

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, P) \rightarrow \check{H}^0(U, P)$$

auf  $\bar{s}$  abgebildet wird (wir sagen, dass  $\bar{s}$  durch  $s$  repräsentiert wird).

2) Wird  $\bar{s}$  von  $s_1 \in \check{H}^0(\mathfrak{U}_1, P)$  und  $s_2 \in \check{H}^0(\mathfrak{U}_2, P)$  (mit  $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \in \mathcal{T}(U)$ ) repräsentiert, so gibt es Verfeinerungsabbildungen  $\mathfrak{U}_3 \rightarrow \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_3 \rightarrow \mathfrak{U}_2$ , so dass  $s_1$  und  $s_2$  dasselbe Bild in  $\check{H}^0(\mathfrak{U}_3, P)$  haben.

**Beweis von 3.10 (a):** Sei  $(U_i \rightarrow U)_i$  eine Überdeckung in  $\mathcal{T}$  und  $\bar{s} \in \ker(\tilde{P}(U) \rightarrow \prod_i \tilde{P}(U_i))$ .

Zu zeigen ist  $\bar{s} = 0$ . Zu  $\bar{s} \in \tilde{P}(U) = \check{H}^0(U, P)$  gibt es eine Überdeckung  $(V_j \rightarrow U)_j$  und ein Element  $s \in \check{H}^0((V_j \rightarrow U)_j, P)$ , welches  $\bar{s}$  repräsentiert.

Sei  $s_i$  das Bild von  $s$  unter

$$\check{H}^0((V_j \rightarrow U)_j, P) \rightarrow \check{H}^0((V_j \times_U U_i \rightarrow U_i)_j, P).$$

Dieses repräsentiert  $\bar{s}|_{U_i} = 0 \in \check{H}^0(U_i, P)$ . Nach der Vorbemerkung gibt es also für jedes  $i \in I$  eine Verfeinerungsabbildung

$$f_i : (W_{ik} \rightarrow U_i)_k \rightarrow (V_j \times_U U_i \rightarrow U_i)_j$$

derart, dass  $s_i$  unter  $f_i^*$  auf 0 in  $\check{H}^0((W_{ik} \rightarrow U_i)_k, P)$  abgebildet wird.

Durch Komposition der Überdeckungen  $(W_{ik} \rightarrow U_i)_k$  und  $(U_i \rightarrow U)_i$  (Axiom (T2)) erhalten wir eine Überdeckung  $(W_{ik} \rightarrow U)_k$  und mittels der  $f_i$  eine Verfeinerungsabbildung

$$f : (W_{ik} \rightarrow U)_k \rightarrow (V_j \rightarrow U)_j,$$

und unter

$$f^* : \check{H}^0((V_j \rightarrow U)_j, P) \rightarrow \check{H}^0((W_{ik} \rightarrow U)_k, P)$$

geht  $s$  nach Konstruktion auf 0. Daher ist  $\bar{s} = 0$ .

(b): Dies wird durch die kanonischen Homomorphismen

$$P(U) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0((U \xrightarrow{id} U), P) \rightarrow \check{H}^0(U, P) = \tilde{P}(U)$$

gegeben.

(c) Sei  $P$  eine separierte abelsche Prägarbe.

*Behauptung 3.10.1:* Für jede Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$  in  $\mathcal{T}$  ist  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, P) \rightarrow \check{H}^0(U, P)$  injektiv.

*Beweis* Nach der Vorbemerkung genügt es, für jede Verfeinerung  $f : (V_j \rightarrow U) \rightarrow (U_i \rightarrow U)$  die Injektivität von

$$f^* : \check{H}^0((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow \check{H}^0((V_j \rightarrow U), P)$$

zu zeigen.

Betrachte dazu die als Komposition von  $(V_j \times_U U_i \rightarrow U_i)$  und  $(U_i \rightarrow U)$  entstehende Überdeckung

$$(V_j \times_U U_i \rightarrow U)$$

mit den beiden Verfeinerungsabbildungen

$$(V_j \times_U U_i \rightarrow U) \xrightarrow{pr_2} (U_i \rightarrow U)$$

$$(V_j \times_U U_i \rightarrow U) \xrightarrow{pr_1} (V_j \rightarrow U) \xrightarrow{f} (U_i \rightarrow U).$$

Nach dem folgenden Lemma 3.11 sind die beiden induzierten Homomorphismen

$$\check{H}^0((U_i \rightarrow U), P) \xrightarrow[pr_1^* f^*]{pr_2^*} \check{H}^0((V_j \times_U U_i \rightarrow U), P)$$

gleich. Es genügt also, die Injektivität von  $pr_2^*$  zu beweisen; dann ist auch  $pr_1^* f^*$  und damit  $f^*$  injektiv. Aber  $pr_2^*$  entsteht durch die Einschränkung von

$$\prod_i P(U_i) \xrightarrow{pr_2^*} \prod_i \prod_j P(V_j \times_U U_i)$$

auf  $\check{H}^0((U_i \rightarrow U), P)$ , und für jedes  $i$  ist  $P(U_i) \rightarrow \prod_j P(V_j \times_U U_i)$  injektiv, da  $P$  separiert ist.

Wenden wir Behauptung 3.10.1 auf die Überdeckung  $(U \rightarrow U)$  an, so folgt die Injektivität von

$$P(U) = \check{H}^0((U \rightarrow U), P) \rightarrow \check{H}^0(U, P) = \tilde{P}(U),$$

also die erste Behauptung von (c).

Wir beweisen nun, dass  $\tilde{P}$  eine Garbe ist. Sei  $(U_i \rightarrow U)$  eine Überdeckung. Wir haben zu zeigen, dass

$$(3.10.2) \quad \tilde{P}(U) \rightarrow \prod_i \tilde{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \tilde{P}(U_i \times_U U_j)$$

exakt ist. Nach (a) ist  $\tilde{P}$  separiert, also die erste Abbildung injektiv. Sei nun

$$(\bar{s}_i) \in \ker(\prod_i \tilde{P}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \tilde{P}(U_i \times_U U_j)).$$

Wähle für jedes  $i$  eine Überdeckung  $(V_{ik} \rightarrow U_i)$  und ein Element  $s_i \in \check{H}^0((V_{ik} \rightarrow U_i), P)$ , welches  $\bar{s}_i \in \tilde{P}(U_i)$  repräsentiert. Sei  $s_{ij}^1$  das Bild von  $s_i$  unter

$$\check{H}^0((V_{ik} \rightarrow U_i), P) \rightarrow \check{H}^0((V_{ik} \times_U U_j \rightarrow U_i \times_U U_j), P)$$

und  $s_{ij}^2$  das Bild von  $s_j$  unter

$$\check{H}^0((V_{j\ell} \rightarrow U_j), P) \rightarrow \check{H}^0((U_i \times_U V_{j\ell} \rightarrow U_i \times_U U_j), P).$$

Die von  $s_{ij}^1$  und  $s_{ij}^2$  repräsentierten Elemente in  $\check{H}^0(U_i \times_U U_j, P)$  sind gleich den Bildern von  $\bar{s}_i$  bzw.  $\bar{s}_j$ , sind also gleich. Aus Behauptung 3.10.1 folgt also, dass  $s_{ij}^1$  und  $s_{ij}^2$  das gleiche Bild in

$$\check{H}^0((V_{ik} \times_U V_{j\ell} \rightarrow U_i \times_U U_j), P) \subseteq \prod_{k,\ell} P(V_{ik} \times_U V_{j\ell})$$

haben. Hieraus folgt wiederum, dass

$$s' = (s_i) \in \ker\left(\prod_{i,k} P(V_{ik}) \rightrightarrows \prod_{i,k,j,\ell} P(V_{ik} \times_U V_{j\ell})\right) = \check{H}^0((V_{ik} \rightarrow U), P).$$

Das von  $s'$  repräsentierte Element  $\bar{s}'$  in  $\tilde{P}(U)$  wird dabei unter  $\tilde{P}(U) \rightarrow \prod_i \tilde{P}(U_i)$  auf  $(\bar{s}_i)$  abgebildet. Damit ist auch die zweite Behauptung von (c) bewiesen.

(d) folgt sofort aus Bemerkung 3.8. Damit ist 3.10 bewiesen.

Aus Lemma 3.10 folgt Satz 3.5: Ist  $P$  eine abelsche Prägarbe, so setzen wir

$$aP = \tilde{\tilde{P}}.$$

Nach 3.10 (a) ist  $\tilde{P}$  separiert, und nach 3.10 (c) ist  $\tilde{\tilde{P}}$  eine Garbe. Weiter erhalten wir nach 3.10 (b) einen kanonischen Morphismus von abelschen Prägarben

$$can : P \rightarrow \tilde{P} \rightarrow \tilde{\tilde{P}} = aP.$$

Ist nun  $F$  eine abelsche Garbe und

$$\psi : P \rightarrow F (= iF)$$

ein Morphismus von abelschen Prägarben, so erhalten wir wegen der Funktorialität der benutzten Konstruktionen (Zuordnung  $P \mapsto \tilde{P}$ , Morphismus  $P \rightarrow \tilde{P}$ ) ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\psi} & F \\ \downarrow & & \downarrow \rho_1 \wr \\ \tilde{P} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \tilde{F} \\ \downarrow & & \downarrow \rho_2 \wr \\ aP = \tilde{\tilde{P}} & \xrightarrow{\tilde{\tilde{\psi}}} & \tilde{\tilde{F}} = aF \end{array} \quad \rho$$

wobei rechts nach 3.10 (d) Isomorphismen stehen. Setzen wir nun

$$a\psi = \tilde{\tilde{\psi}},$$

so haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{can} & aP \\ \searrow \psi & & \swarrow \rho^{-1} a\psi =: \psi' \\ & F & \end{array}$$

wobei  $\psi'$  eindeutig ist: Hierfür genügt es zu zeigen, dass in einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{can} & \tilde{P} \\ \searrow \psi & & \swarrow \mu \\ & F & \end{array}$$

der rechte Morphismus  $\mu$  eindeutig ist (Hieraus folgt durch zweimalige Anwendung, dass  $\psi'$  eindeutig ist). Wegen der Additivität genügt es, dies für  $\psi = 0$  zu zeigen. Ist aber  $\psi = 0$  und  $(U_i \rightarrow U)$  eine Überdeckung in  $\mathcal{T}$ , so folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} P(U) & \longrightarrow & \check{H}^0((U_i \rightarrow U), P) & \hookrightarrow & \prod_i P(U_i) \xrightarrow{pr_i} P(U_i) \\ \psi_U \downarrow & \swarrow \mu & \downarrow & & \downarrow \psi & \downarrow \psi_{U_i=0} \\ F(U) & \xrightarrow{\sim} & \check{H}^0((U_i \rightarrow U), F) & \hookrightarrow & \prod_i F(U_i) \xrightarrow{pr_i} F(U_i) \end{array}$$

dass  $\mu = 0$ .

**Lemma 3.11** Seien

$$f, g : (U'_j \rightarrow U) \rightarrow (U_i \rightarrow U)$$

zwei Verfeinerungsabbildungen von Überdeckungen in der Grothendieck-Topologie  $\mathcal{T}$ . Dann sind für jede abelsche Prägarbe  $P$  die induzierten Abbildungen

$$f^*, g^* : \check{H}^0((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow \check{H}^0((U'_j \rightarrow U), P)$$

gleich.

**Beweis** Sei  $f = (\varepsilon, (f_j))$  und  $g = (\delta, (g_j))$ . Wir haben ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \prod_i P(U_i) & \xrightarrow{d^0 = \alpha_1 - \alpha_2} & \prod_{i_1, i_2} P(U_{i_1} \times_U U_{i_2}) \\ f^* \downarrow & \swarrow \Delta^1 & \downarrow f^* \downarrow g^* \\ \prod_j P(U'_j) & \xrightarrow{d^0 = \alpha_1 - \alpha_2} & \prod_{j_1, j_2} P(U_{j_1} \times_U U_{j_2}), \end{array}$$

wobei  $\Delta^1$  durch

$$(\Delta^1 s)_j = P((f_j, g_j)_U)(s_{\varepsilon(j), \delta(j)})$$

definiert ist, mit dem kanonischen Morphismus

$$(f_j, g_j)_U : U'_j \rightarrow U_{\varepsilon(j)} \times_U U_{\delta(j)}.$$

Man rechnet nach, dass

$$\Delta^1 \circ d^0 = g^* - f^*.$$

Daher sind  $f^*$  und  $g^*$  auf  $\ker d^0 = \check{H}^0((U_i \rightarrow U), P)$  gleich.

Durch dieses Resultat können wir den Limes

$$\check{H}^0(U, P) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathcal{T}(U)^0}} \check{H}^0(\mathfrak{U}, P)$$

besser verstehen: Für zwei Überdeckungen  $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$  in  $\mathcal{T}(U)$  nenne  $\mathfrak{U}'$  feiner als  $\mathfrak{U}$  (Bezeichnung  $\mathfrak{U}' \geq \mathfrak{U}$ ), wenn es eine Verfeinerungsabbildung  $f : \mathfrak{U}' \rightarrow \mathfrak{U}$  gibt. Definiere die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf der Menge  $ob(\mathcal{T}(U))$  der Überdeckungen von  $U$  durch

$$\mathfrak{U} \sim \mathfrak{U}' \Leftrightarrow \mathfrak{U} \leq \mathfrak{U}' \text{ und } \mathfrak{U}' \leq \mathfrak{U}.$$

Dann wird die Menge der Äquivalenzklassen

$$\mathcal{T}(U)_0 = ob(\mathcal{T}(U))/\sim$$

zu einer geordneten Menge, mit der Ordnung induziert von  $\leq$ . Diese ist induktiv geordnet: Für zwei Überdeckungen  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)_i$  und  $\mathfrak{V} = (V_j \rightarrow U)_j$  gibt es die gemeinsame Verfeinerung  $\mathfrak{W} = (U_i \times_U V_j \rightarrow U)_{i,j}$  mit den offensichtlichen Verfeinerungsabbildungen

$$\mathfrak{U} \leftarrow \mathfrak{W} \rightarrow \mathfrak{V},$$

gegeben durch die Abbildungen  $i \leftarrow (i, j) \mapsto j$  und die Projektionen  $U_i \leftarrow U_i \times_U V_j \rightarrow V_j$ ; es ist also  $\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \leq \mathfrak{W}$ .

Nach Lemma 3.11 erhalten wir weiter für  $\mathfrak{U}' \geq \mathfrak{U}$  durch Wahl einer Verfeinerungsabbildung  $f : \mathfrak{U}' \rightarrow \mathfrak{U}$  einen eindeutig bestimmten Homomorphismus

$$(3.11.1) \quad \check{H}^0(\mathfrak{U}, P) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}', P).$$

**Corollar 3.12** Es ist

$$\check{H}^0(U, P) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathcal{T}(U)_0}} \check{H}^0(\mathfrak{U}, P),$$

der induktive Limes über die induktiv geordnete Menge  $\mathcal{T}(U)_0$ .

Hieraus folgt die Vorbemerkung zum Beweis von Lemma 3.10.

Wir kommen nun zum Push-Forward und Pull-Back für Garben. Sei

$$f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$$

ein Morphismus von Siten.

**Lemma 3.13** Ist  $F'$  eine abelsche Garbe auf  $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$ , so ist  $f_P F'$  wieder eine Garbe.

**Beweis:** selbst!

**Lemma/Definition 3.14** (a)  $f_* F' := f_P F'$  heißt das direkte Bild (oder Push-Forward) von  $F'$  (bezüglich  $f$ ).

(b) Für eine abelsche Garbe  $F$  auf  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  heißt  $f^* F := a f^P F$  das (Garben-)Urbild (oder Pull-Back) von  $F$ .

(c) Der Funktor

$$f^* = a f^P : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \rightarrow Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$$

ist linksadjungiert zum Funktor

$$f_* : Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}).$$

**Beweis** Für Garben  $F'$  auf  $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$  und  $F$  auf  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ist kanonisch

$$\begin{aligned} Hom_{Sh}(f^* F, F') &= Hom_{Sh}(a f^P F, F') = Hom_{P_r}(f^P F, i F') \\ &= Hom_{P_r}(F, f_P i F') = Hom_{Sh}(F, f_* F'), \end{aligned}$$

funktoriell in  $F$  und  $F'$ .

## 4 Die abelschen Kategorien der Garben und Prägarben

Sei  $\mathcal{X}$  eine Kategorie.

**Satz 4.1** (a) Die Kategorie  $Pr(\mathcal{X})$  der abelschen Prägarben auf  $\mathcal{X}$  bildet eine abelsche Kategorie.

(b) Eine Sequenz von abelschen Prägarben

$$0 \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn für alle  $U \in ob(\mathcal{X})$  ( $:=$  Objekte von  $\mathcal{X}$ ) die Sequenz

$$0 \rightarrow P'(U) \rightarrow P(U) \rightarrow P''(U) \rightarrow 0$$

exakt in  $\underline{Ab}$  ist.

**Beweis:** Völlig analog zum klassischen Fall eines topologischen Raums (vergleiche Alg. Geo. II, Definition 3.18 für die Definition von Kernen und Cokernen).

**Satz 4.2** Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Situs.

(a) Die Kategorie  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  der abelschen Garben auf  $\mathcal{X}$  bezüglich  $\mathcal{T}$  ist eine abelsche Kategorie.

(b) Der Kern eines Morphismus  $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$  von abelschen Garben ist gleich dem Prägarben-Kern  $\ker^P \varphi$  (d.h.,  $(\ker \varphi)(U) = \ker(\varphi_U : F_1(U) \rightarrow F_2(U))$  für alle  $U$  in  $\mathcal{X}$ ).

(c) Der Cokern eines Morphismus  $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$  von abelschen Garben ist gleich  $a \operatorname{coker}^P \varphi$ , d.h., die assoziierte Garbe zum Prägarben-Kokern  $\operatorname{coker}^P \varphi$  (definiert durch  $(\operatorname{coker}^P \varphi)(U) = \operatorname{coker}(\varphi_U : F_1(U) \rightarrow F_2(U))$  für alle  $U$  in  $\mathcal{X}$ ).

(d) Insbesondere ist  $\varphi : F_1 \rightarrow F_2$  ein Epimorphismus in  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  genau dann, wenn es zu jedem  $U$  in  $\mathcal{X}$  und jedem  $s \in F_2(U)$  eine Überdeckung  $(U_i \rightarrow U)$  in  $\mathcal{T}$  gibt, sowie Schnitte  $s_i \in F_1(U_i)$ , die unter  $\varphi$  auf  $s|_{U_i}$  abgebildet werden.

**Beweis** Die Eigenschaften (a) - (c) folgen leicht aus 4.1 und der universellen Eigenschaft der assoziierten Garbe. Für (d) bemerken wir, dass  $\varphi$  genau dann ein Epimorphismus ist, wenn  $\operatorname{coker} \varphi = 0$ , also wenn  $a(\operatorname{coker}^P \varphi) = 0$ . Dies bedeutet aber, dass es für jedes  $U$  in  $\mathcal{X}$  und jedes  $\bar{s} \in (\operatorname{coker}^P \varphi)(U)$  eine Überdeckung  $(U_i \rightarrow U)$  gibt mit  $\bar{s}|_{U_i} = 0$  für alle  $i$ . Wegen  $(\operatorname{coker}^P \varphi)(U_i) = \operatorname{coker}(\varphi_{U_i} : F_1(U_i) \rightarrow F_2(U_i))$  folgt die Behauptung.

**Satz 4.3** (a) In  $Pr(\mathcal{X})$  und  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  existieren beliebige Limiten (inverse Limiten) und Kolimiten (direkte Limiten).

(b) Der Funktor  $i : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \hookrightarrow Pr(\mathcal{X})$  ist linksexakt.

(c) Der Funktor  $a : Pr(\mathcal{X}) \rightarrow Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ist exakt.

**Beweis** (a) In  $Pr(\mathcal{X})$  ist

$$(\varprojlim^P P_i)(U) = \varprojlim_i P(U_i),$$

analog für direkte Limiten. Ist nun  $(F_i)_{i \in I}$  ein Diagramm von Garben, so ist  $\lim_{\leftarrow i}^P P_i$  wieder eine Garbe, da inverse Limiten miteinander vertauschen. Wir können also  $\lim_{\leftarrow i} F_i = \lim_{\leftarrow i}^P F_i$  setzen. Der direkte Limes ist

$$\lim_{\rightarrow i} F_i = a(\lim_{\rightarrow i}^P F_i),$$

denn wir haben für jede Garbe  $G$  die universelle Eigenschaft

$$\text{Hom}_{Sh}(a \lim_{\rightarrow}^P F_i, G) \cong \text{Hom}_{Pr}(\lim_{\rightarrow} F_i, iG) \cong \varprojlim \text{Hom}_{Pr}(F_i, iG) \cong \varprojlim \text{Hom}_{Sh}(F_i, G)$$

(b) Aus der Adjunktion von  $i$  und  $a$  folgt sofort, dass  $i$  linksexakt und  $a$  rechtsexakt ist (siehe Lemma 4.5 unten).

(c) Wegen  $aP = \tilde{P}$  genügt es zu zeigen, dass der Funktor  $P \mapsto \tilde{P}$  linksexakt ist. Aber es ist

$$\tilde{P}(U) = \lim_{\rightarrow \mathfrak{u} \in \mathfrak{I}(U)_0} \check{H}^0(\mathfrak{u}, P),$$

die Zuordnung  $P \mapsto \check{H}^0(\mathfrak{u}, P)$  ist linksexakt, und die Bildung des induktiven Limes von abelschen Gruppen ist ein exakter Funktor (siehe auch Anhang 4.B).

**Satz 4.4** Sei  $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Morphismus von Siten.

- (a)  $f_P : Pr(\mathcal{X}') \rightarrow Pr(\mathcal{X})$  ist exakt und  $f^P : Pr(\mathcal{X}) \rightarrow Pr(\mathcal{X}')$  ist rechtsexakt.
- (b) Existieren endliche Limiten in  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{X}'$ , und vertauscht  $f^0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$  mit diesen, so ist  $f^P$  exakt.
- (c)  $f_* : Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ist linksexakt und  $f^* : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \rightarrow Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$  ist rechtsexakt.
- (d) Existieren endliche Limiten in  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{X}'$ , und vertauscht  $f^0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$  mit diesen, so ist  $f^*$  exakt.

**Beweis** (a) Die Exaktheit von  $f_P$  ist nach 4.1 klar, und wegen der Adjunktion ist  $f^P$  rechtsexakt (siehe unten).

(b) Aus der Voraussetzung folgt, dass für jedes Objekt  $U'$  in  $\mathcal{X}'$  die Kategorie  $I_{U'}$  (siehe Beweis von 3.2) kofiltriert ist (siehe Anhang 4.B.2). Denn in  $I_{U'}$  existieren nach Voraussetzung endliche Limiten: Für dies ist die Existenz von endlichen Produkten und Differenzkernen zu zeigen. Aber für Objekte  $U' \rightarrow f^0(U_1)$  und  $U' \rightarrow f^0(U_2)$  in  $I_{U'}$  ist das Produkt der Produktmorphismus  $U' \rightarrow f^0(U_1) \times f^0(U_2) = f^0(U_1 \times U_2)$ , und für Morphismen

$$\begin{array}{ccc} & f^0(U_1) & \\ & \nearrow & \downarrow \\ U' & & f^0(U_1) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & f^0(U_1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ f^0(\alpha) \\ \\ f^0(\beta) \end{array}$$

(mit  $U_1 \xrightarrow[\alpha]{\beta} U_2$ ) existiert der Differenzkern

$$\begin{array}{ccc}
 & f^0(\ker(\alpha, \beta)) = \ker(f^0(\alpha), f^0(\beta)) & \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 U' & & f^0(U_1) \\
 & \searrow & \\
 & & 
 \end{array}$$

(universelle Eigenschaften nachrechnen!). Da  $I'_U$  kofiltriert ist, ist  $I_{U'}^{op}$  filtriert. Hieraus folgt, dass die Bildung des direkten Limes über  $I_{U'}^{op}$  exakt ist (siehe Anhang 4.B.3).

(c) Da  $f_*F' = f_PiF'$ , folgt die Behauptung für  $f_*$ , da  $i$  linksexakt (4.3(b)) und  $f_P$  nach (d) exakt ist. Weiter ist  $f^*$  rechtsexakt, da linksadjungiert zu  $f_*$  (siehe 4.5).

(d) Nach (b) ist  $f^P$  exakt, also  $f^* = af^Pi$  auch linksexakt, da  $a$  exakt und  $i$  linksexakt ist.

**Lemma 4.5** Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  abelsche Kategorien, und seien  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  Funktoren, so dass  $G$  rechtsadjungiert zu  $F$  ist ( $\Leftrightarrow F$  ist linksadjungiert zu  $G$ ). Dann ist  $G$  linksexakt und  $F$  rechtsexakt.

**Beweis** Nach Voraussetzung haben wir bifunktorielle Isomorphismen

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB) \cong \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B)$$

für  $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$  und  $B \in \text{ob}(\mathcal{B})$ .

(a) Sei

$$(4.5.1) \quad 0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow 0$$

exakt in  $\mathcal{B}$ . Wir haben zu zeigen, dass

$$(4.5.2) \quad 0 \rightarrow GB_1 \rightarrow GB_2 \rightarrow GB_3$$

exakt ist. Dies bedeutet, dass die Sequenz

$$(4.5.3) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB_3)$$

für alle  $A \in \text{ob}(\mathcal{A})$  exakt ist ( $\Leftrightarrow GB_1$  ist der Kern von  $GB_2 \rightarrow GB_3$ ). Per Adjunktion identifiziert sich (4.5.3) aber mit

$$(4.5.4) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B_1) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B_3).$$

Diese Sequenz ist wegen Exaktheit von (4.5.1) exakt.

(b) Die Rechtsexaktheit von  $F$  ist analog (bzw. dual).

## 4.A Darstellbare Funktoren, Limiten, und Colimiten

Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie.

**Definition 4.A.1** (a) Ein kontravarianter Funktor

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \underline{Sets}$$

heißt **darstellbar**, wenn es ein Objekt  $X$  in  $\mathcal{C}$  gibt, so dass  $F$  isomorph zum kontravarianten  $Hom$ -Funktoren (siehe Alg. Geo. I 9.A.21)

$$\begin{aligned} h_X = Hom_{\mathcal{C}}(-, X) & : \mathcal{C} \rightarrow \underline{Sets} \\ A & \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(A, X) \end{aligned}$$

ist, d.h., wenn es einen in  $A$  funktoriellen Isomorphismus

$$F(A) = Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$$

gibt.

(b) Ein kovarianter Funktor

$$G : \mathcal{C} \rightarrow \underline{Sets}$$

heißt **darstellbar**, wenn er isomorph zum kovarianten Homfunktoren

$$\begin{aligned} h^X = Hom_{\mathcal{C}}(X, -) & : \mathcal{C} \rightarrow \underline{Sets} \\ A & \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(X, A) \end{aligned}$$

für ein Objekt  $X$  in  $\mathcal{C}$  ist, d.h., wenn es eine in  $A$  funktorielle Bijektion

$$G(A) = Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$$

gibt.

Nach Definition sind  $h_X$  und  $h^X$  darstellbar. In der Situation von 4.A.1(a) (bzw. (b)) heißt  $X$  **darstellendes Objekt** für  $F$  (bzw.  $G$ ). Das Objekt  $X$  ist – wenn es existiert – jeweils bis auf Isomorphie eindeutig: Dies folgt aus dem berühmten

**Lemma 4.A.2** (Yoneda-Lemma) (a) Ist

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \underline{Sets}$$

ein kontravarianter Funktor, so hat man für jedes Objekt  $X$  in  $\mathcal{C}$  eine kanonische Bijektion

$$\begin{aligned} e_X : Hom(h_X, F) & \xrightarrow{\sim} F(X) \\ \varphi & \mapsto \varphi_X(id_X). \end{aligned}$$

(b) Ist

$$G : \mathcal{C} \rightarrow \underline{Sets}$$

ein kovarianter Funktor, so hat man für jedes Objekt  $Y$  in  $\mathcal{C}$  eine kanonische Bijektion

$$\begin{aligned} e_Y : Hom(h^Y, G) & \xrightarrow{\sim} G(Y) \\ \varphi & \mapsto \varphi_Y(id_Y). \end{aligned}$$

**Beweis (a):** Die Umkehrabbildung  $m_X$  ordnet einem Element  $a \in F(X)$  den folgenden Morphismus  $m_X(a) := \varphi^a$  von Funktoren zu

$$\begin{aligned} \varphi_A^a &: h_X(A) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow F(A) \\ f &\mapsto \varphi_A^a(f) := F(f)(a). \end{aligned}$$

Beachte: Für  $f : A \rightarrow X$  haben wir  $F(f) : F(X) \rightarrow F(A)$ , da  $F$  kontravariant ist. Dies ist wirklich ein Morphismus von Funktoren: Für einen Morphismus  $g : A \rightarrow A'$  in  $\mathcal{C}$  haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', X) & \xrightarrow{\varphi_{A'}^a} & F(A') \\ g^* \downarrow & & \downarrow F(g) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) & \xrightarrow{\varphi_A^a} & F(A) \\ & & \downarrow \\ & & F(f')(a) \\ f' \longmapsto & & \downarrow \\ & & F(g)(F(f')(a)) \\ & & \parallel \\ f'g \longmapsto & & F(f'g)(a), \end{array}$$

da  $F(f'g) = F(g) \circ F(f')$ .

Es ist  $e_X m_X = id$ : Für  $a \in F(X)$  ist  $e_X(\varphi^a) = \varphi_X^a(id_X) = a$ , da  $F(id_X) = id_{F(X)}$ . Umgekehrt ist  $m_X e_X = id$ : Sei  $\varphi : h_X \rightarrow F$  gegeben und  $e_X(\varphi) = \varphi_X(id_X) \in F(X)$ ; sowie  $\varphi^{e_X(\varphi)} : h_X \rightarrow F$  wie oben konstruiert. Für jedes  $A \in ob(\mathcal{C})$  sind dann die Abbildungen

$$\varphi_A^{e_X(\varphi)} = \varphi_A : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \rightarrow F(A)$$

gleich, denn es ist

$$\varphi_A^{e_X(\varphi)}(f) = F(f)(\varphi_X(id_X)) = \varphi_A(f),$$

da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} id_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) & \xrightarrow{\varphi_X} & F(X) \\ \downarrow & f^* \downarrow & \downarrow F(f) \\ f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) & \xrightarrow{\varphi_A} & F(A) \end{array}$$

kommutativ ist ( $\varphi$  ist Morphismus von Funktoren).

Der Beweis von (b) ist analog.

Durch Anwendung von 4.A.2 auf  $F = h_Y$  bzw.  $G = h^X$  folgt:

**Corollar 4.A.3** Für Objekte  $X, Y$  in  $\mathcal{C}$  hat man kanonische Bijektionen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(h_X, h_Y) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(h^Y, h^X) \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass die darstellenden Objekte bis auf Isomorphie eindeutig sind: Ist

$$h_X \cong F \cong h_Y,$$

so ist  $X \cong Y$ ; entsprechend für kovariante Funktoren. Aus 4.A.3 folgt auch

**Corollar 4.A.4** (Yoneda-Einbettung) Der Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C}^\sim := (\text{kontravariante Funktoren } F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}) \\ X &\mapsto h_X \end{aligned}$$

ist volltreu, liefert also eine Einbettung von  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{C}^\sim$ . Das essentielle Bild ist die volle Unterkategorie der darstellbaren Funktoren.

Wir definieren nun Faserprodukte und Fasersummen.

**Definition 4.A.5** Seien

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow \beta \\ X & \xrightarrow{\alpha} & S \end{array}$$

Morphismen in  $\mathcal{C}$ . Das Faserprodukt von  $\alpha$  und  $\beta$  – oder von  $X$  und  $Y$  über  $S$ , Bezeichnung  $X \times_S Y$ , wird durch die folgende Eigenschaft charakterisiert:

(a) Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{pr_2} & Y \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow \beta \\ X & \xrightarrow{\alpha} & S \end{array}$$

(Man nennt  $pr_1$  bzw.  $pr_2$  die erste bzw. zweite Projektion).

(b) Ist

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & Y \\ \tilde{\beta} \downarrow & & \downarrow \beta \\ X & \xrightarrow{\alpha} & S \end{array}$$

ein weiteres kommutatives Diagramm, so gibt es genau einen Morphismus  $\gamma : W \rightarrow X \times_S Y$  mit  $pr_1 \gamma = \tilde{\alpha}$  und  $pr_2 \gamma = \tilde{\beta}$ , d.h., derart dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} W & & & & Y \\ & \searrow \tilde{\alpha} & & & \downarrow \beta \\ & & X \times_S Y & \xrightarrow{pr_2} & Y \\ & \searrow \exists! \gamma & \downarrow pr_1 & & \downarrow \beta \\ & & X & \xrightarrow{\alpha} & S \\ & \searrow \tilde{\beta} & & & \end{array}$$

kommutativ ist.

**Bemerkung 4.A.6** (a) Faserprodukte müssen nicht existieren; wenn sie existieren, sind sie aber bis auf kanonische Isomorphie eindeutig (Übungsaufgabe!).

(b) In der Kategorie Sets der Mengen existieren Faserprodukte: Es ist für Abbildungen  $M \xrightarrow{\alpha} T \xleftarrow{\beta} N$  von Mengen

$$M \times_T N = \{(m, n) \in M \times N \mid \alpha(m) = \beta(n)\}.$$

(c) Die universelle Eigenschaft eines Faserproduktes  $X \times_S Y$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist äquivalent dazu, dass für jedes weitere Objekt  $Z$  in  $\mathcal{C}$  die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X \times_S Y) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \times_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, S)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) \\ \gamma &\mapsto (\text{pr}_1 \gamma, \text{pr}_2 \gamma) \end{aligned}$$

bijektiv ist. Das rechte Faserprodukt ist hierbei vermöge der Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y) & g \\ & \downarrow \beta_* & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) & \xrightarrow{\alpha_*} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, S) & \beta g \\ & f \longmapsto & \alpha f \end{array}$$

genommen.

(d) Eine etwas andere Deutung ist wie folgt: Sei  $\mathcal{C}/S$  die Kategorie der **Objekte in  $\mathcal{C}$  über  $S$** : Objekte in  $\mathcal{C}/S$  sind Objekte  $X$  in  $\mathcal{C}$  zusammen mit einem Morphismus  $\alpha : X \rightarrow S$ ; man kann auch  $\alpha$  selbst als Objekt auffassen, denn durch  $\alpha$  ist  $X$  bereits gegeben. Ein Morphismus von  $\alpha : X \rightarrow S$  nach  $\alpha' : X' \rightarrow S$  ist ein Morphismus  $f : X \rightarrow X'$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ & \searrow \alpha & \swarrow \alpha' \\ & S & \end{array}$$

kommutativ macht.

Dann ist ein Faserprodukt  $X \times_S Y$  dasselbe wie ein Produkt von  $X \rightarrow S$  und  $Y \rightarrow S$  in  $\mathcal{C}/S$ , weil sich die universellen Eigenschaften entsprechen.

**Lemma 4.A.7** Die Eigenschaften aus Lemma 1.14 (Kommutativität, Assoziativität, Transitivität und Funktorialität) gelte für Faserprodukte in einer beliebigen Kategorie  $\mathcal{C}$  (wenn sie existieren).

**Beweis** Wir zeigen zum Beispiel die Funktorialität. Wir haben ein kommutatives Diagramm in  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & Y \\ & \searrow \alpha & & \swarrow \beta & \\ & & S & & \\ & \swarrow \alpha' & & \searrow \beta' & \\ X' & & & & Y' \end{array},$$

d.h.,  $X, X', Y$  und  $Y'$  sind Objekte über  $S$  (vermöge  $\alpha, \alpha', \beta$  und  $\beta'$ ) und  $f$  und  $g$  sind Morphismen von Objekten über  $S$  (Kommutativität der Dreiecke). Existieren die Faserprodukte, so haben wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_S Y & \xrightarrow{pr_2} & Y \\
 \downarrow pr_1 & \searrow \exists! h & \downarrow g \\
 & X' \times_S Y' & \xrightarrow{pr'_2} Y' \\
 & \downarrow pr'_1 & \downarrow \beta' \\
 X & \xrightarrow{f} & X' \xrightarrow{\alpha'} S,
 \end{array}$$

wobei das innere und das äußere Quadrat kommutativ sind (beachte  $\alpha'f = \alpha$  und  $\beta'g = \beta$ ). Nach der universellen Eigenschaft von  $X' \times_S Y'$  gibt es genau einen Morphismus  $h : X \times_S Y \rightarrow X' \times_S Y'$ , der das ganze Diagramm kommutativ macht; diesen bezeichnen wir mit  $f \times g$ , und er erfüllt die Behauptung von Lemma 1.14 (d).

**Bemerkung 4.A.7** Durch Umdrehen aller Pfeile erhält man den Begriff der Fasersumme  $X \amalg_S Y$  für ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{\beta} & Y \\
 \alpha \downarrow & & \\
 X & & 
 \end{array}$$

wobei man die dualen universellen Eigenschaften und anderen Eigenschaften hat.

**Beispiel 4.A.8** In der Kategorie der Ringe existiert für jedes Diagramm von Ringhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\beta} & B \\
 \alpha \downarrow & & \\
 A & & 
 \end{array}$$

die Fasersumme und ist durch das Tensorprodukt gegeben: Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\beta} & B \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & A \otimes_R B
 \end{array}$$

und für jedes Diagramm von Ringen

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\beta} & B \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \\
 A & \longrightarrow & A \otimes_R B \\
 & \searrow f & \downarrow g \\
 & & C
 \end{array}$$

$\exists! h$

mit  $f\alpha = g\beta$  existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus  $h$ , der das gesamte Diagramm kommutativ macht.

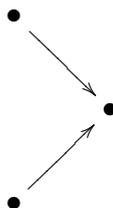
Wir kommen nun zu der allgemeinen Theorie von Limiten und Colimiten.

**Definition 4.A.9** Eine Kategorie  $I$  heißt klein (oder Diagrammkategorie), wenn die Objekte eine Menge bilden.

**Beispiele 4.A.10** Oft sind die betrachteten kleinen Kategorien “wirklich klein” in dem Sinne, dass man alle Objekte und Morphismen hinschreiben kann.

(a) Die **diskrete Kategorie**  $\underline{I}$  über einer Menge  $I$  hat die Elemente von  $I$  als Objekte und nur die Identitäten als Morphismen.

(b) Es bezeichne



die Kategorie, die drei Objekte hat (durch Punkte gekennzeichnet) und außer den Identitäten nur die beiden angegebenen Pfeile (alle Kompositionen sind dann klar!).

(c) Für jede Gruppe  $G$  hat man die kleine Kategorie  $\underline{G}$  mit einem Objekt  $*$  und allen Elementen  $\sigma \in G$  als Morphismen (Alg. Geo. I, 9.A.2 (e)).

(d) Für jede geordnete Menge  $(I, \leq)$  hat man die Kategorie mit Objekte  $i \in I$  und genau einem Morphismus  $i \rightarrow j$ , wenn  $i \leq j$  (Alg. Geo. I, 9.A.2 (c)).

**Definition 4.A.11** Sei  $I$  eine kleine Kategorie, und sei  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie. Ein Diagramm in  $\mathcal{C}$  über  $I$  (oder ein  $I$ -Objekt in  $\mathcal{C}$ ) ist ein (kovarianter) Funktor  $X : I \rightarrow \mathcal{C}$ .

Die  $I$ -Objekte in  $\mathcal{C}$  bilden eine Kategorie

$$\mathcal{C}^I,$$

wobei die Morphismen die Morphismen von Funktoren sind. Man bezeichnet oft die Objekte von  $I$  mit kleinen Buchstaben  $i, j, \dots$  und schreibt  $X_i$  für  $X(i)$ .

**Beispiele 4.A.12** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie.

(a) Für die Kategorie  $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$  aus 4.A.6 (b) ist ein zugehöriges Diagramm in  $\mathcal{C}$  wirklich durch ein Diagramm

$$X \xrightarrow{g} Y \xleftarrow{\beta} Z$$

mit Morphismen  $\alpha$  und  $\beta$  in  $\mathcal{C}$  gegeben. Morphismen solcher Diagramme sind kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y & \xleftarrow{\beta} & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\alpha'} & Y' & \xleftarrow{\beta'} & Z' \end{array}.$$

(b) Betrachte die kleine Kategorie  $\bullet \longrightarrow \bullet$  (2 Objekte, außer den Identitäten nur ein Pfeil). Diagramme hierüber sind  $\mathcal{C}$  sind einfach Morphismen

$$A \xrightarrow{f} B$$

in  $\mathcal{C}$ , wobei Morphismen von diesen wiederum kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

sind. Dies nennt man die **Kategorie der Pfeile in  $\mathcal{C}$** , Bezeichnung  $Ar(\mathcal{C})$ .

(c) Ist  $(I, \leq)$  eine induktiv geordnete Menge, aufgefasst als Kategorie nach 4.A.6 (d), so ist ein kovarianter Funktor

$$X : (I, \leq) \rightarrow \mathcal{C}$$

dasselbe wie ein induktives System über  $I$  in  $\mathcal{C}$  (Definition Alg. Geo. I, 9.A.12). Ein kontravarianter Funktor

$$X' : (I, \leq) \rightarrow \mathcal{C}$$

ist dasselbe wie ein projektives System in  $\mathcal{C}$  über  $I$  (loc. cit. 9.A.13).

Sei nun  $I$  eine kleine Kategorie und  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie.

**Definition 4.A.13** Für ein Objekt  $A \in \mathcal{C}$  definiere das **konstante  $I$ -Objekt  $\underline{A}$**  als den Funktor

$$\begin{aligned} \underline{A} : \quad I &\rightarrow \mathcal{C} \\ i &\mapsto A \\ i \rightarrow j &\mapsto id_A. \end{aligned}$$

**Beispiel 4.A.14** Im Beispiel 4.A.12 (a)  $I = \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$  ist das konstante Objekt  $A$

$$A \xrightarrow{id_A} A \xleftarrow{id_A} A.$$

**Definition 4.A.15** (a) Man sagt, dass der Limes (oder inverse Limes) eines  $I$ -Objekts  $(A_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{C}$  existiert, wenn der kontravariante Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\rightarrow \underline{Sets} \\ X &\mapsto Hom_{\mathcal{C}^I}(\underline{X}, (A_i)_{i \in I}) \end{aligned}$$

darstellbar ist. Das darstellende Objekt heißt der Limes von  $(A_i)_{i \in I}$ , Bezeichnung

$$\lim (A_i)_{i \in I} \quad \text{oder} \quad \lim_{i \in I} A_i.$$

(b) Man sagt, dass der Kolimes (oder direkte Limes) von  $(A_i)_{i \in I}$  existiert, wenn der kovariante Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\rightarrow \underline{Sets} \\ X &\mapsto Hom_{\mathcal{C}^I}((A_i)_{i \in I}, \underline{X}) \end{aligned}$$

darstellbar ist. Das darstellende Objekt heißt der Kolimes von  $(A_i)_{i \in I}$ , Bezeichnung

$$\text{colim} (A_i)_{i \in I} = \text{colim}_{i \in I} A_i.$$

Wir machen diese elegante Definition nun expliziter.

**Bemerkungen 4.A.16** (explizite Beschreibung) (a) Ein Element aus  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\underline{X}, (A_i)_{i \in I})$  ist offenbar durch das Folgende gegeben:

(i) Für jedes  $i \in I$  hat man einen Morphismus in  $\mathcal{C}$

$$\varphi_i : X \rightarrow A_i.$$

(ii) Für jeden Morphismus  $i \rightarrow j$  in  $I$  ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & A_i \\ & \nearrow \varphi_i & \downarrow \\ X & & \\ & \searrow \varphi_j & \\ & & A_j \end{array}$$

kommutativ, wobei der vertikale Morphismus zu  $i \rightarrow j$  gehört (man hat einen Funktor  $a : I \rightarrow \mathcal{C}$ , wir schreiben  $a(i) = A_i$ , und dann ist der rechte Morphismus  $a(i \rightarrow j)$ ).

(b) Existiert  $\lim (A_i)_{i \in I}$  (andere Bezeichnung  $\lim_I a$ ), und fixieren wir einen in  $X$  funktoriellen Isomorphismus

$$(4.A.16.1) \quad \alpha : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I (A_i)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\underline{X}, (A_i)),$$

so erhalten wir für  $X = \lim (A_i)_{i \in I}$  als Bild von  $id_{\lim(A_i)}$  ein Element  $\varphi^{univ} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\lim(A_i), (A_i))$ , nach (a) also Morphismen  $p_i : \lim(A_i) \rightarrow A_i$  für alle  $i \in I$  und kommutative Dreiecke

(4.A.16.2)

$$\begin{array}{ccc} & & A_i \\ & \nearrow p_i & \downarrow \\ \lim(A_i)_{i \in I} & & \\ & \searrow p_j & \\ & & A_j \end{array}$$

für jeden Morphismus  $i \rightarrow j$  in  $I$ . Der Morphismus  $p_i$  heißt die  $i$ -te Projektion. Ist weiter ein Element  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^I}(\underline{X}, (A_i))$  gegeben, also Morphismen  $\varphi_i : X \rightarrow A_i$  für alle  $i \in I$  und kommutative Diagramme

(4.A.16.3)

$$\begin{array}{ccc} & & A_i \\ & \nearrow \varphi_i & \downarrow \\ X & & \\ & \searrow \varphi_j & \\ & & A_j \end{array}$$

für alle Morphismen  $i \rightarrow j$ , so gibt es genau einen Morphismus

$$\varphi : X \rightarrow \lim(A_i)$$

(nämlich das Urbild von  $\alpha$  unter (4.A.16.1)) mit

$$\varphi_i = p_i \varphi$$

(dies folgt aus der Wahl von  $\varphi^{univ}$  und der Funktorialität von (4.A.16.1)).

(c) Für  $\text{colim}(A_i)$  erhält man analoge Aussagen, durch Umdrehen aller Pfeile.

**Beispiele 4.A.17** (a) Ist  $I$  eine Menge und  $\underline{I}$  die diskrete Kategorie zu  $I$  (4.A.10 (a)), so ist ein  $\underline{I}$ -Objekt in  $\mathcal{C}$  einfach durch eine Familie  $(A_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{C}$  gegeben (es gibt keine Morphismen zwischen  $i \neq j$ ), und es ist

$$\lim_{\underline{I}}(A_i) = \prod_{i \in I} A_i,$$

falls dieses Produkt in  $\mathcal{C}$  existiert, denn die universellen Eigenschaften von  $\lim_{\underline{I}}(A_i)$  (4.A.16

(b)) und  $\prod_{i \in I} A_i$  (Alg. Geo. I, 9.A.8) sind gleich. Entsprechend ist

$$\text{colim}_{\underline{I}}(A_i) = \coprod_{i \in I} A_i,$$

die Summe oder das Koproduct der  $A_i$  (Alg. Geo. I, 9.A.9), falls dies in  $\mathcal{C}$  existiert.

(b) Entsprechend zeigt man: Ist  $(I, \leq)$  eine filtrierend geordnete Menge (aufgefasst als Kategorie), so ist für jedes  $I$ -Objekt in  $\mathcal{C}$ , also jedes induktive System  $(A_i)_{i \in I}$  über  $I$  in  $\mathcal{C}$ ,

$$\text{colim}(A_i)_{i \in I} = \lim_{\substack{\rightarrow \\ i \in I}} A_i$$

der induktive Limes des Systems (siehe Alg. Geo. I, 9.A.12), falls dieser existiert. Entsprechend ist für jedes  $I^\circ$ -Objekt  $(A_i)_{i \in I}$  in  $\mathcal{C}$  (wobei  $I^\circ$  die duale Kategorie zu  $I$  bezeichnet), also jedes projektive System über  $I$  in  $\mathcal{C}$

$$\lim(A_i)_{i \in I^\circ} = \lim_{\substack{\leftarrow \\ i \in I}} A_i$$

der projektive Limes des Systems (siehe Alg. Geo. I, 9.A.13), falls dieser existiert.

(c) Betrachte die Kategorie  $\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$  4.A.10 (b). Für ein entsprechendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ & \downarrow & \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

in  $\mathcal{C}$  folgt aus den universellen Eigenschaften, dass der Limes das Faserprodukt

$$X \times_Y Z$$

ist  $\mathcal{C}$  ist – wenn dieses existiert.

Wir kommen nun zu einem speziellen, aber sehr wichtigen Beispiel. Betrachte die folgende kleine Kategorie

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

(zwei Objekte, und abgesehen von den beiden Identitäten nur die beiden angegebenen Pfeile).  
Ein Diagramm in  $\mathcal{C}$  hierüber ist

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} B.$$

**Definition 4.A.18** (a) Der Limes dieses Diagramms heißt der Differenzkern von  $\alpha$  und  $\beta$ ,  
Bezeichnung

$$\ker(\alpha, \beta).$$

(b) Der Kolimes dieses Diagramms heißt der Differenzkokern von  $\alpha$  und  $\beta$ , Bezeichnung

$$\operatorname{coker}(\alpha, \beta).$$

(Jeweils wenn diese in  $\mathcal{C}$  existieren).

Wir beschreiben nun die universellen Eigenschaften:

**Lemma 4.A.19** (a) Man hat einen Morphismus

$$\ker(\alpha, \beta) \xrightarrow{i} A$$

mit  $\alpha i = \beta i$ . Ist

$$X \xrightarrow{\gamma} A$$

ein weiterer Morphismus mit  $\alpha\gamma = \beta\gamma$ , so gibt es genau einen Morphismus  $\gamma' : X \rightarrow \ker(\alpha, \beta)$   
der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \ker(\alpha, \beta) & \xrightarrow{i} & A \\ & \swarrow \text{dashed } \exists \gamma' & \nearrow \gamma \\ & X & \end{array}$$

kommutativ macht.

(b) Man hat einen Morphismus  $B \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker}(\alpha, \beta)$  mit  $\pi\alpha = \pi\beta$ . Ist

$$B \xrightarrow{\rho} X$$

ein weiterer Morphismus mit  $\rho\alpha = \rho\beta$ , so gibt es genau einen Morphismus  $\rho' : \operatorname{coker}(\alpha, \beta) \rightarrow X$ ,  
der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad} & \operatorname{coker}(\alpha, \beta) \\ & \searrow \rho & \swarrow \text{dashed } \rho' \\ & X & \end{array}$$

kommutativ macht.

**Beweis:** Dies folgt sofort aus der expliziten Beschreibung in 4.A.16.

Differenzkerne und -kokerne sind nicht-additive Analoga von Kernen und Kokernen in additiven Kategorien (siehe 3.A.7). Wie dort gilt:

**Lemma 4.A.20** Seien  $\alpha, \beta : A \rightarrow B$  Morphismen.

(a) Falls  $\ker(\alpha, \beta)$  existiert, so ist

$$i : \ker(\alpha, \beta) \rightarrow A$$

ein Monomorphismus.

(b) Falls  $\operatorname{coker}(\alpha, \beta)$  existiert, so ist

$$\pi : B \rightarrow \operatorname{coker}(\alpha, \beta)$$

ein Epimorphismus.

**Beweis** (a): Seien  $f, g : Z \rightarrow \ker(\alpha, \beta)$  zwei Morphismen mit  $if = ig$ . Wegen  $\alpha i = \beta i$  gilt auch

$$\alpha i f = \beta i f.$$

Nach der universellen Eigenschaft des Differenzkerns (4.A.19 (a)) gibt es also genau einen Morphismus  $h : Z \rightarrow \ker(\alpha, \beta)$  mit

$$ih = if.$$

Da auch noch  $if = ig$  gilt, muss  $h = f = g$  gelten, also insbesondere  $f = g$ .

Der Beweis von (b) ist dual.

Differenzkerne und -kokerne spielen wegen des folgenden Resultats eine Rolle.

**Satz 4.A.21** (a) In  $\mathcal{C}$  existieren genau dann beliebige (bzw. beliebige endliche) Limiten, wenn in  $\mathcal{C}$  beliebige Differenzkerne und beliebige (bzw. beliebige endliche) Produkte existieren.

(b) In  $\mathcal{C}$  existieren genau dann beliebige (bzw. beliebige endliche) Kolimiten, wenn in  $\mathcal{C}$  beliebige Differenzkokerne und beliebige (bzw. beliebige endliche) Summen existieren.

Hierbei spricht man von endlichen Limiten oder Kolimiten, wenn die zugrundeliegende Indexkategorie  $I$  endlich ist, d.h., endlich viele Objekte und nur endliche Morphismenmengen hat.

**Beweis** Wir beweisen nur (a); dann folgt (b) durch Übergang zur dualen Kategorie, wodurch Kolimiten zu Limiten, Summen zu Produkten und Differenzkokerne zu Differenzkernen werden.

Sei  $I$  eine kleine (bzw. endliche) Kategorie. Sei  $ob(I)$  die Menge aller Objekte in  $I$  und sei  $mor(I)$  die Menge aller Morphismen in  $I$ . Für einen Morphismus  $f : A \rightarrow B$  in  $\mathcal{C}$  sei  $q(f) := A$  die Quelle und  $z(f) := B$  das Ziel von  $f$ . Für ein  $I$ -Diagramm  $a : I \rightarrow \mathcal{C}$  betrachte die Morphismen

$$(4.A.21.1) \quad \prod_{i \in ob(I)} a(i) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \prod_{f \in mor(I)} a(z(f))$$

die wie folgt definiert sind (nach Voraussetzung existieren die jeweiligen Produkte): Die “ $f$ -Komponente” von  $\alpha$  (siehe die universelle Eigenschaft des Produkts, Alg. Geo. I 9.A.8) ist der Morphismus

$$\prod_{i \in ob(i)} a(i) \xrightarrow{pr_{z(f)}} a(z(f)),$$

die  $f$ -Komponente von  $\beta$  ist der Morphismus

$$\prod_{i \in \text{ob}(I)} a(i) \xrightarrow{pr_{q(f)}} a(q(f)) \xrightarrow{a(f)} a(z(f))$$

**Behauptung:**  $\ker(\alpha, \beta) = \lim_{i \in I} a(i)$ .

**Beweis:** Nach der universellen Eigenschaft von  $\ker(\alpha, \beta)$  entspricht ein Morphismus  $Z \rightarrow \ker(\alpha, \beta)$  einem Morphismus

$$\varphi : Z \rightarrow \prod_{i \in \text{ob}(I)} a(i)$$

mit  $\alpha\varphi = \beta\varphi$ . Nach der universellen Eigenschaft des Produkts entspricht  $\varphi$  der Vorgabe von Morphismen

$$\varphi_i : Z \rightarrow a(i)$$

für alle  $i \in I$ , und  $\alpha\varphi = \beta\varphi$  bedeutet gerade, dass für jedes  $f : i \rightarrow j$  in  $I$  das Diagramm

(4.A.21.2)

$$\begin{array}{ccc} & a(i) & \\ \varphi_i \nearrow & \downarrow a(f) & \\ Z & & \\ \varphi_j \searrow & a(j) & \end{array}$$

kommutativ ist. Dies ergibt gerade die universelle Eigenschaft von  $\lim_{i \in I} a(i)$  (siehe 4.A.16) für  $Z = \ker(\alpha, \beta)$ , da das obige Argument zeigt, dass alle Diagramme (4.A.21.2) über das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & a(i) & \\ \nearrow & \downarrow a(f) & \\ \ker(\alpha, \beta) & & \\ \searrow & a(j) & \end{array}$$

faktorisieren.

**Satz 4.A.22** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit endlichen Produkten. Dann ist äquivalent:

- (a)  $\mathcal{C}$  besitzt Faserprodukte.
- (b)  $\mathcal{C}$  besitzt Differenzkerne.

**Beweis** (a)  $\Rightarrow$  (b): Für  $A \rightrightarrows^f B$  betrachte das Faserprodukt-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{p_2} & A \\ p_1 \downarrow & & \downarrow (id, g) \\ A & \xrightarrow{(id, f)} & A \times B \end{array}$$

Dann ist  $K \xrightarrow{p_2} A$  der Differenzkern von  $f$  und  $g$ . Sei nämlich  $h : C \rightarrow A$  gegeben mit  $fh = gh$ . Dann ist

$$(id, f)h = (h, fh) = (h, gh) = (id, g)h,$$

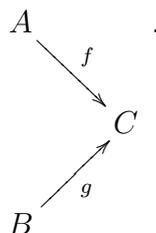
also existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus

$$\tilde{h} : C \rightarrow K \text{ mit } p_1\tilde{h} = h = p_2\tilde{h}.$$

Weiter folgt mit der ersten Projektion  $q_1 : A \times B \rightarrow A$ , dass  $p_1 = q_1(id, f)p_1 = q_1(id, g)p_2 = p_2$ ; wir haben also einen *eindeutig* bestimmten Morphismus  $K \rightarrow A$  mit der gewünschten Eigenschaft.

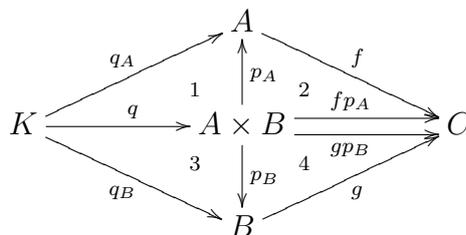
(b)  $\Rightarrow$  (a): Betrachte ein Diagramm

(1)



In dem assoziierten Diagramm

(2)



sei  $K$  der Differenzkern von  $fp_A$  und  $gp_B$ , und sei  $q_A = p_Aq$  und  $q_B = q_Bq$ . Dann sind alle Dreiecke 1 bis 4 kommutativ. Wir behaupten, dass  $K$  mittels  $q_A$  und  $q_B$  ein Faserprodukt von (1) bildet.

Wegen  $fp_Aq = gp_Bq$  (nach Voraussetzung!) gilt nämlich  $f q_A = fp_Aq = gp_Bq = g q_B$ . Hat man weiter Morphismen  $h : D \rightarrow A$  und  $k : D \rightarrow B$  mit  $fh = gk$ , so gilt für den Morphismus  $(h, k) : D \rightarrow A \times B$  per Definition

$$fp_A(h, k) = fh = gk = gp_B(h, k),$$

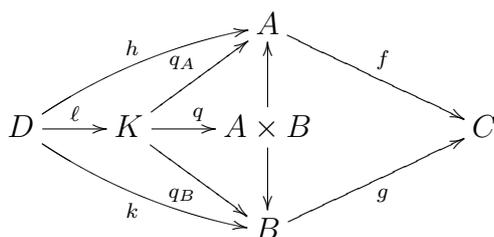
also existiert genau ein Morphismus

$$\ell : D \rightarrow K$$

mit  $q\ell = (h, k)$ , und es ist dann per Definition

$$q_A\ell = p_Aq\ell = h \text{ und } q_B\ell = p_Bq\ell = k.$$

Weiter ist das Diagramm



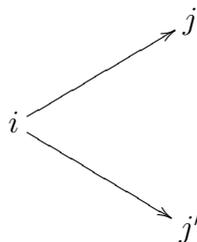
kommutativ, und die Eindeutigkeit von  $\ell$  folgt, da  $q$  ein Monomorphismus ist (universelle Eigenschaft des Differenzkerns).

## 4.B Filtrierte Kategorien

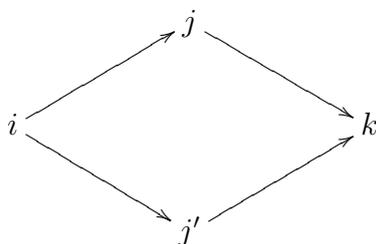
Die folgende Definition verallgemeinert den Begriff einer induktiv geordneten Menge und eines induktiven Limes. Entsprechend werden die dualen Begriffe behandelt.

**Definition 4.B.1** (a) Eine Kategorie  $I$  heißt pseudo-filtriert, wenn gilt

(1) Jedes Diagramm der Form



kann zu einem kommutativen Diagramm



erweitert werden.

(2) Jedes Diagramm der Form

$$i \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} j$$

kann zu einem kommutativen Diagramm

$$i \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} j \xrightarrow{\gamma} k$$

erweitert werden (d.h.,  $\gamma\alpha = \gamma\beta$ ).

(b)  $I$  heißt zusammenhängend, wenn es für beliebige Objekte  $i$  und  $j$  in  $I$  Morphismen

$$i \rightarrow i_1 \leftarrow j_1 \rightarrow i_2 \leftarrow \dots \leftarrow j$$

gibt.

(c)  $I$  heißt filtriert, wenn  $I$  pseudo-filtriert und zusammenhängend ist.

(d)  $I$  heißt (pseudo-)kofiltriert, wenn  $I^{op}$  (pseudo-) filtriert ist.

**Beispiele 4.B.2** (a)  $I$  ist filtriert, wenn  $I$  endliche Kolimiten besitzt: In (1) kann man dann die Fasersumme von  $j$  und  $j'$  über  $i$  nehmen, in (2) den Differenzkokern, und in (b) die Summe  $i \rightarrow i \amalg j \leftarrow j$ . Entsprechend ist  $I$  kofiltriert, wenn  $I$  endliche Limiten besitzt.

(b) Sei  $M$  eine geordnete Menge, aufgefasst als Kategorie mit  $\leq$  als Morphismen. Dann ist  $M$  genau dann filtrierend, wenn  $M$  induktiv geordnet ist (jeder Morphismus  $x \leq y$  ist eindeutig).

**Satz 4.B.3** Sei  $I$  eine filtrierte Kategorie und  $f : I \rightarrow \mathcal{C}$  ein kovarianter Funktor, wobei  $\mathcal{C} = \underline{Set}$  oder  $\mathcal{C} = \underline{Ab}$ . Dann existiert der direkte Limes

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} f(i)$$

in  $\mathcal{C}$ , und die Bildung dieses direkten Limes ist exakt (vertauscht mit endlichen Limiten und Kolimiten).

**Beweis** Explizit ist

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} f(i) = \left( \coprod_{i \in I} f(i) \right) / \sim,$$

wobei für  $x \in f(i)$  und  $y \in f(j)$  gilt:

$$x \sim y \iff \text{es existieren } i \rightarrow k, j \rightarrow k, \text{ so dass } x \text{ und } y \\ \text{dasselbe Bild unter } f(i) \rightarrow f(k) \text{ und } f(j) \rightarrow f(k) \text{ haben.}$$

Hieraus folgt leicht die Exaktheit.

## 5 Kohomologie auf Siten

Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Situs.

**Proposition 5.1** Die abelschen Kategorien  $Pr(\mathcal{X})$  und  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  haben genügend viele Injektive, d.h., jedes Objekt  $P$  in  $Pr(\mathcal{X})$  besitzt einen Monomorphismus  $P \hookrightarrow I$  in eine injektive Prägarbe  $I$ , und entsprechendes gilt in  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ .

Wir benutzen hierzu eine Methode von Grothendieck. Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie.

**Lemma/Definition 5.2** Eine Familie  $(E_i)_{i \in I}$  von Objekten aus  $\mathcal{A}$  heißt eine **Familie von Erzeugern**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(a) Der Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \underline{Ab} \\ A &\mapsto \prod_{i \in I} Hom_{\mathcal{A}}(E_i, A) \end{aligned}$$

ist treu, d.h., für alle Objekte  $A, A'$  in  $\mathcal{A}$  ist die Abbildung

$$Hom_{\mathcal{A}}(A, A') \rightarrow Hom\left(\prod_{i \in I} Hom_{\mathcal{A}}(E_i, A), \prod_{i \in I} Hom_{\mathcal{A}}(E_i, A')\right)$$

injektiv.

(b) Für jedes Objekt  $A$  in  $\mathcal{A}$  und jedes Unterobjekt  $B \subsetneq A$  existiert ein Morphismus  $E_i \rightarrow A$ , der nicht über  $B$  faktorisiert.

**Beweis** der Äquivalenz von (a) und (b):

(a)  $\Rightarrow$  (b): Wir haben die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} A' = A/B \rightarrow 0,$$

und nach Voraussetzung ist  $A' \neq 0$ . Daher ist  $\pi \neq 0$ , und nach (a) gibt es ein  $i \in I$ , für das die induzierte Abbildung

$$Hom_{\mathcal{A}}(E_i, A) \rightarrow Hom_{\mathcal{A}}(E_i, A')$$

nicht null ist. Ist  $\varphi : E_i \rightarrow A$  nicht im Kern, so faktorisiert  $\varphi$  nicht über  $B$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a): selbst.

**Beispiele 5.3** Ist  $R$  ein Ring mit Eins, so ist  $E = R$  ein Erzeuger für  $Mod_R$ , denn für jeden  $R$ -Modul  $M$  ist kanonisch

$$\begin{aligned} Hom_R(R, M) &\xrightarrow{\sim} M \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

**Definition 5.4** Man sagt die abelsche Kategorie  $\mathcal{A}$  erfüllt die Eigenschaft

(AB3), wenn in  $\mathcal{A}$  beliebige direkte Summen  $\bigoplus_{i \in I} A_i$  existieren (da in  $\mathcal{A}$  Kokerne existieren, folgt, dass beliebige direkte Limiten existieren, siehe 4.A.21),

(AB4), wenn (AB3) gilt und die Bildung direkter Summen ein exakter Funktor ist,

(AB5), wenn (AB3) gilt und die Bildung induktiver Limiten ein exakter Funktor ist.

Die Eigenschaften (AB3\*), (AB4\*) und (AB5\*) werden dual definiert.

**Definition 5.5** Eine abelsche Kategorie heißt Grothendieck-Kategorie, wenn sie (AB5) erfüllt und eine Familie von Erzeugern besitzt.

Die Kategorie im Beispiel 5.3 ist eine Grothendieck-Kategorie, denn die Eigenschaft (AB5) gilt für sie, wie man leicht sieht, und die zweite Eigenschaft gilt nach 5.3.

**Satz 5.6** Eine Grothendieck-Kategorie hat genügend viele Injektive.

**Beweisidee:** Wegen (AB3) besitzt  $\mathcal{A}$  einen Erzeuger  $E$  (für eine Familie  $(E_i)_{i \in I}$  bilde  $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ). Für den Ring mit Eins  $R = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, E)$  betrachtet man dann den treuen Funktor

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\rightarrow \text{Mod}_R \\ A &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}(E, A). \end{aligned}$$

Für den Beweis von 5.1 genügt es also zu zeigen:

**Satz 5.7**  $Pr(\mathcal{X})$  und  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  sind Grothendieck-Kategorien.

**Beweis:** Wir betrachten zunächst Erzeuger.

**Lemma/Definition 5.8** (a) Für ein Objekt  $U$  in  $\mathcal{X}$  definiere die abelsche Prägarbe  $\mathbb{Z}_U^P$  durch

$$\mathbb{Z}_U^P(V) = \bigoplus_{f \in \text{Hom}(V, U)} \mathbb{Z} = \bigoplus_{f \in \text{Hom}(V, U)} \mathbb{Z}f \quad \text{für } V \text{ in } \mathcal{X}.$$

Für jede abelsche Prägarbe  $P$  auf  $\mathcal{X}$  gilt dann

$$\text{Hom}_{Pr(\mathcal{X})}(\mathbb{Z}_U^P, P) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, F(U)) = P(U),$$

funktoriell in  $P$  (d.h.,  $\mathbb{Z}_U^P$  stellt den Funktor  $P \mapsto P(U)$  dar).

(b) Definiere die abelsche Garbe  $\mathbb{Z}_U$  als die assoziierte Garbe

$$\mathbb{Z}_U = a\mathbb{Z}_U^P.$$

Dann gilt funktoriell für Garben  $F$  auf  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$

$$\text{Hom}_{Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})}(\mathbb{Z}_U, F) = F(U).$$

**Beweis** (a): Jeder Morphismus  $f : \mathbb{Z}_U^P \rightarrow P$  ist eindeutig durch  $f_U(1_{id_U}) \in P(U)$  bestimmt.

(b) folgt aus (a) durch die Adjunktion von  $a$  und  $i$ .

**Corollar 5.9**  $Pr(\mathcal{X})$  und  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  besitzen eine Familie von Erzeugern.

**Beweis:** (a) Ist  $P \rightarrow P'$  nicht null in  $Pr(\mathcal{X})$ , so ist  $P(U) \rightarrow P'(U)$  nicht null für ein Objekt  $U$  in  $\mathcal{X}$ .

(b) Entsprechendes gilt in  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ .

**Lemma 5.10**  $Pr(\mathcal{X})$  und  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  erfüllen (AB5).

**Beweis** Für  $Pr(\mathcal{X})$  sind (AB3) und (AB5) klar nach (dem Beweis von) Satz 4.3 (a), (da diese Aussagen in  $Ab$  gelten), und es folgt aus 5.8 (a), dass  $(\mathbb{Z}_U)_{U \in \mathcal{X}}$  eine Familie von Generatoren bildet.

Für  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  gilt ebenfalls (AB3) (beliebige Limiten und Kolimiten existieren nach 4.3(a)), und (AB5) folgt aus der expliziten Beschreibung der Kolimiten im Beweis von 4.3 (a) und der Exaktheit des Funktors  $P \mapsto aP$  (siehe 4.3 (c)). Damit ist Proposition 5.1 bewiesen.

**Definition 5.11** Sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Situs und  $U$  ein Objekt in  $\mathcal{X}$ . Der Funktor

$$\begin{array}{ccc} H^i(U, -) := H^i(U, \mathcal{T}; -) & : & Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \rightarrow Ab \\ & & F \mapsto H^i(U, F) \end{array}$$

ist die  $i$ -te Rechtsabbildung (siehe Vorlesung Alg. Geo. III, WS 12/13, Kap. 6) des linksexakten Funktors

$$F \mapsto F(U) =: \Gamma(U, F) =: H^0(U, F).$$

$H^i(U, F)$  heißt die  $i$ -te Kohomologie von  $F$  auf  $U$  (oder  $i$ -te Kohomologiegruppe auf  $U$  mit Koeffizienten in  $F$ ).

Nach Konstruktion ist also  $H^i(U, F) = H^i(I(U))$ , wobei  $F \hookrightarrow I$  eine injektive Auflösung von  $F$  in  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ist.

**Beispiel 5.12** Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $F$  eine Garbe auf  $X$ , so ist  $H^i(X, F)$  die übliche Garbenkohomologie auf  $X$ .

**Definition 5.13** Sei  $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Morphismus von Siten. Dann ist  $R^i f_*$  die  $i$ -te Rechtsableitung des linksexakten Funktors

$$f_* : Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})).$$

$R^i f_* F$  heißt das  $i$ -te höhere direkte Bild von  $F$ .

Hier ist also  $R^i f_* F = \mathcal{H}^i(f_* I)$ , wobei  $F \hookrightarrow I$  eine injektive Auflösung in  $Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$  ist.

**Bemerkung 5.14** (a) Nach allgemeinen Eigenschaften von rechtsabgeleiteten Funktoren (siehe Alg. Geo. III, WS 12/13, Satz 6.25) hat man für jede kurze exakte Sequenz

$$(5.14.1) \quad 0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

von Garben auf  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  und jedes Objekt  $U$  in  $\mathcal{X}$  eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(U, F') & \rightarrow & H^0(U, F) & \rightarrow & H^0(U, F'') & \xrightarrow{\delta} & H^1(U, F') \\ \dots & \rightarrow & H^n(U, F') & \rightarrow & H^n(U, F) & \rightarrow & H^n(U, F'') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(U, F') & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Diese ist funktoriell in  $U$  und funktoriell in den kurzen exakten Sequenzen (5.14.1).

(b) Entsprechend erhält man für jeden Morphismus von Siten  $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  und jede kurze exakte Sequenz von Garben auf  $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$

$$(5.14.2) \quad 0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$$

eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow R^n f_* G' \rightarrow R^n f_* G \rightarrow R^n f_* G'' \xrightarrow{\delta} R^{n+1} f_* G' \rightarrow \dots$$

Diese ist funktoriell in den kurzen exakten Sequenzen (5.14.2).

**Satz 5.15** (a) Sei  $F$  eine abelsche Garbe auf  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ . Für jeden Morphismus  $\alpha : V \rightarrow U$  in  $\mathcal{X}$  hat man kanonische Restriktionshomomorphismen

$$(5.15.1) \quad \alpha^* : H^i(U, F) \rightarrow H^i(V, F) \quad (i \geq 0),$$

die für  $i = 0$  mit der Restriktion  $F(U) \rightarrow F(V)$  übereinstimmen, funktoriell in  $F$  sind, und mit den exakten Sequenzen aus 5.14 (a) verträglich sind (d.h., auch verträglich mit Verbindungsmorphismen).

(b) Hierdurch erhalten wir eine abelsche Prägarbe

$$\underline{H}^i(F) : U \mapsto H^i(U, F)$$

für jedes  $i \geq 0$ .

**Beweis** Ist  $F \hookrightarrow I$  eine injektive Auflösung, so haben wir einen Homomorphismus von Komplexen

$$I(U) \rightarrow I(V),$$

und die Abbildungen (5.15.1) entstehen durch Übergang zur Kohomologie. Es folgt sofort, dass man für einen weiteren Morphismus  $\beta : W \rightarrow V$  die Beziehung  $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$  hat, wegen der Transitivität der Restriktionen für  $I$ . Weiter gilt  $id_V^* = id$ , so dass wir (b) erhalten. Die weiteren Funktorialitäten in (a) sind ebenfalls aus der Konstruktion klar: Für einen Morphismus von Garben  $F \rightarrow G$  finden wir einen Morphismus

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & J \\ \uparrow & & \uparrow \\ F & \hookrightarrow & I \end{array}$$

von injektiven Auflösungen, der nach Definition die Funktorialität der Kohomologie liefert, nämlich die kanonischen Morphismen  $H^i(U, F) = H^i(I(U)) \rightarrow H^i(J(U)) = H^i(U, G)$ . Dies zeigt die Verträglichkeit mit  $\alpha^*$ . Der Fall der exakten Sequenzen, die aus einem exakten Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & I' & \longrightarrow & J' & \longrightarrow & K' \longrightarrow 0 \end{array}$$

von Auflösungen folgen, ist analog.

**Satz 5.16** Sei  $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Morphismus von Siten. Für jede Garbe  $F \in Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$  und jedes  $i \geq 0$  ist  $R^i f_* F$  die Garbe, die zur Prägarbe

$$U \mapsto H^i(f^0(U), F)$$

auf  $\mathcal{X}'$  assoziiert ist.

**Beweis** Sei  $F \hookrightarrow I$  eine injektive Auflösung in  $Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$ . Dann ist  $R^i f_* F = \mathcal{H}^i(f_* I)$  die Garbe, die zum Prägarben-Quotienten

$$\begin{aligned} U \mapsto & \ker^P(f_* I^i \rightarrow f_* I^{i+1})(U) / \operatorname{im}^P(f_* I^{i-1} \rightarrow f_* I)(U) \\ & \parallel \\ & \ker(I^i(f^0(U)) \rightarrow I^{i+1}(f^0(U))) / \operatorname{im}(I^{i-1}(f^0(U)) / I^i(f^0(U))) \\ & \parallel \\ & H^i(f^0(U), F) \end{aligned}$$

assoziiert ist.

## 6 Spektralsequenzen

Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie.

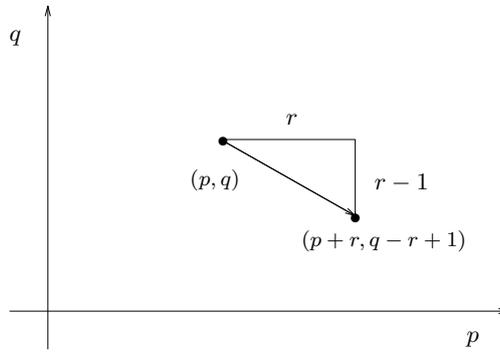
**Definition 6.1** Eine Spektralsequenz in  $\mathcal{A}$

$$E_1^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$$

besteht aus

- (a) Objekten  $E_1^{p,q}$  in  $\mathcal{A}$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,
- (b) Subquotienten  $E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$  von  $E_1^{p,q}$  für alle  $r \geq 2$ ,
- (c) Morphismen (genannt die **Differentiale** der Spektralsequenz)

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1},$$



so dass

$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker(d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-1})}{\text{im}(d_r^{p-r, q+r-1} : E_r^{p-r, q+r-1} \rightarrow E_r^{p,q})},$$

- (d) Subquotienten  $E_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q}/B_\infty^{p,q}$  von  $E_1^{p,q}$ , so dass

$$B_r^{p,q} \subseteq B_\infty^{p,q} \subseteq Z_\infty^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}$$

für alle  $r \geq 1$  (also  $E_\infty^{p,q}$  “kleiner als  $E_r^{p,q}$  für alle  $r \geq 1$ ”),

- (e) Objekten  $(E^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  in  $\mathcal{A}$  mit absteigenden Filtrierungen

$$E^n \supseteq \dots \supseteq F^p E^n \supseteq F^{p+1} E^n \supseteq \dots$$

und Isomorphismen

$$E_\infty^{p,q} \xrightarrow{\sim} F^p E^{p+q} / F^{p+1} E^{p+q}$$

für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

**Definition 6.2** Die Spektralsequenz heißt endlich konvergent, wenn es für jedes  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  gilt

$$E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q} \quad \text{für } r \gg 0,$$

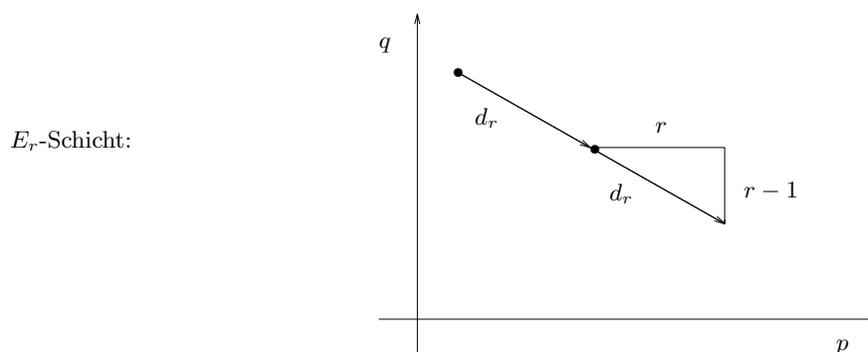
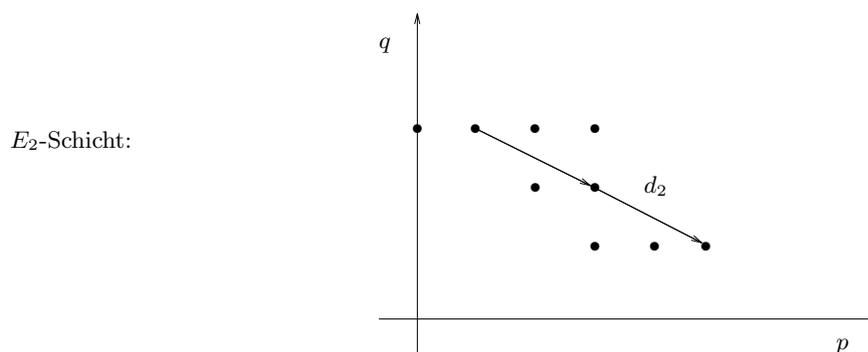
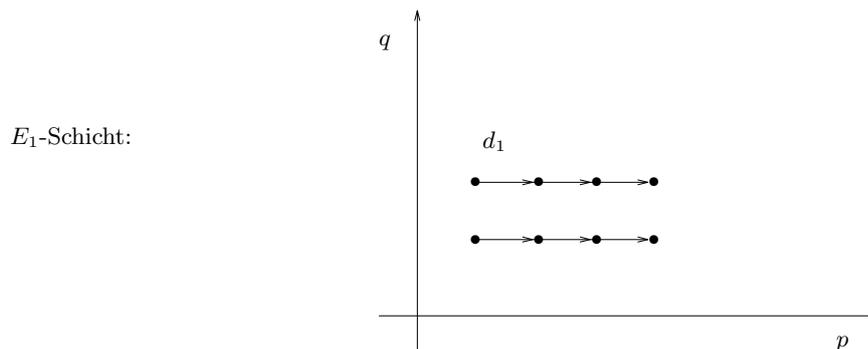
und wenn für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  die Filtrierung  $F^p E^n$  endlich ist, d.h.,

$$F^p E^n = \begin{cases} 0 & \text{für } p \gg 0, \\ E^n & \text{für } p \ll 0. \end{cases}$$

Manche Spektralsequenzen beginnen auch mit  $E_2^{p,q}$ ; dann gibt es keine  $E_1^{p,q}$ , und alle  $E_r^{p,q}$  sind Subquotienten von  $E_2^{p,q}$ .

Wir erklären nun einiges zum Arbeiten mit Spektralsequenzen.

1) Die Schichten: Für jedes  $r$  betrachtet man die  $E_r$ -Schicht aller Terme  $E_r^{p,q}$  und ihrer Differentiale

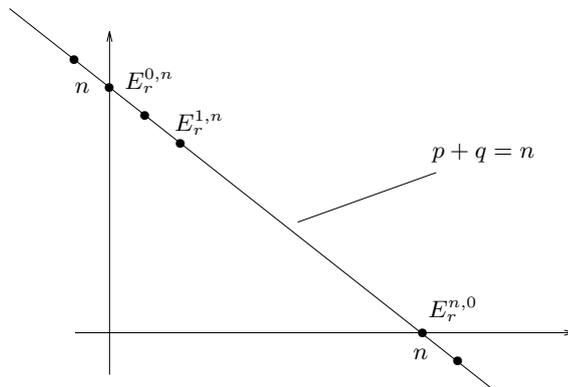


Es ist  $d_r d_r = 0$  und  $E_{r+1} = \ker d_r / \text{im } d_r$ .

2) Limes/Konvergenz: Sei

$$E_1^{p,q} \Rightarrow E^{p+q} \quad (\text{oder } E_2^{p,q} \Rightarrow E^{p+q})$$

eine endlich konvergente Spektralsequenz. Wir erhalten das folgende Bild:



Die Terme, die zu  $E^n$  beitragen, stehen auf der Geraden  $p+q=n$ . Wir haben eine (endliche) Filtrierung

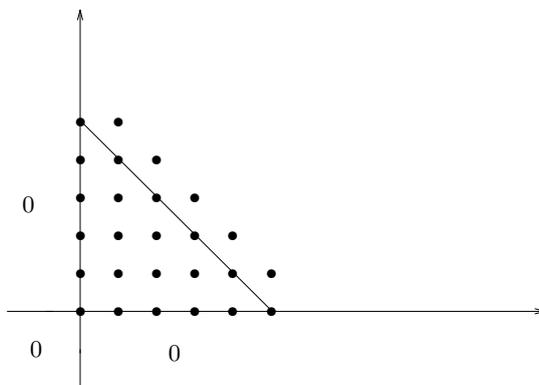
$$E^n \supseteq \dots \supseteq F^p E^n \supseteq F^{p+1} E^n \supseteq \dots$$

und

$$F^p E^n / F^{p+1} E^n = E_\infty^{p,q} \quad , \quad p+q=n.$$

Links steht ein Subquotient von  $E^n$ , rechts steht ein Subquotient von  $E_1^{p,q}$ ; weiter ist  $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q}$  für  $r \gg 0$ .

3) Spektralsequenzen im 1. Quadranten: Sei  $E_1^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$  (bzw.  $E_2^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$ ) eine endlich konvergente Spektralsequenz mit  $E_1^{p,q} = 0$  (bzw.  $E_2^{p,q} = 0$ ) für  $p < 0$  oder  $q < 0$ .



**Lemma/Definition 6.3** (a) Es ist  $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q}$  für  $r > \max(p, q+1)$ .

(b) Für  $E_1^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$  gibt es kanonische Morphismen

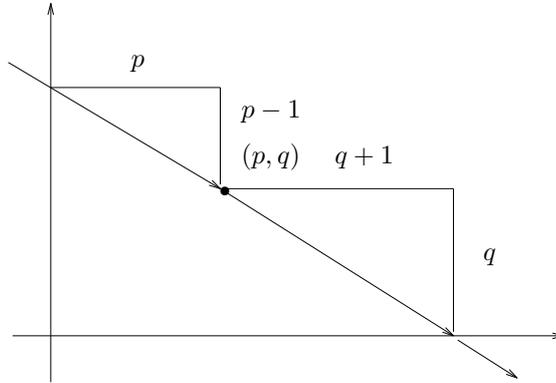
$$\begin{array}{ccc} E^n & \xrightarrow{e} & E_1^{0,n} \\ E_1^{n,0} & \xrightarrow{e} & E^n. \end{array}$$

Diese heißen Kantenmorphismen (edge morphisms).

(c) Für  $E_2^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$  gibt es kanonische Kantenmorphisimen

$$\begin{array}{ccc} E^n & \xrightarrow{e} & E_2^{0,n} \\ E_2^{n,0} & \xrightarrow{e} & E^n \end{array}$$

**Beweis** (a):



Ist  $r > q + 1$ , so wird das aus  $E_r^{p,q}$  ausgehende Differential  $d_r^{p,q}$  null (weil es in 0 landet). Ist  $r > p$ , so ist das in  $E_r^{p,q}$  einlaufende Differential (explizit:  $d_r^{p-r, q+r-1}$ ) null. Gilt beides, so ist  $E_{r+1}^{p,q} = \ker d_r / \text{im } d_2 = E_r^{p,q} / 0 = E_r^{p,q}$ . Da dies für alle höheren  $r$  gilt (und die Spektralsequenz konvergiert), ist  $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ .

(b): Ist  $E_\infty^{p,q} = 0$  für  $p < 0$ , so ist (wegen der Konvergenz)  $E^n = F^0 E^n$  und

$$E_{r+1}^{0,n} = \ker(E_r^{0,n} \xrightarrow{d_r^{0,n}} E_r^{r, n-r+1}) \subseteq E_r^{0,n}$$

für alle  $r$ , also  $E_\infty^{0,n} \subseteq E_1^{0,n}$ . Wir erhalten

$$e : E^n \rightarrow F^0 E^n / F^1 E^n \cong E_\infty^{0,n} \hookrightarrow E_1^{0,n}.$$

Ist  $E_\infty^{p,q} = 0$  für  $q < 0$ , so ist wegen der Konvergenz  $F^{n+1} E^n = 0$  und  $E_{r+1}^{n,0} = \text{coker}(E_r^{n-r, r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{n,0})$  ein Quotient von  $E_r^n$ . Also haben wir  $E_1^{n,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{n,0}$  und einen Morphismus

$$e : E_1^{n,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{n,0} \cong F^n E^n / F^{n+1} E \hookrightarrow E^n.$$

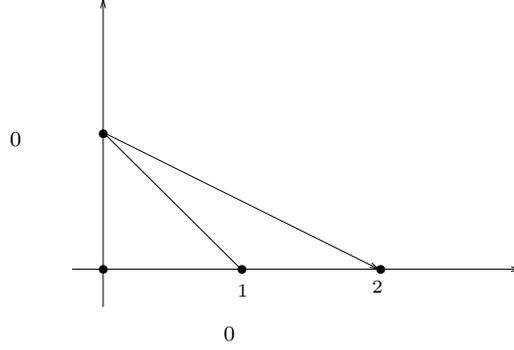
(c) ist analog.

**Lemma 6.4** (Exakte Sequenz der niedrigen Terme) Sei  $E_1^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$  (oder  $E_2^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$ ) eine endlich konvergente Spektralsequenz im 1. Quadranten. Dann hat man eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \xrightarrow{e} E^1 \xrightarrow{e} E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \xrightarrow{e} E^2,$$

wobei  $e$  immer den Kantenmorphisimus bezeichnet.

**Beweis** Das Bild



(oder der Beweis von 6.5 (a)) zeigt

$$E_\infty^{1,0} = E_2^{0,1}, \quad E_\infty^{0,1} = \ker d_2^{0,1}, \quad E_\infty^{2,0} = \operatorname{coker} d_2^{0,1}.$$

Hieraus erhalten wir exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{e} E^1 \rightarrow \ker d_2^{0,1} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \ker d_2^{0,1} \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \rightarrow E_\infty^{2,0}$$

und durch Zusammensetzen und Komposition mit  $E_\infty^{2,0} \subseteq E^2$  die behauptete Sequenz.

**Satz 6.5** (a) Sei  $A^*$  ein Komplex in  $\mathcal{A}$ , und sei  $F^p A^*$  eine absteigende Filtrierung durch Unterkomplexe. Dann gibt es eine Spektralsequenz

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p A^* / F^{p+1} A^*) \Rightarrow E^{p+q} = H^n(A^*).$$

(b) Ist die Filtrierung  $F^p$  biregulär, d.h.,

$$F^p A^n = \begin{cases} 0 & \text{für } p \gg 0, \\ A^n & \text{für } p \ll 0 \end{cases}$$

für jedes  $n \in \mathbb{Z}$ , so ist die Spektralsequenz endlich konvergent.

(c) Das  $E_1$ -Differential

$$d_1^{p,q} : E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p A^* / F^{p+1} A^*) \rightarrow H^{p+q+1}(F^{p+1} A^* / F^{p+2} A^*) = E_1^{p+1,q}$$

ist der Verbindungshomomorphismus zur exakten Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow F^{p+1} A^* / F^{p+2} A^* \rightarrow F^p A^* / F^{p+2} A^* \rightarrow F^p A^* / F^{p+1} A^* \rightarrow 0.$$

**Beweis** (a): Für  $r \geq 1$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q := n - p$  setze

$$F^p H^n(A^*) = \operatorname{im}(H^n(F^p A^*) \rightarrow H^n(A^*))$$

sowie

$$\begin{array}{ccc}
Z_r^{p,q} = & \text{im}(H^n(F^p A^*/F^{p+r} A^*) \xrightarrow{\alpha^{p,r}} H^n(F^p A^*/F^{p+1} A^*)) = E_1^{p,q} & \\
\uparrow & \uparrow & \parallel \\
Z_\infty^{p,q} = & \text{im}(H^n(F^p A^*) \xrightarrow{\alpha^p} H^n(F^p A^*/F^{p+1} A^*)) & \\
\uparrow & \uparrow \delta & \parallel \\
B_\infty^{p,q} = & \text{im}(H^{n-1}(A^*/F^p A^*) \xrightarrow{\delta^p} H^n(F^p A^*/F^{p+1} A^*)) & \\
\uparrow & \uparrow & \parallel \\
B_r^{p,q} = & \text{im}(H^{n-1}(F^{p-r+1} A^*/F^p A^*) \xrightarrow{\delta^{p,r}} H^n(F^p A^*/F^{p+1} A^*)) & 
\end{array}$$

Hier werden die Morphismen  $\alpha$ ,  $\alpha^{p,r}$  und das obere kommutative Diagramm durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
F^p/F^{p+r} & \xrightarrow{\alpha^{p,r}} & F^p/F^{p+1} \\
\uparrow & & \parallel \\
F^p & \xrightarrow{\alpha^p} & F^p/F^{p+1}
\end{array}$$

induziert, wobei wir  $F^m$  für  $F^m A^*$  schreiben.

Die Verbindungshomomorphismen  $\delta$ ,  $\delta^p$  und  $\delta^{p,r}$  sowie die weiteren kommutativen Diagramme werden durch die folgenden kommutativen Diagramme und die zugehörigen langen exakten Kohomologiesequenzen induziert:

$$\begin{array}{ccccccc}
\delta : & 0 & \longrightarrow & F^p & \longrightarrow & A^* & \longrightarrow & A^*/F^p & \longrightarrow & 0 \\
& & & \downarrow \alpha^p & & \downarrow & & \parallel & & \\
\delta^p : & 0 & \longrightarrow & F^p/F^{p+1} & \longrightarrow & A^*/F^{p+1} & \longrightarrow & A^*/F^p & \longrightarrow & 0 \\
& & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\delta^{p,r} : & 0 & \longrightarrow & F^p/F^{p+1} & \longrightarrow & F^{p-r+1}/F^{p+1} & \longrightarrow & F^{p-r+1}/F^p & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Wir erhalten kommutative Diagramme mit exakten Zeilen

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc}
H^n(F^p/F^{p+r+1}) & \longrightarrow & H^n(F^p/F^{p+r}) & \xrightarrow{\delta^{p+r,r+1}} & H^{n+1}(F^{p+r}/F^{p+r+1}) \\
\parallel & & \downarrow \alpha^{p,r} & \searrow \beta & \downarrow \gamma \\
H^n(F^p/F^{p+r+1}) & \xrightarrow{\alpha^{p,r+1}} & H^n(F^p/F^{p+1}) & \longrightarrow & H^{n+1}(F^{p+1}/F^{p+r+1})
\end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc}
H^n(F^{p+1}/F^{p+r}) & \longrightarrow & H^n(F^p/F^{p+r}) & \xrightarrow{\alpha^{p,r}} & H^n(F^p/F^{p+1}) \\
\parallel & & \downarrow \delta^{p+r,r+1} & \searrow \beta & \downarrow \\
H^n(F^{p+1}/F^{p+r}) & \xrightarrow{\delta^{p+r,r}} & H^{n+1}(F^{p+r}/F^{p+r+1}) & \xrightarrow{\gamma} & H^{n+1}(F^{p+1}/F^{p+r+1})
\end{array}$$

Aus (1) folgt  $Z_{r+1}^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q}$ , und aus (2) folgt (durch Umm nummerieren  $p+r \rightsquigarrow p$ )  $B_r^{p,q} \subseteq B_{r+1}^{p,q}$ .

Damit folgt insgesamt

$$0 = B_1^{p,q} \subseteq \dots \subseteq B_r^{p,q} \subseteq B_{r+1}^{p,q} \subseteq \dots \subseteq B_\infty^{p,q} \subseteq Z_\infty^{p,q} \subseteq \dots \subseteq Z_{r+1}^{p,q} \subseteq Z_r^{p,q} \subseteq \dots \subseteq Z_1^{p,q} = E_1^{p,q}$$

Wir benutzen nun das folgende Lemma

**Lemma 6.6** Ist

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \nearrow & \downarrow \varphi & \searrow \psi & \\ A' & \xrightarrow{\varphi'} & A & \xrightarrow{\eta} & A'' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in  $\mathcal{A}$ , mit exakter Zeile, so ist  $\text{im}(\varphi') \subseteq \text{im}(\varphi)$ , sowie kanonisch

$$\text{im}(\varphi)/\text{im}(\varphi') \cong \text{im}(\psi).$$

**Beweis:** Die erste Behauptung ist klar, und wegen  $\ker \eta = \text{im} \varphi' \subseteq \text{im} \varphi$  induziert  $\eta$  einen Isomorphismus

$$\text{im} \varphi / \text{im} \varphi' = \text{im} \varphi / \ker \eta \xrightarrow{\sim} \eta(\text{im} \varphi) = \text{im}(\eta\varphi) = \text{im} \psi.$$

Durch Anwendung von 6.6 folgt nun ein Isomorphismus

$$\delta_r^{p,q} : Z_r^{p,q}/Z_{r+1}^{p,q} = \text{im} \alpha^{p,r} / \text{im} \alpha^{p,r+1} \stackrel{(1)}{\cong} \text{im} \beta \stackrel{(2)}{\cong} \text{im} \delta^{p+r,r+1} / \text{im} \delta^{p+r,r} = B_{r+1}^{p+r,q-r+1} / B_r^{p+r,q-r+1}.$$

Damit definieren wir die Differentiale

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} = Z_r^{p,q} / B_r^{p,q} \twoheadrightarrow Z_r^{p,q} / Z_{r+1}^{p,q} \xrightarrow[\sim]{\delta_r^{p,q}} B_{r+1}^{p+r,q-r+1} / B_r^{p+r,q-r+1} \hookrightarrow Z_r^{p+r,q-r+1} / B_r^{p+r,q-r+1}.$$

Es folgt

$$\ker d_r^{p,q} = Z_{r+1}^{p,q} / B_r^{p,q} \quad , \quad \text{im} d_r^{p,q} = B_{r+1}^{p+r,q-r+1} / B_r^{p+r,q-r+1}$$

und damit

$$\frac{\ker d_r^{p,q}}{\text{im} d_r^{p-r,q+r-1}} = \frac{Z_{r+1}^{p,q}}{B_{r+1}^{p,q}} = E_{r+1}^{p,q}.$$

Schließlich ergeben die kommutativen Diagramme mit exakten Zeilen

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} & & H^n(F^p) & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow \rho & \\ H^n(F^{p+1}) & \longrightarrow & H^n(A^*) & \longrightarrow & H^n(A^*/F^{p+1}) \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{ccccc} H^{n-1}(A^*/F^p) & \xrightarrow{\delta} & H^n(F^p) & \longrightarrow & H^n(A^*) \\ \parallel & & \downarrow \alpha^p & \searrow \rho & \downarrow \\ H^{n-1}(A^*/F^p) & \xrightarrow{\delta^p} & H^n(F^p/F^{p+1}) & \longrightarrow & H^n(A/F^{p+1}) \end{array}$$

zusammen mit Lemma 6.6 die Beziehungen  $F^{p+1}H^n(A^*) \subseteq F^pH^n(A^*)$  sowie

$$E_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q} / B_\infty^{p,q} = \text{im} \alpha^p / \text{im} \delta^p \stackrel{(4)}{\cong} \text{im} \rho \stackrel{(3)}{\cong} F^pH^n(A^*) / F^{p+1}H^n(A^*).$$

Damit sind alle Eigenschaften einer Spektralsequenz gezeigt.

(b): Die Zusatzbehauptung über die Konvergenz ist klar, da die  $n$ -te Kohomologie eines Komplexes  $C^*$  nur von  $C^{n-1} \rightarrow C^n \rightarrow C^{n+1}$  abhängt.

(c): Für  $r = 1$  lauten die Diagramme (1) und (2)

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} H^n(F^p/F^{p+2}) & \longrightarrow & H^n(F^p/F^{p+1}) & \xrightarrow{\delta^{p+1,2}} & H^{n+1}(F^{p+1}/F^{p+2}) \\ \parallel & & \downarrow \alpha^{p,1} & \searrow \beta & \parallel \\ H^n(F^p/F^{p+2}) & \xrightarrow{\alpha^{p,2}} & H^n(F^p/F^{p+1}) & \xrightarrow{\delta^{p+1,2}} & H^{n+1}(F^{p+1}/F^{p+2}) \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} 0 = & H^n(F^{p+1}/F^{p+1}) & \longrightarrow & H^n(F^p/F^{p+1}) & \xrightarrow{\alpha^{p,1}} & H^n(F^p/F^{p+1}) \\ & \parallel & & \downarrow \delta^{p+1,2} & \searrow \beta & \downarrow \\ 0 = & H^n(F^{p+1}/F^{p+1}) & \xrightarrow{\delta^{p+1,1}} & H^{n+1}(F^{p+1}/F^{p+2}) & \xrightarrow{\cong} & H^{n+1}(F^{p+1}/F^{p+2}) \end{array}$$

Aus der Definition von  $d_1^{p,q}$  (mit  $p+q=n$ ) folgt nun, dass  $d_1^{p,q} = \delta^{p+1,2}$ , also der Verbindungshomomorphismus zur exakten Sequenz

$$0 \rightarrow F^{p+1}/F^{p+2} \rightarrow F^p/F^{p+2} \rightarrow F^p/F^{p+1} \rightarrow 0,$$

wie behauptet, denn wegen der Gleichheiten in den obigen Diagrammen ist  $d_1^{p,q} = \beta = \delta^{p+1,2}$ .

Ein wichtiges Beispiel für Spektralsequenzen ist:

**Satz 6.7** (Grothendieck-Leray-Spektralsequenz) Seien  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  links-exakte Funktoren zwischen abelschen Kategorien, wobei  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  genügend viele Injektive haben und  $F$  Injektive in  $G$ -azyklische abbildet. Dann gibt es für jedes Objekt  $X$  in  $\mathcal{A}$  eine endlich konvergente Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = R^p G(R^q F X) \Rightarrow R^{p+q}(G \circ F) X$$

Der Beweis erfordert einige Vorüberlegungen.

**Definition 6.8** (a) Ein naiver Doppelkomplex  $C^{*,*}$  in  $\mathcal{A}$  ist ein *kommutatives* Diagramm von Objekten  $C^{p,q} \in \mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & C^{p-1,q+1} & \longrightarrow & C^{p,q+1} & \xrightarrow{d_I^{p,q+1}} & C^{p+1,q+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \dots & \longrightarrow & C^{p-1,q} & \xrightarrow{d_I^{p-1,q}} & C^{p,q} & \xrightarrow{d_I^{p,q}} & C^{p+1,q} & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \dots & \longrightarrow & C^{p-1,q-1} & \longrightarrow & C^{p,q-1} & \longrightarrow & C^{p+1,q-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \end{array}$$

(b) Ein Doppelkomplex in ein entsprechendes Diagramm, in dem alle Quadrate *antikommutativ* sind, d.h., es ist  $d_I^{p,q+1} d_{II}^{p,q} + d_{II}^{p+1,q} d_I^{p,q} = 0$  für alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

(c) Der assoziierte Doppelkomplex zu einem naiven Doppelkomplex wie in (a) ist der Doppelkomplex, in dem  $d_{II}^{p,q}$  durch  $(-1)^p d_{II}^{p,q}$  ersetzt wird.

(d) Gibt es ein  $N \in \mathbb{Z}$  mit  $C^{p,q} = 0$  für  $p < N$  oder  $q < N$ , so ist der assoziierte totale Komplex zu einem Doppelkomplex der Komplex  $Tot(C^{*,*})$  mit Komponenten

$$Tot(C^{*,*})^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q}$$

und Differential

$$d = d_I + d_{II},$$

$$\text{d.h. } d|_{C^{p,q}} = d_I^{p,q} + d_{II}^{p,q}.$$

Die folgende Konstruktion ist sehr wichtig für die Behandlung und Definition von Spektralsequenzen.

**Konstruktion 6.9** Sei  $Tot(I^{*,*})$  der totale Komplex assoziiert zum Doppelkomplex, der assoziiert zum naiven Doppelkomplex  $I^{*,*}$  ist. Dieser besitzt zwei absteigende Filtrierungen:

$$(6.9.1) \quad F_I^p Tot(I^{*,*})^n = \bigoplus_{\substack{r+s=n \\ r \geq p}} I^{r,s}, \quad \text{und}$$

$$(6.9.2) \quad F_{II}^p Tot(I^{*,*})^n = \bigoplus_{\substack{r+s=n \\ s \geq q}} I^{r,s}.$$

Die entsprechenden Spektralsequenzen nach Satz 6.5 lauten wegen

$$F_I^p Tot(I^{*,*}) / F_I^{p+1} Tot(I^{*,*}) = I^{p,*}[-p]$$

und

$$F_{II}^p Tot(I^{*,*}) / F_{II}^{q+1} Tot(I^{*,*}) = I^{*,q}[-q]$$

für die erste Filtrierung

$${}_I E_1^{p,q} = H^{p+q}(I^{p,*}[-p]) = H^q(I^{p,*}) \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(Tot(I^{*,*})),$$

und für die zweite Filtrierung

$${}_{II} E_1^{p,q} = H^{p+q}(I^{*,q}[-q]) = H^p(I^{*,q}) \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(Tot(I^{*,*})).$$

Das  $d_1$ -Differential der Spektralsequenz  ${}_I E_1^{p,q} \Rightarrow E^{p+q}$  ist der Morphismus

$${}_I E_1^{p,q} = H^q(I^{p,*}) \rightarrow H^q(I^{p+1,*}) = {}_I E_1^{p+1,q},$$

der durch den Morphismus von Komplexen

$$d_I^{p,*} : I^{p,*} \rightarrow I^{p+1,*}$$

induziert wird. Nach 6.5 (c) ist nämlich für einen filtrierten Komplex  $(A^*, F^p A^*)$  wie in 6.5 das  $d_1$ -Differential

$$d_1^{p,q} : E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p A^* / F^{p+1} A^*) \rightarrow H^{p+q+1}(F^{p+1} A^* / F^{p+2} A^*) = E_1^{p+1,q}$$

der Verbindungsmorphismus zur exakten Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow F^{p+1}/F^{p+2} \rightarrow F^p/F^{p+2} \rightarrow F^p/F^{p+1} \rightarrow 0.$$

In unserer Situation lautet die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F^{p+1}/F^{p+2} & \longrightarrow & F^p/F^{p+2} & \longrightarrow & F^p/F^{p+1} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & I^{p+1,*}[-p-1] & \xrightarrow{\alpha} & \text{Tot} \left( \begin{array}{c} I^{p+1,*}[-p-1] \\ \uparrow d_{II}^{p,*} \\ I^{p,*}[-p-1] \end{array} \right) & \xrightarrow{\beta} & I^{p,*}[-p] \longrightarrow 0, \end{array}$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  die offensichtlichen Morphismen sind.

Ausgeschrieben erhalten wir eine exakte Sequenz von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^{p+1,q+1} & \longrightarrow & I^{p+1,q+1} \oplus I^{p,q+2} & \longrightarrow & I^{p,q+2} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow (-1)^{p+1} d_{II} & & \uparrow d & & \uparrow (-1)^p d_{II} \\ 0 & \longrightarrow & I^{p+1,q} & \longrightarrow & I^{p+1,q} \oplus I^{p,q+1} & \longrightarrow & I^{p,q+1} \longrightarrow 0, \end{array}$$

$$a \longmapsto (a, 0), (a, b) \longmapsto b$$

wobei der mittlere Pfeil, in Elementen ausgedrückt, die Zuordnung

$$(a, b) \mapsto ((-1)^{p+1} d_{II} a + d_I b, (-1)^p d_{II} b)$$

ist. Nach der Standard-Beschreibung des Verbindungsmorphismus ( $b \in I^{p,q+1}$  mit  $d_{II} b = 0$  wird zu  $(0, b) \in I^{p+1,q} \oplus I^{p,q+1}$  geliftet, unter  $d$  auf  $(d_I b, 0)$  abgebildet, welches das Bild von  $d_I b \in I^{p+1,q+1}$  ist) sehen wir, dass dieser die Klasse von  $b$  auf die Klasse von  $d_I b$  abbildet, also durch  $d_I$  induziert ist wie behauptet. Die analogen Aussagen gelten für die zweite Spektralsequenz.

Als nächstes erinnern wir an das bekannte

**Lemma 6.10** Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz in  $\mathcal{A}$ . Hat  $\mathcal{A}$  genügend viele Injektive, so gibt es zu gegebenen injektiven Auflösungen

$$A \hookrightarrow I^* \text{ und } C \hookrightarrow K^*$$

eine exakte Sequenz von injektiven Auflösungen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & J^* & \longrightarrow & K^* \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0, \end{array}$$

die gradweise zerfällt.

**Beweis:** Man beginnt mit einem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^0 \oplus K^0 & \longrightarrow & K^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \alpha & \searrow \beta & \uparrow (\beta, \gamma) & & \uparrow \gamma \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0,
 \end{array}$$

in dem  $\beta$  eine Fortsetzung von  $\alpha$  auf  $B$  ist (diese existiert, da  $I^0$  injektiv ist). Dann sieht man leicht, dass der mittlere Pfeil  $(\beta, \gamma)$  ein Monomorphismus ist. Nach dem Schlangenlemma ist die Sequenz

$$0 \rightarrow A^1 \rightarrow B^1 \rightarrow C^1 \rightarrow 0$$

der Cokerne von  $\alpha$ ,  $(\beta, \gamma)$  und  $\gamma$  exakt, und man fährt fort mit  $A^1 \hookrightarrow I^1$  und  $C^1 \hookrightarrow K^1$ , usw.

Wir erhalten hieraus induktiv:

**Satz 6.11** (Cartan-Eilenberg-Auflösung) Ist  $A^*$  ein nach unten beschränkter Komplex in  $\mathcal{A}$ , etwa  $A^n = 0$  für  $n < N$ , so gibt es einen naiven Doppelkomplex  $(I^{*,*}, d_I, d_{II})$  mit  $I^{p,q} = 0$  für  $p < N$  und  $q < 0$  und einem Morphismus von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccc}
 I^{N,0} & \xrightarrow{d^{N,0}} & I^{N+1,0} & \xrightarrow{d^{N+1,0}} & I^{N+2,0} & \longrightarrow & \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 A^N & \xrightarrow{d^N} & A^{N+1} & \xrightarrow{d^{N+1}} & A^{N+2} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

so dass gilt:

- (a) Für alle  $p$  ist  $A^p \hookrightarrow I^{p,*}$  eine injektive Auflösung.
- (b) Für alle  $p$  sind  $ZA^p \hookrightarrow ZI^{p,*}$ ,  $BA^p \hookrightarrow BI^{p,*}$  und  $H^p(A^*) \rightarrow H_I^p(I^{*,*})$  injektive Auflösungen. Hierbei sei  $H_I^p(I^{*,*}) = H^p((I^{*,*}, d_I)) =$  Kohomologie von  $I^{p-1,*} \xrightarrow{d_I} I^{p,*} \xrightarrow{d_I} I^{p+1,*}$ ,  $ZA^p = \ker(A^p \rightarrow A^{p+1})$ ,  $BA^p = \text{im}(A^{p-1} \rightarrow A^p)$ ,  $ZI^{p,*} = \ker(I^{p,*} \xrightarrow{d_I} I^{p+1,*})$  und  $BI^{p,*} = \text{im}(I^{p-1,*} \xrightarrow{d_I} I^{p,*})$ , so dass  $H_I^p(I^{*,*}) = ZI^{p,*}/BI^{p,*}$ .

**Beweis** Ohne Einschränkung sei  $A^n = 0$  für  $n < 0$ . Dann haben wir eine Kette von Morphismen

$$ZA^0 \hookrightarrow A^0 \rightarrow BA^1 \hookrightarrow ZA^1 \hookrightarrow A^1 \rightarrow BA^2 \hookrightarrow \dots$$

Wählen wir injektive Auflösungen  $ZA^0 \hookrightarrow ZI^{0,*}$  und  $BA^1 \hookrightarrow BI^{1,*}$ , so erhalten wir nach 6.9 eine exakte Sequenz von injektiven Auflösungen

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & ZI^{0,*} & \hookrightarrow & I^{0,*} & \longrightarrow & BI^{1,*} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & ZA^0 & \hookrightarrow & A^0 & \longrightarrow & BA^1 \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Wählen wir weiter eine injektive Auflösung  $H^1(A^*) \hookrightarrow HI^{1,*}$ , so finden wir nach 6.9 eine exakte Sequenz von injektiven Auflösungen

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & BI^{1,*} & \longrightarrow & ZI^{1,*} & \longrightarrow & HI^{1,*} \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & BA^1 & \hookrightarrow & ZA^1 & \longrightarrow & H^1(A^*) \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Nun wählen wir eine injektive Auflösung  $B^2A^* \hookrightarrow BI^{2,*}$  und erhalten eine exakte Sequenz von injektiven Auflösungen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & ZI^{1,*} & \longrightarrow & I^{1,*} & \longrightarrow & BI^{2,*} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & ZA^1 & \longrightarrow & A^1 & \longrightarrow & BA^2 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Wir können so fortfahren und erhalten einen naiven Doppelkomplex  $I^{*,*}$  mit einer Co-Argumentation

$$A^* \rightarrow I^{*,*}$$

die eine Auflösung von  $A^*$  in der Kategorie der Komplexe ist, wobei das erste Differential  $d_I$  durch die Komposition

$$d_I^{p,*} : I^{p,*} \rightarrow BI^{p+1,*} \hookrightarrow ZI^{p+1,*} \hookrightarrow I^{p+1,*}$$

gegeben wird, so dass tatsächlich  $BI^{p+1,*}$  das Bild von  $d_I^{p,*}$  und  $ZI^{p,*}$  der Kern von  $d_I^{p+1,*}$ , sowie  $HI^{p,*} = ZI^{p,*}/BI^{p,*} = H^p(I^{*,*}, d_I)$ .

Wir kommen nun zum **Beweis von Satz 6.7**. Seien  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  und  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  linksexakte Funktoren zwischen abelschen Kategorien mit genügend vielen Injektiven, wobei  $F$  Injektive auf  $G$ -azyklische Objekte abbildet.

Sei  $X$  ein Objekt in  $\mathcal{A}$  und  $X \hookrightarrow I^*$  eine injektive Auflösung. Für  $A^* = FI^*$  ist nach Definition  $H^n(A^*) = H^n(FI^*) = R^n F(A)$ .

Sei

$$\begin{array}{c} J^{*,*} \\ \uparrow \\ A^* \end{array}$$

eine Cartan-Eilenberg-Auflösung wie in Satz 6.11.

Wir betrachten die erste Spektralsequenz des Doppelkomplexes  $GJ^{*,*}$

$${}_I E_1^{p,q} = H^q(GJ^{p,*}) \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(Tot(J^{*,*})).$$

Da  $A^p = FI^p$   $G$ -azyklisch ist, ist  $H^q(GJ^{p,*}) = 0$  für  $q > 0$  und  $H^0(GJ^{p,*}) = \ker(GJ^{p,0} \xrightarrow{d_I} GJ^{p,1}) = GA^p$ . Hieraus folgt, dass die Kantenmorphismsen

$$R^n(GF)(X) = H^n(GFI^*) = H^n(GA^*) \rightarrow H^n(Tot(GJ^{*,*}))$$

alle Isomorphismen sind.

Wir betrachten die zweite Spektralsequenz für den Doppelkomplex  $GJ^{*,*}$ ,

$${}_{II} E_1^{p,q} = H^p(GJ^{*,q}) \Rightarrow E^{p,q} = H^{p,q}(Tot(GJ^{*,*}))$$

Es ist

$${}_{II} E_1^{p,q} = Z_I GJ^{p,q} / B_I GJ^{p,q} = G(Z_I J^{p,q} / B_I J^{p,q})$$

und nach Voraussetzung ist

$$R^n FX = H^n(A^*) \hookrightarrow H_I(J^{n,*})$$

eine injektive Auflösung. Daher ist

$${}_{II}E_2^{p,q} = H_{II}^q(GH_I(J^{n,*})) = R^p G(R^q FA)$$

und wir erhalten die gewünschte Grothendieck-Spektralsequenz.

## 7 Der étale Situs

**Definition 7.1** (a) Eine Klasse  $E$  von Morphismen von Schemata heiße **zulässig**, wenn gilt

(M1) Alle Isomorphismen sind in  $E$ ,

(M2)  $E$  ist abgeschlossen unter Kompositionen (sind  $\varphi : Y \rightarrow X$  und  $\psi : Z \rightarrow Y$  in  $E$ , so auch  $\psi \circ \varphi : Z \rightarrow X$ ),

(M3)  $E$  ist abgeschlossen unter Basiswechsel (Ist  $\varphi : Y \rightarrow X$  in  $E$  und  $\psi : X' \rightarrow X$  ein beliebiger Morphismus, so ist der Basiswechsel  $\varphi' : Y' = Y \times_X X' \rightarrow X'$  in  $E$ ).

(b) Sei  $E$  zulässig. Eine  $E$ -Überdeckung  $(U_i \xrightarrow{g_i} X)_{i \in I}$  eines Schemas  $X$  ist eine Familie von  $E$ -Morphismen (Morphismen in  $E$ ) mit  $\bigcup_i g_i(U_i) = X$ .

**Beispiele 7.2** Wichtige Beispiele von zulässigen Klassen sind

(a) die Klasse (Zar) aller offenen Immersionen,

(b) die Klasse (t) aller étalen Morphismen,

(c) die Klasse (fl) aller flachen Morphismen, die lokal von endlichen Typ sind.

**Bemerkung 7.3** Sind die betrachteten Schemata nicht lokal noethersch, so sollte man "von endlichem Typ" durch "von endlicher Präsentation" ersetzen, auch in der folgenden Erinnerung.

**Erinnerung 7.4** ('Kohomologie von Schemata', §3, §4) (a) Ein Morphismus  $f : Y \rightarrow X$  von Schemata heißt **unverzweigt**, wenn er die folgenden quivalenten Bedingungen erfüllt:

(i)  $f$  ist lokal von endlichem Typ,  $\mathfrak{m}_x \mathcal{O}_{Y,y} = \mathfrak{m}_y$ , wobei  $\mathcal{O}_{Y,y}$  und  $\mathcal{O}_{X,x}$  die lokalen Ringe bei  $y$  und  $x$  sind und  $\mathfrak{m}_y$  und  $\mathfrak{m}_x$  deren maximalen Ideale, und für alle  $y \in Y$  ist  $k(y)/k(x)$  eine endliche separable Körpererweiterung,  $x = f(y) \in X$ .

(ii)  $f$  ist lokal von endlichem Typ, und  $\Omega_{Y/X}^1 = 0$ .

(iii)  $f$  ist lokal von endlichem Typ, und die Diagonale  $\Delta_{Y/X} : Y \hookrightarrow Y \times_X Y$  ist eine offene Immersion.

(iv)  $f$  ist lokal von endlichem Typ und formal unverzweigt.

(b) Ein Morphismus  $f : Y \rightarrow X$  heißt **tale**, wenn er die folgenden quivalenten Bedingungen erfüllt:

(i)  $f$  ist flach und unverzweigt,

(ii)  $f$  ist lokal von endlichem Typ und formal tale.

**Lemma/Definition 7.5** (a) Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie von Schemata und  $E$  eine zulässige Klasse von Morphismen. Dann bildet  $\mathcal{C}$  mit den  $E$ -berdeckungen einen Situs, der mit  $\mathcal{C}_E$  bezeichnet wird.

(b) Der **kleine  $E$ -Situs** eines Schemas  $X$  besteht aus allen  $X$ -Schemata  $Y \rightarrow X$ , deren Strukturmorphismus  $Y \rightarrow X$  in  $E$  liegt, zusammen mit den  $E$ -berdeckungen, und wird mit  $X_E$  bezeichnet.

**Definition 7.6** Dies definiert insbesondere den kleinen étalen Situs  $X_{\text{ét}}$  eines Schemas  $X$ . Unter einer étalen Garbe auf  $X$  versteht man im Allgemeinen eine Garbe  $F$  auf dem kleinen Situs  $X_{\text{ét}}$  und ihre étale Kohomologie ist

$$H_{\text{ét}}^i(X, F) := H^i(X_{\text{ét}}, F)$$

die in Definition 5.3 definierte Kohomologie auf diesem Situs.

**Bemerkung 7.7** Nach Alg. Geo. III, Proposition 3.10 sind alle Morphismen in  $X_{\text{ét}}$  étale: Ist

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{f} & Y_2 \\ & \searrow \varphi_1 & \swarrow \varphi_2 \\ & X & \end{array}$$

ein Morphismus von étalen  $X$ -Schemata (d.h., ein kommutatives Diagramm mit étalen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ ), so ist  $f$  étale.

**Lemma/Definition 7.8** Seien  $E$  und  $E'$  zwei zulässige Klassen von Morphismen. Ein Morphismus

$$f : X' \rightarrow X$$

von Schemata definiert einen Morphismus von Siten

$$f : X'_{E'} \rightarrow X_E$$

vermöge

$$\begin{aligned} f^0 : X_E &\rightarrow X'_{E'} \\ V &\mapsto V \times_X X', \end{aligned}$$

falls für  $V_1 \rightarrow V_2$  in  $X_E$  der Basiswechsel  $V_1 \times_X X' \rightarrow V_2 \times_X X'$  in  $E'$  ist. In diesem Fall erhalten wir Funktoren

$$\begin{aligned} f_P : Pr(X'_E) &\rightarrow Pr(X_E) \\ f^P : Pr(X_E) &\rightarrow Pr(X'_{E'}) \\ f_* : Sh(X'_{E'}) &\rightarrow Sh(X_E) \\ f^* : Sh(X_E) &\rightarrow Sh(X'_{E'}), \end{aligned}$$

wobei  $f^P$  linksadjungiert zu  $f_P$  und  $f^*$  linksadjungiert zu  $f_*$  ist. Die Funktoren  $f_P, f^P$  und  $f^*$  sind exakt, der Funktor  $f_*$  ist linksexakt.

Diese Situation liegt insbesondere für  $E' = E$  vor, also insbesondere für  $E' = E = \text{ét}$ . Wir haben also adjungierte Paare

$$\begin{aligned} f_P : Pr(X') &\rightarrow Pr(X) & f^P : Pr(X) &\rightarrow Pr(X'), \\ f_* : Sh(X'_{\text{ét}}) &\rightarrow Sh(X_{\text{ét}}), & f^* : Sh(X_{\text{ét}}) &\rightarrow Sh(X'_{\text{ét}}), \end{aligned}$$

wobei  $f_*$  linksexakt ist und die anderen Funktoren exakt sind.

**Beweis** der Behauptungen:  $f^0$  definiert einen Morphismus von Siten: Ist  $Y \rightarrow X$  in  $X_E$  (also ein  $E$ -Morphismus) und  $(U_i \rightarrow Y)$  eine  $E$ -Überdeckung (also eine surjektive Familie von  $E$ -Morphismen), so ist nach Voraussetzung  $Y \times_X X' \rightarrow X'$  in  $X'_{E'}$ ; weiter ist

$$(U_i \times_X X' \rightarrow Y \times_X X')$$

eine  $E'$ -Überdeckung: die Morphismen sind nach Voraussetzung  $E'$ -Morphismen, und für jede surjektive Familie

$$(Y_i \xrightarrow{\pi_i} Y)$$

von Schema-Morphismen und jeden Schema-Morphismus  $X' \rightarrow X$  ist

$$(Y_i \times_X X' \xrightarrow{\pi'_i} Y \times_X X' =: Y')$$

wieder eine surjektive Familie: Ist  $y' \in Y'$  mit Bild  $y$  in  $Y$ , so gibt es ein  $i$  für das  $\pi_i^{-1}(y) = (Y_i)_y = Y_i \times_Y k(y)$  nicht-leer ist. Dann ist auch  $(\pi'_i)^{-1}(y') = (Y_i \times_X X') \times_{Y \times_X X'} y' = Y_i \times_Y y' = (Y_i \times_Y y) \times_y k(y') = (Y_i \times_Y k(y)) \times_{k(y)} k(y') \neq \emptyset$ . Dies zeigt Eigenschaft (S1) aus 2.7 für  $f^0$ . Weiter ist für jedes  $Z \rightarrow X$  in  $X_E$  und jeden  $X$ -Morphismus  $Z \rightarrow Y$  (also jeden Morphismus in  $X_E$ ) der kanonische Morphismus

$$(U_i \times_Y Z) \times_X X' \rightarrow (U_i \times_X X') \times_{Y \times_X X'} (Z \times_X X')$$

ein Isomorphismus. Dies zeigt 2.7 (S2).

Die Exaktheitsbehauptungen folgen aus Satz 4.4, da in  $X_E$  und  $X'_{E'}$  endliche Produkte, Faserprodukte und damit endliche Limiten existieren (siehe 4.A.22).

**Corollar 7.9** Unter den Voraussetzungen von Lemma/Definition 7.8 führt der Funktor  $f_* : Sh(X'_{E'}) \rightarrow Sh(X_E)$  injektive Garben in injektive Garben über.

**Beweis** Da  $f_*$  linksexakt ist und das exakte Linksadjungierte  $f^*$  besitzt, folgt dies aus dem folgenden Lemma.

**Lemma 7.10** Sei  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ein linksexakter Funktor zwischen abelschen Kategorien. Besitzt  $F$  einen linksexakten linksadjungierten Funktor  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ , so führt  $F$  injektive Objekte in injektive Objekte über.

**Beweis:** Sei  $I$  injektives Objekt in  $\mathcal{A}$ . Dann ist  $FI$  injektiv genau dann, wenn für jeden Monomorphismus  $B' \hookrightarrow B$  der Morphismus

$$Hom_{\mathcal{B}}(B, FI) \rightarrow Hom_{\mathcal{B}}(B', FI)$$

surjektiv ist. Mit der Funktorialität der Adjunktion erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{B}}(B, FI) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{B}}(B', FI) \\ \parallel \wr & & \parallel \wr \\ Hom_{\mathcal{A}}(GB, I) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{A}}(GB', I) \end{array}$$

wobei  $GB' \hookrightarrow GB$  ein Monomorphismus ist, da  $G$  linksexakt ist. Da  $I$  injektiv ist, ist die untere Abbildung ein Monomorphismus, also auch die obere Abbildung.

**Corollar 7.11** In der Situation von Lemma 7.8 haben wir für jede Garbe  $\mathcal{F}'$  auf  $X_E$  eine Grothendieck-Leray-Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(X_E, R^q f_* \mathcal{F}') \Rightarrow H^{p+q}(X_{E'}, \mathcal{F}).$$

**Beweis:** Dies folgt mittels Satz 6.7 aus der Tatsache, dass

$$H^0(X_E, f_*\mathcal{F}') = H^0(X_{E'}, \mathcal{F}')$$

und der linksexakte Funktor  $f_*$  Injektive in Injektive, also auch  $H^0(X_{E'}, -)$ -azyklische überführt.

**Definition 7.12** Sei  $X$  ein Schema.

(a) Ein geometrischer Punkt von  $X$  ist ein Morphismus

$$i_{\bar{x}} : \bar{x} = \text{Spec}(\Omega) \rightarrow X,$$

wobei  $\Omega$  ein separabler abgeschlossener (z.B. ein algebraisch abgeschlossener) Körper ist. Ist  $x = i_{\bar{x}}(\bar{x}) \in X$ , so sprechen wir auch von einem geometrischen Punkt über  $x$ .

(b) Für eine étale Prägarbe  $P$  auf  $X$  und einen geometrischen Punkt wie oben heißt

$$P_{\bar{x}} := (i_{\bar{x}}^P P)(\bar{x}) \in \underline{Ab}$$

der Halm von  $P$  bei  $\bar{x}$ .

**Bemerkung 7.13** (a) Der Funktor

$$\begin{array}{ccc} Pr(X_{\acute{e}t}) & \rightarrow & \underline{Ab} \\ P & \mapsto & P_{\bar{x}} \end{array}$$

ist exakt. Denn nach 7.8 ist  $i_{\bar{x}}^P : Pr(X_{\acute{e}t}) \rightarrow Pr(\bar{x}_{\acute{e}t})$  exakt. Weiter ist der Funktor

$$\begin{array}{ccc} Pr(\bar{x}_{\acute{e}t}) & \rightarrow & \underline{Ab} \\ Q & \mapsto & Q(\bar{x}) \end{array}$$

exakt.

(b) Der Adjunktionsmorphismus  $P \rightarrow (i_{\bar{x}})_P(i_{\bar{x}}^P P)$  liefert einen Homomorphismus von abelschen Gruppen

$$P(X) \rightarrow ((i_{\bar{x}})_P(i_{\bar{x}}^P P))(X) = ((i_{\bar{x}}^P P)(\bar{x})) = P_{\bar{x}}.$$

**Definition 7.14** Sei  $F \in Sh(X_{\acute{e}t})$ ,  $s \in F(X)$ , und  $\bar{x}$  ein geometrischer Punkt.

(a) Das Bild von  $s$  unter  $F(X) \rightarrow F_{\bar{x}}$  wird mit  $s_{\bar{x}}$  bezeichnet und heißt der Keim von  $s$  bei  $\bar{x}$ .

(b) Ist  $U \rightarrow X$  étale, so gibt es im allgemeinen *keine* kanonische Abbildung  $F(U) \rightarrow F_{\bar{x}}$ , aber jeder Lift von  $\bar{x} \rightarrow X$  zu  $U$  definiert eine solche, und wir bezeichnen das Bild von  $s \in F(U)$  in  $F_{\bar{x}}$  wieder mit  $s_{\bar{x}}$  (Offenbar existiert immer ein Lift, wenn es einen Punkt  $u \in U$  gibt, der auf das Bild  $x \in X$  von  $\bar{x} \rightarrow X$  abgebildet wird).

**Definition 7.15** Eine **étale Umgebung** eines geometrischen Punktes  $\bar{x} \rightarrow X$  ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{x} & \longrightarrow & U \\ & \searrow & \downarrow \text{étale} \\ & & X \end{array}$$

Ein Morphismus von étalen Umgebungen ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & & U_2 \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 \bar{x} & \longrightarrow & U_1 \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & X
 \end{array}$$

wobei  $U_2$  und  $U_1$  étale über  $X$  sind.

**Bemerkung 7.16** Ein kommutatives Diagramm von Schemata

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \longrightarrow & Y \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & X
 \end{array}$$

entspricht einem  $X'$ -Morphismus  $X' \rightarrow Y \times_X X'$ , d.h., einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X' & \longrightarrow & Y \times_X X' \\
 \searrow \text{id} & & \swarrow \text{pr}_2 \\
 & & X'
 \end{array}$$

bzw. einem Schnitt von  $\text{pr}_2 : Y \times_X X' \rightarrow X'$  (Kurz ausgedrückt ist  $\text{Hom}_X(X', Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{X'}(X', Y \times_X X')$ ). Dies zeigt, dass eine étale Umgebung von  $\bar{x} \rightarrow X$  sich mit einem Morphismus

$$\bar{x} \rightarrow U \times_X \bar{x}$$

in  $\bar{x}_{\text{ét}}$  identifiziert, wobei  $U \rightarrow X$  étale ist, also einem Objekt in der Kategorie  $I_{\bar{x}}$  für den Morphismus von Siten  $\bar{x}_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{ét}}$ ,  $U \mapsto U \times_X \bar{x}$  (siehe 7.8), der für die Definition von  $i_{\bar{x}}^P$  verwendet wird. Weiter entsprechen auch die Morphismen étaler Umgebungen von  $\bar{x} \rightarrow X$  den Morphismen in  $I_{\bar{x}}$ , nämlich den  $X$ -Morphismen  $U_1 \rightarrow U_2$ , für die

$$\begin{array}{ccc}
 & & U_1 \times_X \bar{x} \\
 & \nearrow & \downarrow \\
 \bar{x} & \longrightarrow & U_2 \times_X \bar{x}
 \end{array}$$

kommutativ ist. Zusammen mit der Definition von  $i_{\bar{x}}^P$  folgt, dass für eine étale Prägarbe  $P$  auf  $X$  gilt:

$$(7.16.1) \quad P_{\bar{x}} = \lim_{\rightarrow} P(U)$$

wobei der induktive Limes über alle étalen Umgebungen von  $\bar{x} \rightarrow X$  läuft.

**Lemma 7.17** (a) Ist  $U \rightarrow X$  étale und  $s \in F(U)$  nicht-trivial, so gibt es einen geometrischen Punkt  $\bar{x}$  von  $U$  mit  $s_{\bar{x}} \neq 0$  in  $F_{\bar{x}}$ .

(b) Insbesondere gilt:  $F = 0 \Leftrightarrow F_{\bar{x}} = 0$  für alle geometrischen Punkte  $\bar{x}$  von  $X$ .

**Beweis** (a): Gibt es keine solchen geometrischen Punkte, so besitzt jeder Punkt  $u \in U$  eine étale Umgebung  $V_u \rightarrow U$  mit  $s|_{V_u} = 0$ , und mit der Separiertheit von  $F$  folgt  $s = 0$  (die  $V_u$  überdecken  $U$ ).

(b) ist klar hieraus.

**Lemma 7.18** Sei  $f : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$  ein Morphismus von Siten. Bildet  $f^P$  Garben auf Garben ab, so ist kanonisch  $f^P a = a f^P$  (präziser:  $f^P i a = i a f^P$  für die Einbettungen  $i : Sh(\mathcal{S}) \rightarrow Pr(\mathcal{S})$  und  $i : Sh(\mathcal{S}') \rightarrow Pr(\mathcal{S}')$ ).

**Beweis:** Sei  $P$  eine Prägarbe auf  $\mathcal{S}$  und  $F$  Garbe auf  $\mathcal{S}'$ . Dann haben wir Isomorphismen

$$\begin{aligned} Hom_{Pr(\mathcal{S}')} (f^P i a P, i F) &\cong Hom_{Pr(\mathcal{S})} (i a P, f_P i F) \cong Hom_{Pr(\mathcal{S})} (i a P, i f_* F) \\ &\cong Hom_{Sh(\mathcal{S})} (a P, f_* F) \cong Hom_{Pr(\mathcal{S})} (P, i f_* F) \cong Hom_{Pr(\mathcal{S})} (P, f_P i F) \\ &\cong Hom_{Pr(\mathcal{S}')} (f^P P, i F) \cong Hom_{Sh(\mathcal{S}')} (a f^P P, F) \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung: Nach Voraussetzung ist  $f^P i a P = i G$  für eine Garbe  $G$ , und die erste Gruppe ist isomorph zu  $Hom_{Sh(\mathcal{S}')} (G, F)$ . Mit dem Yoneda-Lemma folgt  $G \cong a f^P P$ , also  $f^P i a P \cong i a f^P P$ .

**Corollar 7.19** Für eine étale Prägarbe  $P$  auf  $X$  und einen geometrischen Punkt  $\bar{x}$  von  $X$  ist  $P_{\bar{x}} = (a P)_{\bar{x}}$ .

**Beweis:** Für  $i_{\bar{x}} : \bar{x} \rightarrow X$  gilt  $P_{\bar{x}} = (i_{\bar{x}}^P P)(\bar{x}) = (a i_{\bar{x}}^P P)(\bar{x}) \stackrel{7.15}{=} (i_{\bar{x}}^P a P)(\bar{x}) \stackrel{\text{Def.}}{=} (a P)_{\bar{x}}$ , denn  $i_{\bar{x}}^P$  führt Garben in Garben über: Für eine Garbe  $F$  auf  $X$  gilt

$$(i_{\bar{x}}^P F)(\coprod_{i \in I} \bar{x}) = \prod_{i \in I} (i_{\bar{x}}^P F)(\bar{x}),$$

denn für ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V = \coprod_{i \in I} \bar{x} & \xrightarrow{(f_i)} & U \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

existiert die Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} & & \coprod_{i \in I} U \\ & \nearrow \coprod_i f_i & \downarrow \\ V = \coprod_{i \in I} \bar{x} & \longrightarrow & U, \end{array}$$

d.h., die oben stehenden Morphismen sind kofinal in der Kategorie  $I_V$ , und wir können für  $(f^P F)(V)$  den Limes über diese bilden; weiter ist  $F(\coprod_i U_i) = \prod_i F(U_i)$ .

**Corollar 7.20** Eine Sequenz

$$(7.20.1) \quad 0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

von étalen Garben auf  $X$  ist genau dann exakt, wenn die Sequenzen der Halme

$$(7.20.2) \quad 0 \rightarrow F'_x \rightarrow F_x \rightarrow F''_x \rightarrow 0$$

für alle geometrischen Punkte  $\bar{x}$  von  $X$  exakt sind.

**Beweis** (a) Ist (7.20.1) exakt, so ist

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F''$$

exakt als Sequenz von Prägarben, nach Bemerkung 7.13 (a) also

$$0 \rightarrow F'_x \rightarrow F_x \rightarrow F''_x$$

exakt.

(b) Sei umgekehrt  $0 \rightarrow F'_x \rightarrow F_x \rightarrow F''_x$  exakt für alle geometrischen Punkte  $\bar{x}$  von  $X$ .

(i) Dann ist  $F' \rightarrow F$  ein Monomorphismus: Ist nämlich  $U \rightarrow X$  étale und  $s \in F'(U)$  im Kern von  $F'(U) \rightarrow F(U)$ , so ist für jeden geometrischen Punkt  $\bar{x}$  von  $U$  der Keim  $s_{\bar{x}}$  von  $s$  im Kern von  $F'_x \rightarrow F_x$ , also null, da diese Abbildung injektiv ist. Hieraus folgt aber  $s = 0$  nach 7.17 (a).

(ii) Sei  $s$  im Kern von  $F(U) \rightarrow F''(U)$  für  $U \rightarrow X$  étale. Nach Voraussetzung liegt dann für jeden geometrischen Punkt  $\bar{x}$  von  $U$  der Keim  $s_{\bar{x}}$  im Halm  $F'_x \hookrightarrow F_x$ . Für jedes  $u \in U$  gibt es dann einen étalen Morphismus  $V_u \rightarrow U$ , so dass  $s|_{V_u}$  in der Untergruppe  $F'(V_u) \subseteq F(V_u)$  liegt. Da  $(V_u)_{u \in U}$  eine étale Überdeckung von  $U$  ist und  $F'$  und  $F$  Garben sind, liegt  $s$  in  $F'(U) \subseteq F(U)$ . Nach (i) und (ii) ist also

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F''$$

exakt.

(c) Sei  $P$  der Prägarben-Kokern von  $F \rightarrow F''$ , also

$$F(U) \rightarrow F''(U) \rightarrow P(U) \rightarrow 0$$

exakt für alle étalen Morphismen  $U \rightarrow X$ . Dann ist

$$F \rightarrow F'' \rightarrow aP \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von Garben, da der Funktor  $a$  (assoziierte Garbe) exakt ist und  $aF = F$ ,  $aF' = F'$ . Damit gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} & F \rightarrow F' \text{ Epimorphismus von Garben} \\ \Leftrightarrow & aP = 0 \\ \Leftrightarrow & (aP)_{\bar{x}} = 0 \text{ für alle geometrischen Punkte } \bar{x} \text{ (nach 7.17 (b))} \\ \Leftrightarrow & P_{\bar{x}} = 0 \text{ für alle geometrischen Punkte } \bar{x} \text{ (nach 7.19)} \\ \Leftrightarrow & F'_x \rightarrow F_x \text{ surjektiv für alle geometrischen Punkte } \bar{x}, \end{aligned}$$

da die Halmbildung exakt ist auf der exakten Sequenz von Prägarben

$$F \rightarrow F' \rightarrow P \rightarrow 0$$

(siehe 7.13 (a)).

**Corollar 7.21** Ein Morphismus

$$(7.21.1) \quad \varphi : F_1 \rightarrow F_2$$

von étalen Garben auf  $X$  ist genau dann null, wenn die Halmabbildungen

$$(7.21.2) \quad \varphi_{\bar{x}} : (F_1)_{\bar{x}} \rightarrow (F_2)_{\bar{x}}$$

null sind für alle geometrischen Punkte  $\bar{x}$  von  $X$ .

**Beweis:** Für die nicht-triviale Richtung sei  $F_0$  der Kern von  $\varphi$ . Für die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2$$

ist dann

$$0 \rightarrow (F_0)_{\bar{x}} \rightarrow (F_1)_{\bar{x}} \xrightarrow{0} (F_2)_{\bar{x}}$$

exakt für alle geometrischen Punkte  $\bar{x}$ . Wie in (ii) folgt, dass für jeden étalen Morphismus  $U \rightarrow X$  jeder Schnitt  $s \in F_1(U)$  bereits in  $F_0(U)$  liegt, also  $\varphi_U : F_1(U) \rightarrow F_2(U)$  gleich null ist.

## 8 Der étale Situs eines Körpers

Der folgende Satz ist Grothendieck's Version der (unendlichen) Galoistheorie.

**Satz 8.1** Sei  $k$  ein Körper,  $k_s$  ein separabler Abschluss von  $k$  und  $G_k := Gal(k_s/k)$  die absolute Galoisgruppe von  $k$ . Dann ist der Funktor

$$\begin{aligned} \phi = Hom_k(\text{Spec}(k_s), -) : \text{Spec}(k)_{\text{ét}} &\rightarrow \mathcal{C}(G_k) = \text{Kategorie der diskreten } G_k\text{-Mengen} \\ Y &\mapsto \phi(Y) := Y(k_s) := Hom_k(\text{Spec}(k_s), Y) \end{aligned}$$

eine Äquivalenz von Siten, wobei die Grothendieck-Topologie auf  $\mathcal{C}(G_k)$  durch die surjektiven Familien  $(M_i \rightarrow M)_i$  gegeben ist.

**Bemerkung 8.2** (a) Mit der Krull-Topologie (Umgebungsbasis der 1 aus den Untergruppen  $Gal(k_s/L)$ , für  $L/k$  endlich) ist  $G_k$  eine pro-endliche Gruppe, d.h., ein projektiver Limes von endlichen Gruppen

$$G_k = \varprojlim_{L/k \text{ endl. gal., } L \subseteq k_s} Gal(L/k).$$

(b)  $G_k$  operiert von links auf  $k_s$ , daher von rechts auf  $\text{Spec } k_s$ , daher von links auf  $\phi(Y)$ .

(c) Eine  $G_k$ -Menge  $M$  heißt diskret, wenn für jedes  $m \in M$  der Stabilisator  $Stab(m) := \{g \in G_k \mid gm = m\}$  offen (und damit von endlichem Index) in  $G_k$  ist.

Für mehr Tatsachen über pro-endliche Gruppen und unendliche Galoistheorie siehe Algebra II, SS 2007, Kapitel 1-3.

Wir benutzen (siehe Alg. Geo III, Satz 3.8 (c))

**Lemma 8.3** Ist  $Y \rightarrow \text{Spec}(k)$  étale, so ist  $Y = \coprod_{i \in I} \text{Spec}(L_i)$ , wobei  $L_i/k$  endliche separable Körpererweiterungen sind. Ist  $Y$  von endlichem Typ über  $k$ , so ist  $I$  endlich.

**Beweis:** Für die zweite Behauptung siehe loc. cit.. Allgemein besitzt also jedes  $y \in Y$  eine offene Umgebung  $U = \coprod_{i=1}^r \text{Spec}(L_i)$ . Dies zeigt, dass jeder Punkt offen ist, also dass  $Y$  die diskrete Topologie trägt. Zusammen folgt die erste Behauptung.

**Beweis** von Satz 8.1: 1) Ein Umkehrfunktor zu  $\phi$  ist der Funktor

$$\psi : M = \coprod_{j \in J} M_j \mapsto \coprod_{j \in J} \text{Spec}(Hom_{G_k}(M_j, k_s)).$$

Hierbei sei  $M_j$  zusammenhängend, d.h.,  $G_k$  operiere transitiv auf  $M_j$ , und  $Hom_{G_k}(M_j, k_s)$  wird zur  $k$ -Algebra durch die  $k$  Algebrenstruktur von  $k_s$ . Offenbar ist jede zusammenhängende diskrete  $G_k$ -Menge von der Form  $G_k/U$  mit  $U \leq G_k$  offen, und die Zuordnung ist

$$G_k/U \mapsto \text{Spec}(k_s^U).$$

$\psi$  ist quasi-invers zu  $\phi$ : Es genügt, dies für zusammenhängende  $G_k$ -Mengen bzw. für endliche separable Körpererweiterungen zu prüfen. Sei also  $M$  zusammenhängend diskrete  $G_k$ -Menge,

ohne Einschränkung  $M = G_k/U$  für eine offene Untergruppe  $U \subseteq G_k$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \psi(M) = \text{Hom}_{G_k}(G_k/U, k_s) &\xrightarrow{\sim} k_s^U =: L \subseteq k_s \\ \alpha &\mapsto \alpha(1) \end{aligned}$$

ein Algebrenisomorphismus. Umgekehrt ist

$$\phi(\text{Spec}(L)) = \text{Hom}_k(\text{Spec}(k_s), \text{Spec}(L)) \cong \text{Hom}_k(L, k_s) \cong G_k/U,$$

ein Isomorphismus von diskreten  $G_k$ -Mengen, indem die Einbettung  $L \hookrightarrow k_s$  auf  $1 \in G_k$  abgebildet wird.

Wir erhalten also eine Kategorienäquivalenz zwischen étalen  $k$ -Schemata  $Y$  und diskreten  $G_k$ -Mengen, durch Wahl einer  $k$ -Einbettung  $L \hookrightarrow k_s$  für jede endliche separable Körpererweiterung  $L/k$ . Aus den folgenden beiden Tatsachen folgt, dass  $\phi$  auch eine Äquivalenz von Sites ist:

2) Es gilt  $\phi(Y' \times_Y Y'') = (Y' \times_Y Y'')(k_s) = Y'(k_s) \times_{Y(k_s)} Y''(k_s)$

3) Ist  $\text{Spec } L' \rightarrow \text{Spec } L$  étale, so ist  $L \subseteq L'$  eine separable Körpererweiterung von  $k$  in  $k_s$  und die Abbildung  $\text{Hom}_k(L', k_s) \rightarrow \text{Hom}_k(L, k_s)$  ist surjektiv, wie aus der Algebra bekannt ist.

**Corollar 8.4** Es gibt eine Kategorienäquivalenz

$$\begin{aligned} \text{Sh}(\text{Spec}(k)_{\text{ét}}) &\xrightarrow{\sim} (\text{diskrete } G_k\text{-Moduln}), \\ F &\mapsto F_{\bar{x}} \end{aligned}$$

wobei  $F_{\bar{x}}$  der Halm im geometrischen Punkt  $\bar{x} = \text{Spec}(k_s) \rightarrow \text{Spec}(k)$  ist.

**Beweis:** Wir zeigen eine allgemeinere Tatsache.

**Definition 8.5** Für einen Situs  $\mathcal{S} = (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  sei  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})^\sim$  die Kategorie der Garben von Mengen auf  $\mathcal{S}$ ; diese heißt auch der **Topos** zu  $\mathcal{S}$ .

**Satz 8.6** Für einen Körper  $k$  ist der Funktor

$$\begin{aligned} (\text{Spec}(k)_{\text{ét}})^\sim &\xrightarrow{\sim} (\text{diskrete } G_k\text{-Mengen}), \\ F &\mapsto F_{\bar{x}} \end{aligned}$$

eine Kategorienäquivalenz.

Hieraus folgt Corollar 8.4, weil sich unter 8.6 offenbar die abelschen Garben und die diskreten  $G_k$ -Moduln entsprechen (als die abelschen Gruppenobjekte in diesen Kategorien).

**Beweis** von Satz 8.6: Wir haben funktorielle Isomorphismen für jede Garbe  $F$  auf  $\text{Spec}(k)_{\text{ét}}$ :

$$F_{\bar{x}} = \lim_{\substack{\rightarrow \\ k \subseteq L \subseteq k_s \\ L/k \text{ endl. separabel}}} F(\text{Spec}(L)).$$

Da die Kategorienäquivalenz aus Satz 8.1

$$\text{Spec}(L) \mapsto G_k/U$$

mit  $U = \text{Gal}(k_s/L) \leq G_k$  zuordnet, und die  $k \subseteq L \subseteq k_s$  wie oben allen offenen Untergruppen  $U \leq G_k$  entsprechen, folgt die Behauptung aus dem folgenden Satz.

**Satz 8.7** (a) Sei  $G$  eine Gruppe und  $\mathcal{M}(G)$  die Kategorie der linken  $G$ -Mengen. Dann bilden die surjektiven Familien  $(M_i \rightarrow M)$  von  $G$ -Mengen eine Grothendieck-Topologie  $\mathcal{T}_G$  auf  $\mathcal{M}(G)$ , die sogenannte kanonische Topologie. Der Funktor

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathcal{M}(G), \mathcal{T}_G)^\sim &\rightarrow \mathcal{M}(G) \\ F &\mapsto M_F = F(G) \end{aligned}$$

ist eine Kategorienäquivalenz mit Quasi-Inversem

$$F_M = \text{Hom}_G(-, M) \xleftarrow{\Psi} M.$$

(b) Sei  $G$  eine pro-endliche Gruppe (d.h., ein projektiver Limes von endlichen Gruppen, versehen mit der pro-endlichen Topologie) und sei  $\mathcal{C}(G)$  die Kategorie der stetigen  $G$ -Mengen (bezüglich der diskreten Topologie auf diesen Mengen). Dann bilden die surjektiven Familien  $(M_i \rightarrow M)$  von diskreten  $G$ -Mengen eine Grothendieck-Topologie, die sogenannte kanonische Topologie, die wieder mit  $\mathcal{T}_G$  bezeichnet sei. Der Funktor

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathcal{C}(G), \mathcal{T}_G)^\sim &\rightarrow \mathcal{C}(G) \\ F &\mapsto M_F = F(G) := \varinjlim_{U \leq G \text{ offen}} F(G/U) \end{aligned}$$

ist eine Kategorienäquivalenz mit Quasi-Inversem

$$F_M = \text{Hom}_G(-, M) \xleftarrow{\Psi} M$$

**Beweis** (a) Sei  $G$  eine diskrete Gruppe.

(i)  $F(G)$  wird wie folgt eine Links- $G$ -Menge: für  $g \in G$  ist die Rechtstranslation mit  $g$

$$\begin{aligned} R_g : G &\rightarrow G \\ g' &\mapsto g'g \end{aligned}$$

ein Morphismus von Links- $G$ -Mengen und wir definieren eine Links- $G$ -Operation auf  $F(G)$  durch

$$gx = F(R_g)(x)$$

(Es ist  $F(R_{gg'}) = F(R_{g'} \circ R_g) = F(R_g) \circ F(R_{g'})$ , da  $F$  kontravariant ist). Die Zuordnung  $F \mapsto F(G)$  ist dabei offenbar funktoriell.

(ii)  $F_M$  ist eine Garbe: leicht.

(iii) Wir haben einen funktoriellen Isomorphismus  $M_{F_M} \xrightarrow{\sim} M$ , da die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(G, M) &\xrightarrow{\sim} M \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

eine Bijektion von  $G$ -Mengen ist:  $gf \mapsto gf(1) = f(1g) = f(g) = gf(1)$ .

(iv) Wir haben einen funktoriellen Isomorphismus  $F_{M_F} \xrightarrow{\sim} F$ , d.h.,

$$\text{Hom}_G(N, F(G)) \xrightarrow{\sim} F(N),$$

denn für  $N = \coprod_{i \in I} N_i$  ist  $F(N) = \prod_{i \in I} F(N_i)$  und  $\text{Hom}_G(N, F(G)) = \prod_{i \in I} \text{Hom}_G(N_i, F(G))$ ; durch Betrachtung der Bahnen ist also o.E.  $N = G/U$  für  $U \subset G$  Untergruppe. Wir betrachten die Garbenbedingung für die Überdeckung  $G \rightarrow G/U$ . Wir haben eine Bijektion von  $G$ -Mengen

$$\begin{aligned} \coprod_{u \in U} G &\rightarrow G \times_{G/U} G \\ g_u &\mapsto (g, gu); \end{aligned}$$

daher ist

$$\begin{aligned} F(G/U) \rightarrow F(G) &\rightleftarrows F(G \times_{G/U} G) \xrightarrow{\sim} \prod_{u \in U} F(G) \\ f &\rightleftarrows \begin{pmatrix} \dots, f, \dots \\ \dots, uf, \dots \end{pmatrix}_{u \in U} \end{aligned}$$

exakt, also kanonisch

$$F(G/U) \xrightarrow{\sim} F(G)^U = \{f \in F(G), uf = f \text{ für alle } u \in U\} \cong \text{Hom}_G(G/U, F(G))$$

$$\varphi(1) \leftarrow \varphi$$

wie gewünscht.

**2. Fall** Sei  $G$  pro-endlich.

(i) Es ist

$$M_F = \varinjlim_{\substack{U \trianglelefteq G \text{ offener} \\ \text{Normalteiler}}} F(G/U),$$

und dies wird ein diskreter  $G$ -Modul, da nach dem 1. Fall  $F(G/U)$  ein  $G/U$ -Modul ist.

(ii) Es folgt auch wieder leicht, dass  $F_M$  eine Garbe ist.

(iii) Für  $M$  in  $\mathcal{C}(G)$  ist

$$M_{F_M} = \varinjlim_{V \trianglelefteq G \text{ offen}} \text{Hom}_G(G/U, M) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{V \trianglelefteq G \text{ offen}} M^U \xrightarrow{\sim} M.$$

(iv) Nach dem 1. Fall ist weiter für jede offene Untergruppe  $U < G$  und jeden offenen Normalteiler  $U' \trianglelefteq G$  mit  $U' \subseteq U$

$$F(G/U) \xrightarrow{\sim} \{f \in F(G/U') \mid \bar{u}f = f \text{ für alle } \bar{u} \in U/U'\},$$

also insgesamt

$$F(G/U) \cong (M_F)^U,$$

und wie oben folgt

$$F_{M_F}(N) = \text{Hom}_G(N, M_F) \xrightarrow{\sim} F(N),$$

denn für  $N = G/U$  mit  $U$  offen in  $G$  erhalten wir

$$\begin{aligned} F_{M_F}(G/U) = \text{Hom}_G(G/U, M_F) &\cong (M_F)^U \cong F(G/U) \\ f &\mapsto f(1) \end{aligned}$$

**Bemerkung 8.8** Aus 8.1 und (dem Beweis von) 8.4 folgt: Wir haben eine Kategorienäquivalenz

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}h(\mathrm{Spec}(k)_{\acute{e}t}) & \rightarrow & \mathcal{C}(G_k) = (\text{diskrete } G_k\text{-Moduln}) \\ F & \mapsto & F_{\bar{x}} \end{array}$$

mit Quasi-Inversem

$$M \mapsto F \text{ mit } F(\mathrm{Spec}(L)) = M^{G_L} \text{ f\"ur } L/K \text{ endlich separabel.}$$

**Corollar 8.9** Sei  $k$  ein K\"orper mit separablem Abschluss  $k_s$ , und sei  $G_k = \mathrm{Gal}(k_s/k)$  die absolute Galoisgruppe von  $k$  und  $\bar{x} : \mathrm{Spec}(k_s) \rightarrow \mathrm{Spec}(k)$ . Dann gibt es funktorielle Isomorphismen f\"ur alle \acute{e}talen abelschen Garben  $F$  auf  $\mathrm{Spec}(k)$  und alle  $i \geq 0$

$$H_{\acute{e}t}^i(\mathrm{Spec}(k), F) \xrightarrow{\sim} H^i(G_k, F_{\bar{x}}),$$

vertr\"aglich mit langen exakten Kohomologiesequenzen.

**Beweis** Dies folgt aus der Kategorien\"aquivalenz

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}h(\mathrm{Spec}(k)_{\acute{e}t}) & \rightarrow & \mathcal{C}(G_k) = (\text{diskrete } G_k\text{-Moduln}) \\ F & \mapsto & F_{\bar{x}} \end{array}$$

und den folgenden beiden Tatsachen:

(i) Es gibt kanonische funktorielle Isomorphismen (siehe 8.8)

$$F(k) := F(\mathrm{Spec}(k)) \xrightarrow{\sim} F_{\bar{x}}^{G_k}.$$

(ii)  $H^i(G_k, -)$  ist per Definition der  $i$ -te rechtsabgeleitete Funktor von

$$M \mapsto H^0(G_k, M) = M^{G_k}.$$

\acute{E}tale Kohomologie von K\"orpern ist also Galoiskohomologie.

## 9 Henselsche Ringe

Die Henselschen Ringe und insbesondere die strikt Henselschen Ringe spielen in der étalen Topologie die Rolle, die in der Zariski-Topologie die üblichen lokalen Ringe spielen.

Sei  $A$  ein lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und Restklassenkörper  $k = A/\mathfrak{m}$ .

**Lemma/Definition 9.1** Sei  $x$  der abgeschlossene Punkt von  $X = \text{Spec}(A)$ .

$A$  heißt Henselsch, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten.

(a) Ist  $f \in A[X]$  normiert und  $\bar{f} = g_0 \cdot h_0$  mit  $g_0, h_0 \in k[X]$  normiert und koprim (d.h.,  $\langle g_0, h_0 \rangle = k[X]$ ), so gibt es normierte Polynome  $g, h \in A[X]$  mit  $f = g \cdot h$ ,  $\bar{g} = g_0$  und  $\bar{h} = h_0$  (Hierbei sei  $\bar{f} = f \bmod \mathfrak{m}$  in  $k[X]$ ; entsprechend für  $g$  und  $h$ ). Die Polynome  $g, h$  sind strikt koprim (d.h.,  $\langle g, h \rangle = A[X]$ ).

(a') Ist  $f \in A[X]$  und  $\bar{f} = g_0 \cdot h_0$  mit  $g_0$  normiert und  $g_0$  und  $h_0$  koprim, so gibt es  $g, h \in A[X]$  mit  $g$  normiert,  $f = g \cdot h$ ,  $\bar{g} = g_0$  und  $\bar{h} = h_0$ .

(b) Jede endliche  $A$ -Algebra ist direktes Produkt von lokalen Ringen  $B_i$ .

(b') Ist  $B$  endliche  $A$ -Algebra, so lässt sich jedes Idempotente  $e_0 \in B/\mathfrak{m}B$  (d.h.,  $e_0^2 = e_0$ ) zu einem Idempotenten  $e \in B$  liften.

(c) Ist  $f : Y \rightarrow X$  quasi-endlich (siehe unten) und separiert, so ist

$$Y = Y_0 \amalg Y_1 \amalg \dots \amalg Y_r,$$

wobei gilt:  $x \notin f(Y_0)$  und für  $i \geq 1$  ist  $Y_i$  endlich über  $X$  und  $Y_i = \text{Spec}(B_i)$  für einen lokalen Ring  $B_i$ .

(d) Ist  $f : Y \rightarrow X$  étale und hat  $Y$  einen Punkt  $y$  mit  $f(y) = x$  und  $k(x) \xrightarrow{\sim} k(y)$ , so hat  $f$  einen Schnitt  $s : X \rightarrow Y$  (d.h.,  $fs = id_X$ ).

(d') Seien  $f_1, \dots, f_n \in A[X_1, \dots, X_n]$  und sei  $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$  mit  $\bar{f}_i(a) = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und  $\det(\partial \bar{f}_i / \partial x_j(a)) \neq 0$ . Dann existiert ein  $c \in A^n$  mit  $\bar{c} = a$  und  $f_i(c) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

**Definition 9.2** Ein Morphismus  $f : Y \rightarrow X$  von Schemata heißt **quasi-endlich**, wenn er endlich präsentiert (bei noetherschen Schemata: von endlichem Typ) ist und endliche Fasern hat ( $f^{-1}(x)$  ist endlich für alle  $x \in X$ ).

Ist  $f$  étale und endlich präsentiert/von endlichem Typ, so ist  $f$  quasi-endlich.

**Beweis** der Äquivalenz der Bedingungen in 9.1:

(a')  $\Rightarrow$  (a) ist trivial, bis auf den letzten Satz in (a). Ist  $f$  aber normiert, so ist  $A[x]/\langle f \rangle$  endlich über  $A$ . Wegen  $f \in \langle g, h \rangle$ , d.h.,  $\langle f \rangle \subseteq \langle g, h \rangle$  ist also auch  $D = A[X]/\langle g, h \rangle$  endlich über  $A$ , und nach dem Nakayama-Lemma ist  $D = 0$ , da  $D/\mathfrak{m}D = k[x]/\langle g_0, h_0 \rangle = 0$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b): Sei  $B$  eine endlich  $A$ -Algebra. Nach dem going-up-Theorem (Alg. Geo. I, Satz 6.4) liegt jedes maximale Ideal von  $B$  über  $\mathfrak{m}$ ; also ist  $B$  genau dann lokal, wenn  $B/\mathfrak{m}B$  lokal ist.

*Spezialfall:* Sei  $B = A[X]/\langle f \rangle$  mit einem normierten Polynom  $f$ .

Ist  $\bar{f}$  eine Potenz eines irreduziblen Polynoms, so ist  $B/\mathfrak{m}B = k[X]/\langle \bar{f} \rangle$  lokal, also  $B$  lokal. Andernfalls erhalten wir nach (a), dass  $f = g \cdot h$  mit  $g, h$  normiert mit  $\text{Grad} \geq 1$  und strikt koprim, und mit dem chinesischen Restsatz folgt

$$B = A[X]/\langle f \rangle \cong A/\langle g \rangle \times A/\langle h \rangle.$$

Durch Induktion über die Anzahl der Primfaktoren von  $\bar{f}$  folgt die Behauptung.

*Allgemeiner Fall:* Angenommen,  $B$  ist nicht lokal. Dann existiert ein  $b \in B$ , so dass  $\bar{b}$  ein nicht-triviales Idempotentes in  $B/\mathfrak{m}B$  ist ( $B/\mathfrak{m}B$  ist eine Artinsche  $k$ -Algebra, also ein Produkt von lokalen Ringen). Da  $b$  ganz über  $A$  ist, gibt es ein normiertes Polynom  $f \in A[X]$  mit  $f(b) = 0$ . Wir haben dann einen Ringhomomorphismus (durch Einsetzen von  $b$ )

$$\varphi : C = A[X]/\langle f \rangle \rightarrow B, \quad X \mapsto b.$$

Betrachte die Reduktion mod  $\mathfrak{m}$

$$\bar{\varphi} : C/\mathfrak{m}C = k[X]/\langle \bar{f} \rangle \rightarrow B/\mathfrak{m}B.$$

Ist  $\bar{f} = \prod_i p_i^{n_i}$  mit irreduziblen Polynomen  $p_i$ , so ist

$$k[X]/\langle \bar{f} \rangle \cong \prod_i k[X]/\langle p_i^{n_i} \rangle$$

und für den Quotienten im  $(\bar{\varphi})$  gilt

$$\text{im}(\bar{\varphi}) = k[X]/\langle g_0 \rangle = \prod_i k[X]/\langle p_i^{m_i} \rangle$$

mit  $g_0 = \prod_i p_i^{m_i} \mid \bar{f}$ . Dies zeigt, dass das Idempotente  $\bar{b} \in \text{im}(\bar{\varphi})$  zu einem Idempotenten  $\bar{e} \in C/\mathfrak{m}C$  liftet (die Zerlegungen sind eindeutig). Nach dem ersten Fall existiert also ein Idempotentes  $e \in C$  mit  $e \bmod \mathfrak{m} = \bar{e}$ , also  $\overline{\varphi(e)} = \bar{b}$ . Daher ist  $\varphi(e)$  ein nicht-triviales Idempotentes in  $B$ .

Dies liefert eine Ringzerlegung  $B = Be \times B(1 - e)$  in zwei nicht-triviale Ringe, und induktiv über die (endliche) Anzahl der Komponenten von  $B/\mathfrak{m}B$  folgt die Behauptung.

Beachte: Es gibt eine bijektive Entsprechung für kommutative Ringe mit Eins  $R$ :

$$\begin{array}{ll} \text{Zerlegung in ein Produkt} & \text{Idempotente} \\ R = R_1 \times R_2 & \mapsto (1, 0) \text{ und } (0, 1) \\ R = Re \times R(1 - e) & \leftarrow e \text{ und } 1 - e \end{array}$$

(Beachte:  $e$  Idempotentes  $\Rightarrow 1 - e$  Idempotentes).

Dies zeigt auch (b)  $\Leftrightarrow$  (b').

(b)  $\Rightarrow$  (c): Wir benötigen:

**Satz 9.3** (Stein-Faktorisierung/Zariskis Hauptsatz) Sei  $f : Y \rightarrow X$  ein quasi-endlicher, separierter Morphismus von Schemata, wobei  $X$  quasi-kompakt ist. Dann gibt es eine Faktorisierung

$$f : Y \xrightarrow{j} Y' \xrightarrow{f'} X,$$

wobei  $f'$  endlich und  $j$  eine offene Immersion ist.

**Bemerkung 9.4** Sei  $f : Y \rightarrow X$  ein Morphismus von Schemata.

(a)  $f$  heißt affin, wenn für jede affine offene Menge  $U \subseteq X$  auch  $f^{-1}(U)$  affin ist.

(b)  $f$  heißt endlich, wenn  $f$  affin ist, und für jede affine offene Menge  $U \subseteq X$  der Ringhomomorphismus  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$  endlich ist.

**Beweis von Satz 9.3:** Ohne! Siehe Referenzen in Milne ‘Etale Cohomology’, Seite 6.

Damit betrachte  $f : Y \rightarrow X = \text{Spec}(A)$ , quasi-endlich und separiert, mit  $A$  ein lokaler Ring wie oben. Sei

$$Y \xrightarrow{j} Y' \xrightarrow{f'} X$$

eine Stein-Faktorisierung wie in Satz 9.3. Da  $f'$  affin ist, ist  $Y' = \text{Spec}(B')$  affin. Nach (b) ist

$$Y' = \coprod_{i=1}^r Y_i,$$

wobei  $Y_i = \text{Spec}(B_i)$  für eine lokale endliche  $A$ -Algebra  $B_i$  ist. Sei

$$Y_* = \coprod_{i \in I} Y_i$$

das Produkt derjenigen  $Y_i$ , deren abgeschlossener Punkt  $y_i$  in  $Y$  liegt. Dann ist  $Y_*$  offen und abgeschlossen in  $Y'$  und liegt in  $Y$ , denn die kleinste offene Umgebung von  $y_i \in Y_i$  ist  $Y_i$ . Damit ist  $Y_*$  auch offen und abgeschlossen in  $Y$ , und es folgt

$$Y = Y_0 \amalg Y_*,$$

wobei  $x \notin f(Y_0)$ , also (c).

(c)  $\Rightarrow$  (d): Sei  $f : Y \rightarrow X = \text{Spec}(A)$  étale und  $y \in Y$  mit  $f(y) = x$  und  $k(x) \xrightarrow{\sim} k(y)$ . Indem wir  $Y$  durch eine affine offene Umgebung von  $y$  ersetzen, ist ohne Einschränkung  $f$  quasi-endlich und separiert. Nach (c) ist dann ohne Einschränkung  $Y = \text{Spec}(B)$  mit  $B$  lokal und endlich über  $A$ . Da  $f$  étale ist, ist

$$B/\mathfrak{m}B = B/\mathfrak{m}_B = k(y) = k(x) = A/\mathfrak{m}.$$

Nach dem Nakayama-Lemma wird also  $B$  als  $A$ -Modul von  $1 \in B$  erzeugt. Hieraus erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow 0$$

mit einem Ideal  $\mathfrak{a} \subseteq A$ . Da  $B$  flach über  $A$  ist, ist

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \otimes_A B \rightarrow A \otimes_A B \xrightarrow{\beta} B \otimes_A B \rightarrow 0$$

exakt. Der Homomorphismus  $\beta$  identifiziert sich mit

$$i_2 : B \rightarrow B \otimes_A B \quad , \quad b \mapsto 1 \otimes b.$$

Dieser ist injektiv, da die Komposition mit  $\mu : B \otimes_A B \rightarrow B$ ,  $b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2$ , die Identität ist. Es folgt  $\mathfrak{a} \otimes_A B = 0$ , also auch  $\mathfrak{a} = 0$ , da  $A \rightarrow B$  als flacher Homomorphismus lokaler

Ringe auch treuflach ist (siehe Corollar 10.4 unten). Also ist  $A \xrightarrow{\sim} B$  und dies liefert den gewünschten Schnitt.

(d)  $\Rightarrow$  (d'): Sei  $B = A[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_n \rangle$  und  $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$  mit  $\bar{f}_i(a) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $\det(\partial f_i / \partial X_j(a)) \neq 0$  in  $k$ . Dann entspricht  $a$  einem maximalen Ideal von  $(B/\mathfrak{m}B$  also auch von)  $B$ ; sei dies mit  $\mathfrak{n}$  bezeichnet. Dann ist  $\det(\partial f_i / \partial X_j)$  eine Einheit in  $B_{\mathfrak{n}}$ , also existiert ein  $b \in B \setminus \mathfrak{n}$  mit  $\det(\partial f_i / \partial X_j)$  Einheit in  $B_b$ . Es ist aber

$$B_b \cong A[X_1, \dots, X_n, T]/\langle f_1, \dots, f_n, bT - 1 \rangle$$

und die zugehörige Jacobi-Determinante ist  $\det(\partial f_i / \partial X_j)b$ , also eine Einheit. Nach dem Jacobi-Kriterium ist  $B_b$  étale über  $A$  (Alg. Geo. III, Satz 4.12). Weiter liefert  $\mathfrak{n}$  ein maximales Ideal von  $B_b$  über  $\mathfrak{m}$  mit Restklassenkörper isomorph zu  $k = A/\mathfrak{m}$ . Nach (d) existiert also ein Schnitt  $s : \text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B_b)$ , d.h., ein  $A$ -Homomorphismus  $B_b \rightarrow A$  und dies liefert ein  $c \in A^n$  mit  $f_i(c) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $\bar{c} = a$  (da  $\mathfrak{n}$  über  $\mathfrak{m}$  liegt).

(d')  $\Rightarrow$  (a'): Sei  $f(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in A[X]$  und  $\bar{f} = g_0 \cdot h_0$  mit  $g_0$  normiert vom Grad  $\geq 1$ . Es gilt genau dann

$$f(X) = g(X) \cdot h(X) = (X^r + b_{r-1}X^{r-1} + \dots + b_0)(c_s X^s + \dots + c_0)$$

mit  $r + s = n$ , wenn  $(b_0, \dots, b_{r-1}, c_0, \dots, c_s) \in A^{n+1}$  das folgende Gleichungssystem in den  $n + 1$  Variablen  $(X_0, \dots, X_{r-1}, Y_0, \dots, Y_s)$  löst:

$$(9.1.1) \quad \begin{aligned} X_0 Y_0 &= a_0 \\ X_0 Y_1 + X_1 Y_0 &= a_1 \\ X_0 Y_2 + X_1 Y_1 + X_2 Y_0 &= a_2 \\ &\vdots \\ X_{r-1} Y_s + Y_{s-1} &= a_{n-1} \\ Y_s &= a_n \end{aligned}$$

( $n + 1$  Gleichungen). Die zugehörige Jacobische ist

$$J = \det \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} Y_0 & 0 \\ Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 & Y_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_s & \vdots \\ & Y_s & \vdots \\ & \vdots & \vdots \end{matrix}}^r & \overbrace{\begin{matrix} X_0 & 0 \\ X_1 & X_0 \\ X_2 & & X_0 \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ & \vdots & \\ & 1 & \\ & \vdots & 1 \end{matrix}}^s \end{pmatrix}$$

Dies ist gerade  $\text{Res}(G, H)$ , die Resultante von

$$\begin{aligned} G &= x^r + X_{r-1}x^{r-1} + \dots + X_0 \\ H &= Y_s x^s + Y_{s-1}x^{s-1} + \dots + Y_0 \end{aligned}$$

(siehe etwa Bosch 'Algebra', Kap. 4.4). Nach (d') gibt es also eine Lösung von (9.1.1), wenn  $\text{Res}(g_0, h_0) \neq 0$  in  $k$  (da dann der Vektor  $(\bar{b}, \bar{c})$  der Koeffizienten von  $g_0$  bzw.  $h_0$  das System

(9.1.1) modulo  $\mathfrak{m}$  löst und  $J(\bar{b}, \bar{c}) \neq 0$  ist). Aber nach klassischer Algebra (loc. cit. Korollar 8) ist  $Res(g_0, h_0)$  genau dann 0, wenn  $\deg(g_0) < r$  und  $\deg(h_0) < s$ , oder wenn  $g_0$  und  $h_0$  einen gemeinsamen Faktor haben; beides ist nach Voraussetzung nicht der Fall.

**Corollar 9.4** Ist  $A$  henselsch, so auch jeder lokale Ring  $B$ , der endlich über  $A$  ist, also insbesondere jeder Faktoring  $A/J$ .

**Beweis:** Dies folgt mit Kriterium 9.1 (b), da eine endliche  $B$ -Algebra auch endlich über  $A$  ist.

**Corollar 9.5** Ist  $A$  henselsch, so ist der Funktor

$$B \mapsto B \otimes_A k = B/\mathfrak{m}B$$

eine Kategorieäquivalenz

$$\left( \begin{array}{c} \text{endliche étale} \\ A\text{-Algebren} \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left( \begin{array}{c} \text{endliche étale} \\ k\text{-Algebren} \end{array} \right).$$

**Beweis:** Dies folgt mit den Kriterien 9.1(b), (b') und (d). Details: selbst!

Jeder Körper ist ein henselscher Ring, ebenso jeder artinsche Ring (da jeder artinsche Ring Produkt von lokalen Ringen ist). Außerdem gilt:

**Proposition 9.6** Jeder vollständige lokale Ring ist henselsch.

**Beweis** Wir benutzen Kriterium 9.1 (d). Sei  $B$  eine étale  $A$ -Algebra, und sei  $s_0 : B/\mathfrak{m}B \rightarrow k$  ein Schnitt von  $k \rightarrow B/\mathfrak{m}B$ . Um einen Schnitt

$$s : B \rightarrow A \cong \varprojlim_r A/\mathfrak{m}^r$$

von  $A \rightarrow B$  zu finden, genügt es, kompatible  $A$ -lineare Abbildungen

$$s_r : B \rightarrow A/\mathfrak{m}^r$$

zu finden. Für  $r = 1$  nehmen wir  $s_1 : B \xrightarrow{\text{can}} B/\mathfrak{m} \xrightarrow{s_0} A/\mathfrak{m} = k$ . Ist nun  $s_r$  für ein  $r \geq 1$  gefunden, so folgt die Existenz von  $s_{r+1}$  aus der formalen Glattheit von  $B$  über  $A$  (Koh. Sch., Definition 4.2): Im folgenden Diagramm existiert der Lift  $s_{r+1}$  von  $s_r$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s_r} & A/\mathfrak{m}^r \\ \uparrow & \searrow s_{r+1} & \uparrow \varphi_r \\ A & \longrightarrow & A/\mathfrak{m}^{r+1}, \end{array}$$

da  $\ker(\varphi_r) = \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$  ein nilpotentes Ideal ist.

**Lemma/Definition 9.7** Sei  $A$  ein lokaler Ring. Es gibt einen henselschen Ring  $A^h$  mit der folgenden universellen Eigenschaft: Es gibt einen lokalen Homomorphismus  $i : A \rightarrow A^h$ ,

und jeder lokale Homomorphismus  $\varphi : A \rightarrow B$  in einem henselschen lokalen Ring  $B$  faktorisiert eindeutig über  $i$  (es gibt genau einen Homomorphismus  $\tilde{\varphi}$ , der folgendes Diagramm kommutativ macht):

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A^h \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & & B \end{array}$$

$A^h$  heißt die Henselierung von  $A$ .

Zur Konstruktion von  $A^h$  benötigen wir

**Definition 9.8** Sei  $A$  lokal mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$ . Eine étale (bzw. essentiell étale) Umgebung von  $(A, \mathfrak{m})$  ist ein Paar  $(B, \mathfrak{n})$ , so dass  $B$  eine étale  $A$ -Algebra ist (bzw. eine Lokalisierung einer solchen) und  $\mathfrak{n} \subseteq B$  ein Ideal über  $\mathfrak{m}$ , so dass die induzierte Abbildung  $k = A/\mathfrak{m} \rightarrow B/\mathfrak{n} = k(\mathfrak{n})$  ein Isomorphismus ist (Es folgt, dass  $\mathfrak{n}$  ein maximales Ideal ist).

**Lemma 9.9** (a) Sind  $(B, \mathfrak{n})$  und  $(B', \mathfrak{n}')$  (essentiell) étale Umgebungen von  $(A, \mathfrak{m})$  mit  $\text{Spec}(B')$  zusammenhängend, so gibt es höchstens einen  $A$ -Homomorphismus  $f : B \rightarrow B'$  mit  $f^{-1}(\mathfrak{n}') = \mathfrak{n}$ .

(b) Sind  $(B, \mathfrak{n})$  und  $(B', \mathfrak{n}')$  (essentiell) étale Umgebungen von  $(A, \mathfrak{m})$ , so gibt es eine (essentiell) étale Umgebung  $(B'', \mathfrak{n}'')$  von  $A$  und  $A$ -Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} B & & \\ & \searrow f & \\ & & B'' \\ & \nearrow f' & \\ B' & & \end{array}$$

mit  $f^{-1}(\mathfrak{n}'') = \mathfrak{n}$  und  $(f')^{-1}(\mathfrak{n}'') = \mathfrak{n}'$ .

**Beweis:** (a) folgt aus dem folgenden allgemeineren Resultat:

**Lemma 9.10** Seien  $f, g : Y' \rightarrow Y$  Morphismen von  $X$ -Schemata, wobei  $Y'$  zusammenhängend ist und  $Y$  étale und separiert über  $X$  ist. Gibt es einen Punkt  $y' \in Y'$  mit  $f(y') = g(y') = y$  und so dass die von  $f$  und  $g$  induzierten Abbildungen  $k(y) \rightarrow k(y')$  übereinstimmen, so ist  $f = g$ .

**Beweis** Seien  $\Gamma_f, \Gamma_g : Y' \rightarrow Y' \times_X Y$  die Graphen von  $f$  bzw.  $g$  ( $\Gamma_f = (id_{Y'}, f)$ , analog für  $g$ ). Dies sind Schnitte von  $pr_1 : Y' \times_X Y \rightarrow Y'$ , und  $pr_1$  ist étale und separiert, als Basiswechsel von  $Y \rightarrow X$ . Die Voraussetzung impliziert, dass  $\Gamma_f(y') = \Gamma_g(y')$  (Man benötigt auch die Bedingung an  $k(y) \rightarrow k(y')$ , wie das Beispiel  $y = Y' = \text{Spec}(k')$ ,  $k'$  endlich galoisch/ $k$ ,  $X = \text{Spec } k$ , zeigt!). Aus Alg. Geo. III, Corollar 3.13 folgt nun, dass  $\Gamma_f = \Gamma_g$ , also die Behauptung, da  $f = pr_2 \circ \Gamma_f$  und  $g = pr_2 \circ \Gamma_g$ .

Für (b) betrachte  $B'' = B \otimes_A B'$ . Die Homomorphismen  $B \rightarrow k(\mathfrak{n}) = k$  und  $B' \rightarrow k(\mathfrak{n}') = k$  induzieren einen Homomorphismus  $\alpha : B'' \rightarrow k$ . Sei  $\mathfrak{n}'' = \ker \alpha$ , dann leistet  $(B'', \mathfrak{n}'')$  das Verlangte.

Hieraus folgt, dass die zusammenhängenden étalen (bzw. essentiell étalen) Umgebungen von  $A$  ein induktives System bilden, und wir definieren

$$(A^h, \mathfrak{m}^h) = \varinjlim_{\substack{(B, \mathfrak{n}) \text{ étale} \\ \text{Umgeb. von } (A, \mathfrak{m})}} (B, \mathfrak{n}) = \varinjlim_{\substack{(B, \mathfrak{n}) \text{ ess. étale} \\ \text{Umgeb. von } (A, \mathfrak{m})}} (B, \mathfrak{n}).$$

Beachte: die étalen  $A$ -Algebren  $B$  sind von endlicher Präsentation und bilden daher ohne Einschränkung eine Indexmenge.

1)  $A^h$  ist lokal mit maximalen Ideal  $\mathfrak{m}^h$ : Es genügt zu zeigen, dass  $A^h \setminus \mathfrak{m}^h$  aus Einheiten besteht. Sei  $x \in A^h$ , repräsentiert durch  $y \in B$ ,  $(B, \mathfrak{n})$  étale Umgebung von  $(A, \mathfrak{m})$ . Ist  $x \notin \mathfrak{m}^h$ , so ist  $y \notin \mathfrak{n}$ , also  $y$  Einheit in  $B_{\mathfrak{n}}$ . Daher existiert ein  $b \in B - \mathfrak{n}$ , so dass  $y$  eine Einheit in  $B_b$  ist. Dann ist  $(B_b, \mathfrak{n}_b)$  eine étale Umgebung von  $(A, \mathfrak{m})$ , und das Bild des Inversen von  $y$  in  $B_b$  ist ein Inverses von  $x$ , d.h.,  $x$  ist eine Einheit.

2) Offenbar gilt  $k \xrightarrow{\sim} \varinjlim B/\mathfrak{n}_B = A^h/\mathfrak{m}^h$ .

3)  $A \rightarrow A^h$  ist ein lokaler Homomorphismus, da  $\mathfrak{m}$  in  $\mathfrak{m}^h$  abgebildet wird.

4)  $A^h$  ist henselsch: Wir benutzen das Schnittkriterium 9.1 (d): Sei  $A^h \rightarrow C$  étale,  $\mathfrak{c} \subseteq C$  ein Ideal über  $\mathfrak{m}^h$  mit  $k = k(\mathfrak{m}^h) \xrightarrow{\sim} k(\mathfrak{c})$ . Da  $C$  von endlichem Typ über  $A^h = \varinjlim B$  ist, existiert eine étale Umgebung  $(B_0, \mathfrak{n}_0)$  von  $(A, \mathfrak{m})$  mit  $C = B_0 \otimes_A A^h$  (Betrachte eine Präsentation  $C = A^h[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_m \rangle$  und ein  $B_0$ , so dass die endlich vielen Koeffizienten der  $f_i$  im Bild von  $B_0 \rightarrow A^h$  liegen). Damit erhalten wir einen Schnitt

$$C = B_0 \otimes_A \varinjlim B \rightarrow \varinjlim B$$

von  $A^h \rightarrow C$  wie folgt: Wir betrachten ohne Einschränkung die kofinale Familie der étalen Umgebungen  $(B, \mathfrak{n})$  mit (eindeutig bestimmten!) Morphismus  $(B_0, \mathfrak{n}_0) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ , und dann ist der obige Homomorphismus induziert von den Homomorphismen

$$B_0 \otimes_A B \rightarrow B \quad , \quad b_0 \otimes b \mapsto b_0 b.$$

5) Universelle Eigenschaft: Sei  $(C, \mathfrak{n}_C)$  henselsch und  $\varphi : A \rightarrow C$  ein lokaler Morphismus. Wir suchen den Homomorphismus  $\tilde{\varphi}$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A^h \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & & C \end{array}$$

in eindeutiger Weise kommutativ macht. Es genügt zu zeigen: Für alle étalen Umgebungen  $(B, \mathfrak{n})$  von  $(A, \mathfrak{m})$  existiert genau ein Homomorphismus  $\varphi_B$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \varphi_B \\ & & C \end{array}$$

kommutativ macht. Äquivalent ist: In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & B \otimes_A C \\ & \searrow \varphi & \swarrow \psi \\ & & C \end{array}$$

existiert genau ein  $A$ -linearer Schnitt  $B \otimes_A C \rightarrow C$  von  $\psi$ . Aus  $k = A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{n}$  erhalten wir aber einen surjektiven Homomorphismus  $\psi : B \otimes_A C \rightarrow C/\mathfrak{n}_C$  und einen Isomorphismus  $C/\mathfrak{n}_C \xrightarrow{\sim} (B \otimes_A C)/\ker(\psi)$ . Da  $C$  henselsch ist, erhalten wir also nach 9.1 (d) einen Schnitt von  $C \rightarrow B \otimes_A C$  wie gewünscht. Dieser ist eindeutig nach Alg. Geo. III, Corollar 3.13.

**Proposition 9.11** (a)  $A^h$  ist flach über  $A$ .

(b) Seien

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \varprojlim_r A/\mathfrak{m}^r \\ \hat{A}^h &= \varprojlim_r A^h/(\mathfrak{m}^h)^r\end{aligned}$$

die Kompletterungen von  $A$  bzw.  $A^h$ . Dann ist  $\hat{A} \xrightarrow{\sim} \hat{A}^h$  ein Isomorphismus.

**Beweis** (a):  $A^h$  ist flach als direkter Limes von flachen  $A$ -Algebren (Das Tensorprodukt vertauscht mit direkten Limiten).

(b) Es genügt zu zeigen, dass  $A/\mathfrak{m}^r \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{n}^r$  für alle étalen Umgebungen  $(B, \mathfrak{n})$  von  $(A, \mathfrak{m})$ . Aber  $A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{n}$  und  $\mathfrak{m}B = \mathfrak{n}$  nach Voraussetzung; also  $\mathfrak{m}^r B = \mathfrak{n}^r$  für alle  $r$  und

$$(9.11.1) \quad \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1} \cong \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1} \otimes_{A/\mathfrak{m}} B/\mathfrak{n} \cong \mathfrak{m}^r B/\mathfrak{m}^{r+1} B = \mathfrak{n}^r/\mathfrak{n}^{r+1}$$

woraus die Isomorphie  $A/\mathfrak{m}^r \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{n}^{r+1}$  induktiv folgt, mit dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1} & \longrightarrow & A/\mathfrak{m}^{r+1} & \longrightarrow & A/\mathfrak{m}^r & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{n}^r/\mathfrak{n}^{r+1} & \longrightarrow & B/\mathfrak{n}^{r+1} & \longrightarrow & B/\mathfrak{n}^r & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Die mittlere Isomorphie in (9.11.1) erhalten wir aus der Flachheit von  $B$  über  $A$ : Deswegen erhalten wir nämlich aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}^{r+1} \rightarrow \mathfrak{m}^r \rightarrow \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1} \rightarrow 0$$

die Exaktheit der oberen Zeile im kommutativen Diagramm

$$(9.11.2) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m}^{r+1} \otimes_A B & \longrightarrow & \mathfrak{m}^r \otimes_A B & \longrightarrow & \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1} \otimes_A B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m}^{r+1} B & \longrightarrow & \mathfrak{m}^r B & \longrightarrow & \mathfrak{m}^r B/\mathfrak{m}^{r+1} B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

und die vertikalen Isomorphismen, da die Injektion  $\mathfrak{m}^r \hookrightarrow A$  wegen Flachheit von  $B$  über  $A$  eine Injektion  $\mathfrak{m}^r \otimes_A B \rightarrow A \otimes_A B = B$  mit Bild  $\mathfrak{m}^r B$  induziert (entsprechend für  $r+1$ ). Daher ist die rechte vertikale Abbildung ein Isomorphismus.

**Bemerkung 9.12** Man kann zeigen:

(a) Ist  $A$  noethersch, so ist  $A^h$  auch noethersch.

(b) Sei  $A$  integer und normal, mit Quotientenkörper  $K$ . Sei  $K_s$  ein separabler Abschluss von  $K$ ,  $A_s$  der ganze Abschluss von  $A$  in  $K_s$ ,  $\overline{\mathfrak{m}} \subset A_s$  ein maximales Ideal über  $\mathfrak{m}$  und  $Z_{\overline{\mathfrak{m}}} \subset \text{Gal}(K_s/K) = G_K$  die Zerlegungsgruppe, so ist  $A^h = A_s^{Z_{\overline{\mathfrak{m}}}}$ .

**Definition 9.13** Sei  $X$  ein Schema und  $x \in X$  ein Punkt. Eine étale Umgebung von  $x$  ist ein Paar  $(U, y)$ , mit  $f : U \rightarrow X$  étale,  $f(y) = x$  und  $k(x) \xrightarrow{\sim} k(y)$ .

**Lemma 9.14** (a) Mit den offensichtlichen Morphismen  $(U, y) \rightarrow (U', y')$ , nämlich

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & U' \\ & \searrow & \swarrow \\ & & X \end{array} \quad , \quad y \longmapsto y' ,$$

bilden diese eine kofiltrierende Kategorie.

(b) Es ist

$$\mathcal{O}_{X,x}^h = \varinjlim_{\substack{U \text{ étale} \\ \text{Umgeb. von } x}} \Gamma(U, \mathcal{O}_U) = \varinjlim_{\substack{(U,y) \text{ étale} \\ \text{Umgeb. von } x}} \mathcal{O}_{U,y} .$$

**Beweis** Analog zum Beweis von 9.7.

**Definition 9.15** Ein **strikt henselscher Ring** ist ein henselscher Ring, dessen Restklassenkörper separabel abgeschlossen ist.

**Lemma 9.16** (a) Zu jedem lokalen Ring  $(A, \mathfrak{m})$  existiert ein strikt henselscher Ring  $(A^{sh}, \mathfrak{m}^{sh})$  und ein lokaler Morphismus  $i : A \rightarrow A^{sh}$ , der die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Ist  $\varphi : A \rightarrow C$  ein lokaler Morphismus in einem strikt henselschen Ring  $(C, \mathfrak{m}_C)$ , und ist eine  $k = A/\mathfrak{m}$ -Einbettung

$$\varphi_0 : A^{sh}/\mathfrak{m}^{sh} \rightarrow C/\mathfrak{m}_C$$

vorgegeben, so existiert genau ein lokaler Morphismus  $\tilde{\varphi} : A^{sh} \rightarrow C$ , der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & A^{sh} \\ & \searrow \varphi & \swarrow \exists! \tilde{\varphi} \\ & & C \end{array}$$

kommutativ macht und die Einbettung  $\varphi_0$  der Restklassenkörper induziert.

(b) Für ein Schema  $X$ , einen Punkt  $x \in X$  und einen geometrischen Punkt  $\bar{x}$  von  $X$  über  $x$  ist

$$\mathcal{O}_{X,x}^{sh} \cong \mathcal{O}_{X,\bar{x}} := \varinjlim_{\substack{U \text{ étale} \\ \text{Umgeb. von } \bar{x}}} \Gamma(U, \mathcal{O}_U) = \varinjlim_{\substack{U \text{ étale} \\ \text{Umgeb. von } \bar{x}}} \mathcal{O}_{U, \text{Bild von } \bar{x}} .$$

**Beweis** Analog zu 9.7.

**Lemma 9.17** Sei  $X$  ein strikt lokales Schema, also das Spektrum eines strikt lokalen Rings. Sei  $x$  der abgeschlossene Punkt, betrachtet als geometrischer Punkt von  $X$ . Dann gibt es für Garben  $\mathcal{F}$  auf  $X$  einen funktoriellen Isomorphismus

$$F_x \cong H^0(X, \mathcal{F})$$

und es ist  $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$  für  $q > 0$ .

**Beweis:** Sei  $X'$  eine étale Umgebung von  $x$ . Nach 9.16 existiert genau ein lokaler Schnitt von  $X' \rightarrow X$ , so dass  $X$  initial in der Menge aller étalen Umgebungen von  $x$  ist. Nach 9.14 (b) ist also  $F_x \cong H^0(X, \mathcal{F})$ , funktoriell in  $\mathcal{F}$ . Da der Halmfunctor exakt ist, ist  $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$  für  $q > 0$ .

**Lemma 9.18** Sei  $f : X \rightarrow Y$  ein endlicher Morphismus, wobei  $Y$  ein strikt lokales Schema ist. Für eine étale Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  gilt dann

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{F}) &\cong \prod_{x \in X_y} F_x \\ H^q(X, \mathcal{F}) &= 0 \quad \text{für } q > 0. \end{aligned}$$

**Beweis** Da  $X \rightarrow Y$  endlich ist und  $Y$  strikt lokal, ist

$$X = \prod_x \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}),$$

wobei  $x$  über die endlich vielen abgeschlossenen Punkte von  $X$  läuft, die gerade die Punkte über den abgeschlossenen Punkten  $y$  von  $Y$  sind (siehe Lemma 9.1). Jeder der Ringe  $\mathcal{O}_{X,x}$  ist henselsch (siehe Lemma 9.1), und sogar strikt henselsch, da  $k(x)$  als endliche Erweiterung des separabel abgeschlossenen Körpers  $k(y)$  wieder separabel abgeschlossen ist.

## 10 Beispiele von étalen Garben

Zuerst betrachten wir durch Schemata dargestellte Garben (von Mengen).

**Bemerkung 10.1** In einer Kategorie  $\mathcal{X}$  ist ein Morphismus  $f : Y \rightarrow X$  genau dann ein Epimorphismus, wenn für jedes Objekt  $Z$  in  $\mathcal{X}$  der Morphismus

$$f^* : \text{Hom}(X, Z) \rightarrow \text{Hom}(Y, Z)$$

injektiv ist.

**Definition 10.2** Sei  $\mathcal{X}$  eine Kategorie mit Faserprodukten. Ein Morphismus  $f : Y \rightarrow X$  heißt **striker Epimorphismus**, wenn für alle Objekte  $Z$  in  $\mathcal{X}$  die Sequenz

$$Y \times_X Y \begin{array}{c} \xrightarrow{pr_1} \\ \xrightarrow{pr_2} \end{array} Y \xrightarrow{f} X$$

exakt ist, d.h.,  $f$  der Differenzkern von  $pr_1$  und  $pr_2$  ist, d.h., wenn für alle Objekte  $Z$  in  $\mathcal{X}$  die Sequenz

$$\text{Hom}(X, Z) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(Y, Z) \begin{array}{c} \xrightarrow{pr_1^*} \\ \xrightarrow{pr_2^*} \end{array} \text{Hom}(Y \times_X Y, Z)$$

exakt ist, d.h.,  $f^*$  der Differenzkern von  $pr_1^*$  und  $pr_2^*$  ist (Dies bedeutet insbesondere, dass  $f^*$  injektiv für alle  $Z$  ist, d.h., dass  $f$  ein Epimorphismus ist).

**Definition 10.3** Ein Morphismus von Schemata  $f : Y \rightarrow X$  heißt **treuflach**, wenn  $f$  flach und surjektiv ist.

Das folgende Lemma zeigt, dass dies für affine Schemata mit Alg. Geo. III, Definition 8.9 übereinstimmt.

**Lemma 10.4** Sei  $\varphi : A \rightarrow B$  ein flacher Ringhomomorphismus. Dann ist äquivalent

- (a)  $\varphi$  ist treuflach, d.h., für einen  $A$ -Modul  $M$  ist  $M = 0$ , wenn  $M \otimes_A B = 0$  ist.
- (b) Eine Sequenz  $M' \rightarrow M \rightarrow M''$  von  $A$ -Moduln ist exakt, wenn  $B \otimes_A M' \rightarrow B \otimes_A M \rightarrow B \otimes_A M''$  exakt ist.
- (c)  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  ist surjektiv.
- (d) Für jedes maximale Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $A$  ist  $\mathfrak{m}B \neq B$ .

**Beweis** (a)  $\Rightarrow$  (b): Angenommen,  $M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M''$  wird exakt nach Tensorieren mit  $B$ . Wegen der Flachheit von  $B$  über  $A$  ist  $\text{im}(\psi\varphi) \otimes_A B = \text{im}((\psi \otimes id) \circ (\varphi \otimes id)) = 0$ , nach (a) also  $\text{im}(\psi\varphi) = 0$ , d.h.,  $\psi\varphi = 0$ . Ebenso ist  $\ker(\psi)/\text{im}(\varphi) \otimes_A B = \ker(\psi \otimes id)/\text{im}(\varphi \otimes id) = 0$ , also  $\ker(\psi)/\text{im}(\varphi) = 0$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a):  $0 \rightarrow M \rightarrow 0$  ist genau dann exakt, wenn  $M = 0$ .

(a)  $\Rightarrow$  (c): Für jedes Primideal  $\mathfrak{p} \subseteq A$  ist  $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \neq 0$ , also

$$\text{Spec}(\varphi)^{-1}(\mathfrak{p}) = \text{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p})) \neq \emptyset.$$

(c)  $\Rightarrow$  (d) ist klar, da die Primideale über  $\mathfrak{m}$  den Primidealen von  $B/\mathfrak{m}B$  entsprechen.

(d)  $\Rightarrow$  (a): Sei  $x \in M, x \neq 0$ , und  $N = Ax \subseteq M$ . Wegen der Flachheit von  $B$  über  $A$  genügt es zu zeigen, dass  $B \otimes_A N \neq 0$  (dann ist auch  $B \otimes_A M \neq 0$ ). Aber  $N \cong A/J$  für ein Ideal  $J \subsetneq A$ , also  $B \otimes_A N \cong B/JB$ . Ist  $\mathfrak{m} \subseteq A$  ein maximales Ideal mit  $J \subseteq \mathfrak{m}$ , so ist  $JB \subseteq \mathfrak{m}B \neq B$ , also  $B/JB \neq 0$ .

**Corollar 10.5** Ein flacher Morphismus von lokalen Ringen  $\varphi : A \rightarrow B$  ist treuflach.

**Beweis** Dies folgt aus 10.4 (d), da nach Voraussetzung  $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$  für die maximalen Ideale  $\mathfrak{m}$  und  $\mathfrak{n}$  von  $A$  bzw.  $B$ .

**Satz 10.6** Sei  $f : Y \rightarrow X$  ein Morphismus von Schemata. Ist  $f$  treuflach und von endlichem Typ, so ist  $f$  ein strikter Epimorphismus.

**Beweis** Für jedes Schema  $Z$  haben wir die Exaktheit von

$$\text{Hom}(X, Z) \rightarrow \text{Hom}(Y, Z) \rightrightarrows \text{Hom}(Y \times_X Y, Z)$$

zu zeigen.

1. *Fall*: Seien  $X = \text{Spec}(A), Y = \text{Spec}(B)$  und  $Z = \text{Spec}(C)$  alle affin. In diesem Fall identifiziert sich die obige Sequenz mit

$$\text{Hom}(C, A) \rightarrow \text{Hom}(C, B) \rightrightarrows \text{Hom}(C, B \otimes_A B),$$

und die Behauptung folgt aus der Exaktheit von

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \rightarrow B \otimes_A B \\ & & b \mapsto b \otimes 1 - 1 \otimes b \end{array},$$

die (für treuflaches  $A \rightarrow B$ ) in Alg. Geo. III, Satz 8.12 gezeigt wurde.

2. *Fall* Seien  $X = \text{Spec}(A)$  und  $Y = \text{Spec}(B)$  affin und  $Z$  beliebig. Sei  $h \in \text{Hom}(Y, Z)$  gegeben, mit  $h \circ pr_1 = h \circ pr_2$ . Wir haben zu zeigen, dass genau ein  $g \in \text{Hom}(X, Z)$  mit  $g \circ f = h$  existiert.

Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit von  $g$  (falls es existiert). Seien  $g_1, g_2 : X \rightarrow Z$  gegeben mit  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ . Dann müssen  $g_1$  und  $g_2$  als Abbildungen topologischer Räume übereinstimmen, da  $f$  surjektiv ist. Sei  $x \in X$ , und sei  $U$  eine affine offene Umgebung von  $g_1(x) = g_2(x)$  in  $Z$ . Dann gibt es ein  $a \in A$  mit  $g_1(D(a)) = g_2(D(a)) \subseteq U$ . Weiter ist  $B_a$  treuflach über  $A_a$ . Aus dem 1. Fall folgt also  $g_1|_{D(a)} = g_2|_{D(a)}$  als Schema-Morphismen, also die Eindeutigkeit von  $g$ .

Sei nun  $h : Y \rightarrow Z$  mit  $h \circ pr_1 = h \circ pr_2$  gegeben. Wegen der bewiesenen Eindeutigkeit von  $g$  genügt es,  $g$  lokal zu definieren. Sei  $x \in X, y \in Y$  mit  $f(y) = x$ , und  $U \subseteq Z$  eine affine offene Umgebung von  $h(y)$  in  $Z$ . Wir benutzen nun

**Lemma 10.7** Sei  $f : Y \rightarrow X$  flach und von endlichem Typ. Dann ist  $f$  eine offene Abbildung.

**Beweis** Siehe Milne, ‘Etale Cohomology’, S. 14, Th. 2.1.

In unserer Situation ist also  $f(h^{-1}(U))$  offen in  $X$ . Wir haben ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
& y & x \\
Y \times_X Y \rightrightarrows & Y & \xrightarrow{f} X = \text{Spec}(A) \\
& \downarrow h & \\
& h(y) \in U \subseteq Z &
\end{array}$$

Nach 10.7 existiert ein  $a \in A$  mit  $x \in D(a) \subseteq f(h^{-1}(U))$ . Dann ist  $f^{-1}(D(a)) \subseteq h^{-1}(U)$ , denn ist  $x_1 \in D(a)$ , also  $x_1 = f(y_1)$  mit  $h(y_1) \in U$ , und ist  $y_2 \in Y$  mit  $f(y_2) = x_1$ , so gibt es wegen  $f(y_1) = f(y_2)$  ein  $y' \in Y \times_X Y$  mit  $pr_1(y') = y_1$  und  $pr_2(y') = y_2$  (betrachte einen Punkt von  $y_1 \times_{x_1} y_2$  und dessen Bild in  $Y \times_X Y$ ). Es folgt

$$h(y_2) = h pr_2(y') = h pr_1(y') = h(y_1) \in U,$$

also  $y_2 \in h^{-1}(U)$ .

Ist  $b \in B$  das Bild von  $a$ , so ist  $D(b) = f^{-1}(D(a))$ , also  $h(D(b)) \subseteq U$ , und nach dem 1. Fall erhalten wir  $g|_{D(a)}$ . Wie vorher erklärt, verkleben sich diese lokalen Lösungen zu einem globalen  $g$ .

3. *Fall*: Seien  $X, Y$  und  $Z$  beliebig. Es ist leicht, auf den Fall zu reduzieren, wo  $X$  affin ist (wähle eine affine offene Überdeckung und deren Urbild in  $Y$ ; wegen der Eindeutigkeit verkleben sich die Morphismen  $g$  auf der Überdeckung). Da  $f$  quasi-kompakt ist, ist  $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$  dann endliche Vereinigung von affinen offenen Teilmengen. Sei

$$Y^* = \coprod_{i=1}^n Y_i.$$

Dann ist  $Y^*$  affin und  $Y^* \rightarrow Y$  treufach. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Hom}(X, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(Y, Z) & \rightrightarrows & \text{Hom}(Y \times_X Y, Z) \\
\parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{Hom}(X, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}(Y^*, Z) & \rightrightarrows & \text{Hom}(Y^* \times_X Y^*, Z),
\end{array}$$

in dem die untere Zeile nach dem 2. Fall exakt ist. Weiter ist die mittlere vertikale Abbildung offenbar injektiv ( $\text{Hom}(-, Z)$  ist eine Zariski-Garbe auf  $Y$ ). Die Exaktheit der oberen Zeile folgt nun durch eine Diagrammjagd.

Bevor wir Satz 10.6 zur Konstruktion von Garben verwenden, stellen wir noch ein nützliches Garbenkriterium vor.

**Proposition 10.8** Eine Prägarbe  $P$  (von Mengen oder abelschen Gruppen) auf  $X_{\text{ét}}$  (bzw.  $X_{\text{fl}}$ ) ist genau dann eine Garbe, wenn gilt:

- (a) Für jedes  $U \in X_{\text{ét}}$  (bzw.  $X_{\text{fl}}$ ) ist die Restriktion von  $P$  auf  $U$  eine Zariski-Garbe.
- (b) Für jede étale Überdeckung  $(U' \rightarrow U)$ , wobei  $U$  und  $U'$  affin sind, ist

$$P(U) \rightarrow P(U') \rightrightarrows P(U' \times_U U')$$

exakt.

**Beweis** Offenbar sind die Bedingungen notwendig. Gilt umgekehrt (a), so gilt für jede disjunkte Summe  $V = \coprod_j V_j$  von Schemata

$$P(V) = \prod_j P(V_j).$$

Für eine Überdeckung  $(U_i \rightarrow U)$  ist also die Sequenz

$$(10.8.1) \quad P(U) \rightarrow \prod_i P(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} P(U_i \times_U U_j)$$

isomorph zur Sequenz

$$(10.8.2) \quad P(U) \rightarrow P(U') \rightrightarrows P(U' \times_U U')$$

für die Überdeckung  $U' \rightarrow U$  mit  $U' = \coprod_i U_i$ , denn

$$(\coprod_i U_i) \times_U (\coprod_i U_i) \cong \prod_{i,j} U_i \times_U U_j.$$

Gilt (b), so ist die Sequenz (10.8.1) für jede Überdeckung  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  mit endlichem  $I$  und affinen  $U_i$  und  $U$  exakt, da dann  $\coprod_i U_i$  affin ist:  $\text{Spec}(A) \coprod \text{Spec}(B) \cong \text{Spec}(A \times B)$ . Für beliebiges  $(U'_j \rightarrow U)$  schreibe  $U$  als die Vereinigung von affinen offenen Mengen  $U_i$ ,  $U = \cup_i U_i$ , und schreibe  $f : U' = \coprod_j U'_j \rightarrow U$ . Dann ist  $f^{-1}(U_i) = \cup_{k \in K_i} U'_{ik}$  mit affinen offenen

Teilmengen  $U'_{ik} \subseteq f^{-1}(U_i)$ . Da  $U' \rightarrow U$  flach und lokal von endlichem Typ ist, ist  $U'_{ik} \rightarrow U_i$  von endlichem Typ (da beide Schemata affin ist), also  $f(U'_{ik})$  offen in  $U_i$  nach Lemma 10.7. Da  $U_i$  (als affines Schema) quasi-kompakt ist, gibt es daher eine endliche Indexmenge  $E_i \subseteq K_i$  mit  $U_i = \cup_{k \in E_i} f(U'_{ik})$ , d.h.,  $(U'_{ik} \rightarrow U_i)_{k \in E_i}$  ist eine Überdeckung. Indem wir alle Morphismen der Form  $U'_{ik} \rightarrow f(U'_{ik})$  für  $k \in K_i - E_i$  hinzunehmen, können wir annehmen, dass alle  $K_i$  endlich sind, und  $U' = UU'_{ik}$ . Betrachte dann das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} P(U) & \longrightarrow & P(U') & \rightrightarrows & P(U' \times_U U') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_i P(U_i) & \longrightarrow & \prod_i \prod_k P(U'_{ik}) & \rightrightarrows & \prod_i \prod_{k,\ell} P(U'_{ik} \times_U U'_{i\ell}) \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow \\ \prod_{i,j} P(U_i \times_U U_j) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \prod_{k,\ell} P(U'_{ik} \cap U'_{j\ell}) & & \end{array}$$

Nach 10.8 (a) sind die beiden ersten Spalten exakt, und nach der Vorbemerkung über (b) ist die zweite Zeile exakt ( $k$  läuft in der endlichen Menge  $K_i$  für die  $U'_{ik}$ ). Daher ist  $P(U) \hookrightarrow P(U')$  injektiv, also die Prägarbe  $P$  separiert (da  $(U_i \rightarrow U)$  beliebig war). Hieraus folgt wiederum die Injektivität des unteren Pfeils. Eine leichte Diagrammjagd zeigt nun die Exaktheit der oberen Zeile.

**Corollar 10.9** Für jedes  $X$ -Schema  $Z$  ist der durch  $Z$  dargestellte Funktor

$$\text{Hom}_X(-, Z) : U \mapsto Z(U) := \text{Hom}_X(U, Z)$$

eine Garbe von Mengen auf  $X_{\text{ét}}$  und  $X_{\text{fl}}$ .

**Beweis** Bedingung 10.8 (a) ist bekannt (Verkleben von Morphismen). Bedingung 10.8 (b) folgt aus Satz 10.6: Ist  $f : U' \rightarrow U$  ein surjektiver étaler (oder flacher)  $X$ -Morphismus, mit  $U$  und  $U'$  affin, so ist  $f$  treufach und von endlichem Typ, nach 10.6 also

$$\text{Hom}(U, Z) \rightarrow \text{Hom}(U', Z) \rightrightarrows \text{Hom}(U' \times_U U', Z)$$

exakt. Seien  $\pi_U : U \rightarrow X, \pi_{U'} : U' \rightarrow X$  und  $\pi_Z : Z \rightarrow X$  die Strukturmorphismen. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_X(U, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_X(U', Z) & \rightrightarrows & \text{Hom}_X(U' \times_U U', Z) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(U, Z) & \hookrightarrow & \text{Hom}(U', Z) & \rightrightarrows & \text{Hom}(U \times_U U', Z) \\ \downarrow (\pi_Z)_* & & \downarrow (\pi_Z)_* & & \downarrow (\pi_Z)_* \\ \text{Hom}(U, X) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}(U', X) & & \\ \pi_U \vdash & \longrightarrow & \pi_{U'} & & \end{array}$$

in dem die mittlere Zeile für alle Schemata  $Z$  exakt ist, so dass auch der untere Morphismus  $f^*$  injektiv ist. Weiter gilt

$$\text{Hom}_X(U, Z) = \{g \in \text{Hom}(U, Z) \mid (\pi_Z)_*(g) = \pi_Z g = \pi_U\},$$

entsprechend für  $\text{Hom}_X(U', Z)$ . Hieraus folgt die Exaktheit der oberen Zeile im Diagramm.

**Corollar 10.10** Für jedes (abelsche) Gruppenschema  $G$  über  $X$  ist der durch  $G$  dargestellte Funktor eine Garbe von (abelschen) Gruppen auf  $X_{\text{ét}}$  und  $X_{\text{fl}}$ .

**Beispiele 10.11** (a) Die Garbe  $\mathbb{G}_{a,X} = X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \mathbb{G}_{a,\mathbb{Z}} = X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \text{Spec}(\mathbb{Z}[T])$  liefert für jedes  $X$ -Schema  $U$

$$\mathbb{G}_{a,X}(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U),$$

und heißt die additive Gruppe über  $X$ .

(b) Die Garbe  $\mathbb{G}_{m,X} = X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \mathbb{G}_m$ , mit  $\mathbb{G}_m = \text{Spec}(\mathbb{Z}[T, T^{-1}])$  liefert für jedes  $X$ -Schema  $U$

$$\mathbb{G}_{m,X}(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times = \Gamma(U, \mathcal{O}_U^\times),$$

und heißt die multiplikative Gruppe über  $X$ .

(c) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mu_n$  die Garbe  $X \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} \text{Spec}(\mathbb{Z}[T]/\langle T^n - 1 \rangle)$ . Diese liefert für jedes  $X$ -Schema  $U$

$$\mu_n(U) = \{a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times \mid a^n = 1\},$$

und heißt die Garbe der  $n$ -ten Einheitswurzeln.

**Lemma 10.12** Die Sequenz von Garben

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \\ a \mapsto a^n$$

ist exakt.

**Beweis:** Für jedes  $X$ -Schema  $U$  ist

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mu_n(U) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m(U) & \xrightarrow{n} & \mathbb{G}_m(U) \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & \mu_n(U) & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times & \longrightarrow & \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & a \longmapsto a^n
 \end{array}$$

exakt.

**Proposition 10.13** Sei  $n$  invertierbar auf dem Schema  $X$  ( $\Leftrightarrow$  Für alle  $x \in X$  wird  $n$  nicht von  $\text{char}(k(x))$  geteilt). Dann ist die Sequenz von étalen Garben auf  $X$

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

exakt. Für beliebiges  $n$  ist die Sequenz

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \rightarrow 1$$

von flachen Garben exakt. Die obigen Sequenzen heißen die Kummersequenzen.

**Beweis** Es ist nur zu zeigen, dass  $\mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m$  unter den gemachten Annahmen ein Epimorphismus ist. Wir benutzen das Kriterium 4.2 (d). Sei  $U$  ein Schema und  $s \in \mathbb{G}_m(U)$ . Durch Übergang zu einer affinen offenen Überdeckung ist ohne Einschränkung  $U = \text{Spec}(A)$  affin und  $s = a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^\times = A^\times$ . Dann ist  $B = A[T]/\langle T^n - a \rangle$  eine treuflache  $A$ -Algebra von endlichem Typ, also  $V = \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A) = U$  eine flache Überdeckung, und für  $a \in A^\times \subseteq B^\times$  gibt es ein  $b \in B^\times$  (nämlich das Bild von  $T$  in  $B$ ) mit  $b^n = a$ . Nach dem Exaktheitskriterium von 4.2 (d) ist  $\mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m$  also ein Epimorphismus von flachen Garben. Ist  $n$  invertierbar auf  $X$ , so ist  $n \in A^\times$  und daher  $B$  eine étale  $A$ -Algebra, also  $\mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m$  ein Epimorphismus von étalen Garben.

**Lemma 10.14** Sei  $X$  ein Schema. Für jede Gruppe  $G$  ist die zugehörige konstante Zariski, étale oder flache Garbe  $\underline{G}_X$  (d.h., die Garbe assoziiert zur konstanten Prägarbe  $G^P$  mit  $G^P(U) = G$  für alle  $U \rightarrow X$ ) darstellbar durch das Gruppenschema

$$\underline{G}_X = \coprod_{g \in G} X = \coprod_{g \in G} X_{[g]}$$

mit dem offensichtlichen Gruppengesetz.

**Beweis** Betrachte die Kategorie  $\text{Sch}/X$  aller  $X$ -Schemata. Man sieht sofort, dass für jedes  $X$ -Schema  $Y$  gilt:

$$\underline{G}_X(Y) = \text{Hom}_X(Y, \underline{G}_X) = \{\varphi : Y \rightarrow G \mid \varphi \text{ lokal konstant}\}$$

(Ist  $\varphi : Y \rightarrow G$  lokal konstant gegeben, so ist  $Y = \coprod_{g \in G} \varphi^{-1}(g)$ ). Weiter ist  $\underline{G}_X$  eine Garbe für alle drei betrachteten Topologien, nach 10.10. Schließlich ist für die zu  $G$  assoziierte Zariski-Garbe  $G_X^{\text{Zar}}$

$$G_X^{\text{Zar}}(Y) = \{\varphi : Y \rightarrow G \mid \varphi \text{ lokal konstant}\}$$

(Alg. Geo. II ÜA 13). Da dies bereits eine Garbe für alle drei betrachteten Topologien liefert, folgt die Behauptung.

**Bemerkung 10.15** Ist  $X$  lokal-noethersch, so gilt

$$G_X(Y) = G^{\pi_0(Y)}$$

für alle  $Y \rightarrow X$ , die lokal von endlichem Typ (und damit wieder lokal-noethersch) sind, siehe Alg. Geo. II ÜA 13).

**Proposition 10.16** Sei  $X$  ein Schema der Charakteristik  $p > 0$  ( $\Leftrightarrow$  der Morphismus  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$  faktorisiert über  $\text{Spec}(\mathbb{F}_p) \Leftrightarrow$  für jedes offene  $U \subseteq X$  ist  $p\Gamma(U, \mathcal{O}_U) = 0$ ). Sei

$$F : \mathbb{G}_{a,X} \rightarrow \mathbb{G}_{a,X}$$

der Frobenius-Homomorphismus: Für  $U \rightarrow X$  flach (oder étale) sei

$$F : \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$$

der Ringhomomorphismus (!)

$$a \mapsto a^p$$

(dies ist additiv, da  $pa = 0$ ). Dann hat man eine exakte Sequenz von flachen (oder étalen) Garben

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_{a,X} \rightarrow 0,$$

(genannt **Artin-Schreier-Sequenz**), wobei  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_X$  die zur abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  assoziierte konstante Garbe ist, die durch das Gruppenschema

$$\underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X = X \times_{\text{Spec}(\mathbb{F}_p)} \text{Spec}(\mathbb{F}_p[T]/\langle T^p - T \rangle)$$

repräsentiert wird.

**Beweis:** Wegen

$$T^p - T = \prod_{i \in \mathbb{F}_p} (T - i)$$

in  $\mathbb{F}_p[T]$  ist

$$\mathbb{F}_p[T]/\langle T^p - T \rangle \cong \prod_{i=0}^{p-1} \mathbb{F}_p,$$

also  $\text{Spec}(\mathbb{F}_p[T]/\langle T^p - T \rangle)$  kanonisch isomorph zum konstanten Gruppenschema  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{\text{Spec}(\mathbb{F}_p)}$ . Weiter ist für jedes  $X$ -Schema  $Y$

$$\begin{aligned} \text{Hom}_X(Y, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_X) &= \text{Hom}(Y, \underline{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\mathbb{F}_p}) \\ &= \text{Hom}(\mathbb{F}_p[T]/\langle T^p - T \rangle, \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)) = \{a \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \mid a^p - a = 0\}. \end{aligned}$$

Dies zeigt auch die Exaktheit von

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_{a,X}.$$

Weiter ist  $F - 1$  ein Epimorphismus von Garben für die étale (und flache) Topologie, da für  $U = \text{Spec}(A) \subseteq Y$  affin offen und  $a \in A$

$$V = \text{Spec}(A[T]/\langle T^p - T - a \rangle) \rightarrow U$$

eine étale Überlagerung ist, so dass  $a = (F - 1)b = b^p - b$  für  $b = \text{Bild von } T \text{ in } B = A[T]/\langle T^p - T - a \rangle$ .

**Lemma/Definition 10.17** Sei wieder  $X$  ein Schema der Charakteristik  $p > 0$  und sei  $\alpha_{p,X} \subseteq \mathbb{G}_{a,X}$  die Untergarbe, die durch

$$\alpha_{p,X}(U) = \{a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U) \mid a^p = 0\}$$

definiert wird. Dann wird  $\alpha_{p,X}$  durch das Gruppenschema  $X \times_{\text{Spec}(\mathbb{F}_p)} \text{Spec}(\mathbb{F}_p[T]/\langle T^p \rangle)$  dargestellt. Die Sequenz

$$0 \rightarrow \alpha_{p,X} \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{F} \mathbb{G}_{a,X}$$

ist exakt für die Zariski oder étale Topologie. Die Sequenz

$$0 \rightarrow \alpha_{p,X} \rightarrow \mathbb{G}_{a,X} \xrightarrow{F} \mathbb{G}_{a,X} \rightarrow 0$$

ist exakt für die flache Topologie, aber im Allgemeinen nicht für die étale Topologie.

**Beweis:** Die ersten Aussagen sind klar. Der Morphismus  $F$  ist ein Epimorphismus in der flachen Topologie, weil für jede  $\mathbb{F}_p$ -Algebra  $A$  die Algebra  $B = A[T]/\langle T^p - a \rangle$  treuflach über  $A$  ist. Für einen separabel abgeschlossenen Körper  $L$  ist der Frobenius

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{F} & L \\ a & \mapsto & a^p \end{array}$$

aber im Allgemeinen nicht surjektiv, außer wenn  $L$  ein vollkommener (perfekter) Körper ist.

**Lemma/Definition 10.18** Sei  $X$  ein Schema und  $\mathcal{M}$  ein quasi-kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann ist

$$U \mapsto \Gamma(U, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U)$$

( $\pi_U : U \rightarrow X$  ein  $X$  Schema) eine Garbe auf  $(Sch/X)_{\text{fl}}$ , dem Situs aller  $X$ -Schemata mit der flachen Topologie. Hier steht  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U$  für  $\pi_U^{-1} \mathcal{M} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U = \pi_U^* \mathcal{M}$ , das quasi-kohärente Pull-Back. Insbesondere liefert dies auch eine Garbe auf den kleinen Siten  $X_{\text{ét}}$  und  $X_{\text{fl}}$ , die wir mit  $\mathcal{M}_{\text{ét}}$  bzw.  $\mathcal{M}_{\text{fl}}$  bezeichnen.

**Beweis** Wir benutzen die Kriterien aus Satz 10.8. Bedingung 10.8 (a) ist klar, da  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U$  nach Konstruktion eine Zariski-Garbe auf  $U$  ist. Für 10.8 (b) sei  $U' = \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  affin und treuflach. Dann entspricht  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U$  einem  $A$ -Modul  $M$ ,  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U$  dem  $B$ -Modul  $B \otimes_A M$ , und wir haben die Exaktheit von

$$M \rightarrow B \otimes_A M \rightrightarrows B \otimes_A B \otimes_A M$$

zu zeigen. Diese wird in Satz 14.6 bewiesen.

**Bemerkung 10.19** Der Fall  $\mathbb{G}_{a,X} = \mathcal{O}_{X,\text{ét}}$  ist ein Spezialfall.

# 11 Der Zerlegungssatz

Sei  $X$  ein Schema,  $i : Y \hookrightarrow X$  eine abgeschlossene Immersion und  $j : U \hookrightarrow X$  die offene Immersion für das offene Komplement  $U = X - Y$ .

Ist  $F$  eine étale Garbe auf  $X$ , so ist  $F_1 = i^*F$  eine étale Garbe auf  $Y$  und  $F_2 = j^*F$  eine étale Garbe auf  $U$ . Sei  $F \xrightarrow{ad} j_*j^*F$  die Adjunktions-Abbildung (die unter dem Isomorphismus  $Hom_U(j^*F, j^*F) \cong Hom_X(F, j_*j^*F)$  gerade  $id_{j^*F}$  entspricht).

Dann liefert  $i^*(ad)$  einen Morphismus

$$\phi_F : F_1 = i^*F \rightarrow i^*j_*j^*F = i^*j_*F_2.$$

Zu jeder Garbe  $F$  auf  $X$  können wir also das Tripel  $(F_1, F_2, \phi_F)$  assoziieren.

Sei  $T(X, Y)$  die Kategorie der Tripel  $(F_1, F_2, \phi)$ , wobei  $F_1$  eine étale Garbe auf  $Y$ ,  $F_2$  eine étale Garbe auf  $U$  und  $\phi : F_1 \rightarrow i^*j_*F_2$  ein Morphismus von étalen Garben auf  $Y$  ist. Morphismen

$$(F_1, F_2, \phi) \rightarrow (F'_1, F'_2, \phi')$$

sind Paare  $(\psi_1, \psi_2)$ , wobei  $\psi_1 : F_1 \rightarrow F'_1$  und  $\psi_2 : F_2 \rightarrow F'_2$  Morphismen von Garben auf  $Y$  bzw.  $U$  sind, so dass das Diagramm

$$(11.0) \quad \begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\phi} & i^*j_*F_2 \\ \psi_1 \downarrow & & \downarrow i^*j_*(\psi_2) \\ F'_1 & \xrightarrow{\phi'} & i^*j_*F'_2 \end{array}$$

kommutiert.

**Satz 11.1** Sei der Funktor

$$t : Sh(X_{\text{ét}}) \rightarrow T(X, Y)$$

wie folgt definiert:

- (i) Einer Garbe  $F \in Sh_{\text{ét}}(X)$  sei das Tripel  $(i^*F, j^*F, i^*(ad) : i^*F \rightarrow i^*j_*j^*F)$  zugeordnet.
- (ii) Einem Morphismus  $\varphi : F \rightarrow F'$  sei der Morphismus

$$\psi(\varphi) = (\psi_1 = i^*(\varphi) : i^*F \rightarrow i^*F', \psi_2 = j^*\varphi : j^*F \rightarrow j^*F')$$

zugeordnet.

Dann ist  $t$  eine Kategorienäquivalenz.

**Beweis**  $t$  ist wohldefiniert: das Tripel in (i) ist nach der Vorbemerkung in  $T(X, Y)$ , und  $\psi(\varphi)$  ist ein Morphismus in  $T(X, Y)$ , da das Diagramm

$$(11.1.1) \quad \begin{array}{ccc} i^*F & \xrightarrow{i^*(ad_F)} & i^*j_*j^*F \\ i^*(\varphi) \downarrow & & \downarrow i^*j_*j^*(\varphi) \\ i^*F' & \xrightarrow{i^*(ad_{F'})} & i^*j_*j^*F' \end{array}$$

kommutativ ist (Funktorialität der Adjunktion und dann Anwendung des Funktors  $i^*$ ).

Wir definieren nun ein Pseudo-Inverses  $s$  für  $t$ . Für ein Tripel  $(F_1, F_2, \phi)$  sei  $s(F_1, F_2, \phi) \in Sh(X_{\acute{e}t})$  das Faserprodukt von  $i_*F_1$  und  $j_*F_2$  über  $i_*i^*j_*F_2$ , also das Diagramm

$$(11.1.2) \quad \begin{array}{ccc} s(F_1, F_2, \phi) & \longrightarrow & j_*F_2 \\ \downarrow & & \downarrow ad_i \\ i_*F_1 & \xrightarrow{i_*(\phi)} & i_*i^*j_*F_2 \end{array}$$

kartesisch. Diese Zuordnung ist funktoriell, da die Bildung des Faserprodukts funktoriell ist: Jeder Morphismus

$$(\psi_1, \psi_2) : (F_1, F_2, \phi) \rightarrow (F'_1, F'_2, \phi')$$

induziert einen Morphismus

$$s(F_1, F_2, \phi) \rightarrow s(F'_1, F'_2, \phi'),$$

wegen der Kommutativität von (11.0) und der Funktorialität von  $ad_i$ . Dies liefert einen Funktor  $s : T(X, Y) \rightarrow Sh(X_{\acute{e}t})$ .

Wir konstruieren nun einen Isomorphismus von Funktoren  $id \xrightarrow{\sim} st$ .

Für jede Garbe  $F$  in  $Sh(X_{\acute{e}t})$  ist das Diagramm

$$(11.1.3) \quad \begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{ad_j} & j_*j^*F \\ ad_i(F) \downarrow & & \downarrow ad_i(j_*j^*F) \\ i_*i^*F & \xrightarrow{i_*i^*(ad_j)} & i_*i^*j_*j^*F \end{array}$$

kommutativ, wegen der Funktorialität der Adjunktionsabbildung  $ad_i$  (in Garben). Nach der universellen Eigenschaft des Faserprodukts (11.1.2) für das Tripel

$$(F_1, F_2, \phi) = (i^*F, j^*F, i^*(ad_j)) = t(F)$$

induziert (11.1.3) einen kanonischen Morphismus

$$\alpha : F \rightarrow s(i^*F, j^*F, i^*(ad_j)) = st(F).$$

Wir zeigen, dass (11.1.3) ebenfalls kartesisch ist; dann folgt, dass  $\alpha$  ein Isomorphismus ist.

Hierfür genügt es zu zeigen, dass das Diagramm kartesisch ist, wenn man zu den (geometrischen) Halmen übergeht, da die Bildung der Halme eine konservative Familie bildet.

Ist aber  $\bar{x}$  ein geometrischer Punkt über  $U$ , so erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_{\bar{x}} & \longrightarrow & F_{\bar{x}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

welches kartesisch ist. Ist  $\bar{x}$  über  $Y$  so erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_{\bar{x}} & \longrightarrow & (j_*j^*F)_{\bar{x}} \\ id \downarrow & & \downarrow id \\ F_{\bar{x}} & \longrightarrow & (j_*j^*F)_{\bar{x}} \end{array}$$

was wiederum kartesisch ist.

Weiter haben wir einen Isomorphismus von Funktoren  $ts \xrightarrow{\sim} id$ . Ist nämlich

$$(F_1, F_2, \phi : F_1 \rightarrow i^*j_*F_2)$$

ein Objekt in  $T(X, Y)$ , so ist  $s(F_1, F_2, \phi)$  durch das kartesische Diagramm

$$(11.1.4) \quad \begin{array}{ccc} s(F_1, F_2, \phi) & \longrightarrow & j_*F \\ \downarrow & & \downarrow ad_i \\ i_*F_1 & \longrightarrow & i_*i^*j_*F_2 \end{array}$$

definiert. Wenden wir den Funktor  $i^*$  an, so erhalten wir wieder ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} i^*s(F_1, F_2, \phi) & \longrightarrow & i^*j_*F_2 \\ \beta_1 \downarrow & & \downarrow id \\ F_1 & \longrightarrow & i^*j_*F_2, \end{array}$$

da  $i^*$  ein exakter Funktor ist (siehe 7.8) und  $i^*(ad_i) = id$  nach Definition der Adjunktionsabbildung  $ad_i$ , sowie kanonisch und funktoriell  $i^*i_*F_1 \xrightarrow{\sim} F_1$  für jede étale Garbe auf  $Y$  nach dem folgenden Lemma. Damit ist  $\beta_1$  ein Isomorphismus.

Entsprechend wenden wir  $j^*$  auf (11.1.4) an und erhalten das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} j^*s(F_1, F_2, \phi) & \xrightarrow{\beta_2} & j^*j_*F_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

also einen Isomorphismus

$$\beta_2 : j^*s(F_1, F_2, \phi) \xrightarrow{\beta'_2} j^*j_*F_2 \xrightarrow{\sim} F_2,$$

wobei der letzte Isomorphismus nach dem folgenden Lemma gilt.

Schließlich ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$i^*(ad_j) : \quad \begin{array}{ccc} i^*s(F_1, F_2, \phi) & \longrightarrow & i^*j_*j^*s(F_1, F_2, \phi) \\ \beta_1 \downarrow \wr & & \downarrow \wr i^*j_*(\beta_2) \\ F_1 & \xrightarrow{\phi} & i^*j_*F_2, \end{array}$$

so dass wir einen Isomorphismus

$$ts(F_1, F_2, \phi) \xrightarrow{\sim} (F_1, F_2, \phi)$$

erhalten.

**Lemma 11.2** (a) Für eine étale Garbe  $F_1$  auf  $Y$  ist die Adjunktionsabbildung  $Ad_i : i^*i_*F_1 \rightarrow F_1$  ein Isomorphismus.

(b) Für eine étale Garbe  $F_2$  auf  $U$  ist die Adjunktionsabbildung  $Ad_j : j^*j_*F_2 \rightarrow F_2$  ein Isomorphismus.

**Beweis** (a) Nach Lemma 9.18 haben wir für jedes  $y \in Y$  und jeden geometrischen Punkt  $\bar{y}$  über  $y$  einen kanonischen Isomorphismus

$$(i^*i_*\mathcal{F})_{\bar{x}} \cong (i_*\mathcal{F})_{f(\bar{x})} \cong \mathcal{F}_{\bar{x}}.$$

(b) Für eine étale Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $U$  und einen étalen Morphismus  $X' \rightarrow X$  ist nach Definition

$$j^P(j_*\mathcal{F})(U') = \varinjlim_{(X', \psi) \in I_{U'}^{op}} (j_*\mathcal{F})(X'),$$

wobei  $I_{U'}$  die Kategorie aller Paare  $(X', \psi)$  mit  $X'$  in  $X_{\text{ét}}$  und einen Morphismus  $\psi : U' \rightarrow U \times_X X'$  ist, wobei Morphismen kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} & U \times_X X'' & \\ & \nearrow & \downarrow (id \times f) \\ U' & & \\ & \searrow & \\ & U \times_X X' & \end{array}$$

mit  $f : X'' \rightarrow X'$  sind (siehe den Beweis von Proposition 3.2), und wobei  $I_{U'}^{op}$  die zu  $I_{U'}$  duale Kategorie ist.

Aber in unserer Situation hat  $I_{U'}$  das initiale Objekt  $U' \rightarrow U \times_X U'$  (mit offensichtlichem Morphismus), denn für ein Objekt  $\psi : U' \rightarrow U \times_X X'$  haben wir einen Morphismus  $\alpha : U' \rightarrow X'$  und deshalb einen kanonische Morphismus

$$\begin{array}{ccc} & U \times_X U' & \\ & \nearrow & \downarrow (id \times \alpha) \\ U' & \searrow \psi & \\ & U \times_X X' & \end{array}$$

(Beachte, dass  $U' \rightarrow U \rightarrow X$  ein étaler Morphismus ist). Hiermit folgt

$$j^P(j_*\mathcal{F})(U') = \mathcal{F}(U \times_X U') = \mathcal{F}(U').$$

Da  $\mathcal{F}$  bereits eine Garbe ist, folgt  $j^*j_*\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$ .

Da  $s$  and  $t$  inverse Abbildungen auf Morphismen induzieren (dies kann wiederum auf den Halmen berprft werden, da diese eine konservative Familie bilden), erhalten wir, dass  $t$  eine Kategorienäquivalenz mit quasi-inversem  $s$  ist.

**Bemerkung 11.3** Aus Satz 11.1 folgt insbesondere, dass  $T(X, Y) \cong SH(X_{\text{ét}})$  eine abelsche Kategorie ist. Man sieht leicht, dass eine Sequenz in  $T(X, Y)$

$$0 \rightarrow (F'_1, F'_2, \phi') \rightarrow (F_1, F_2, \phi) \rightarrow (F''_1, F''_2, \phi'') \rightarrow 0$$

genau dann exakt ist, wenn die Sequenzen

$$0 \rightarrow F'_1 \rightarrow F_1 \rightarrow F''_1 \rightarrow 0$$

und

$$0 \rightarrow F'_2 \rightarrow F_2 \rightarrow F''_2 \rightarrow 0$$

exakt sind, denn eine Sequenz

$$0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn

$$0 \rightarrow i^*F' \rightarrow i^*F \rightarrow i^*F'' \rightarrow 0$$

und

$$0 \rightarrow j^*F' \rightarrow j^*F \rightarrow j^*F'' \rightarrow 0$$

exakt sind (betrachte die Halme).

**Definition 11.4** Identifizieren wir  $S(X_{\text{ét}})$  mit  $T(X, Y)$ , so definieren wir die folgenden sechs Funktoren

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j^!} & \\ S(Y_{\text{ét}}) & \xrightarrow{i_*} & S(X_{\text{ét}}) & \xrightarrow{j^*} & S(U_{\text{ét}}) \\ & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} & \end{array}$$

durch

$$\begin{array}{l} F_1 \xleftarrow{i^*} (F_1, F_2, \phi) \quad , \quad (0, F_2, 0) \xleftarrow{j^!} F_2 \\ F_1 \xrightarrow{i_*} (F_1, 0, 0) \quad , \quad (F_1, F_2, \phi) \xrightarrow{j^*} F_2 \\ \ker \phi \xleftarrow{i^!} (F_1, F_2, \phi) \quad (i^*j_*F_2, F_2, id) \xleftarrow{j_*} F_2 \end{array}$$

Man nennt  $j_!F$  die “Fortsetzung durch null” von  $F$  und  $i^!F \subseteq F$  die “Untergarbe der Schnitte mit Träger in  $Y$ ”.

Es ist klar, dass die Zuordnungen funktoriell sind.

**Satz 11.5** (a) Unter der Identifikation zwischen  $S(X_{\text{ét}})$  und  $T(X, Y)$ , entsprechen die Funktoren  $i^*$ ,  $i_*$ ,  $j^*$  und  $j_*$  den Funktoren mit dem gleichen Namen zwischen  $S(X_{\text{ét}})$  und  $(Y_{\text{ét}})$ , und  $S(X_{\text{ét}})$  und  $S(U_{\text{ét}})$ .

(b) Jeder Funktor in 11.3 ist linksadjungiert zum darunter stehenden Funktor.

(c) Die Funktoren  $i^*$ ,  $i_*$ ,  $j^*$  und  $j^!$  sind exakt;  $j_*$  und  $i^!$  sind linksexakt.

(d) Die Kompositionen  $i^*j_!$ ,  $i^!j_!$  und  $j^*i_*$  sind null.

(e) Die Funktoren  $i_*$  und  $j_*$  sind volltreu, und  $i_*$  induziert eine Kategorienäquivalenz

$$Sh(Y_{\text{ét}}) \xrightarrow[\sim]{i_x} \{F \in Sh(X_{\text{ét}}) \mid F \text{ hat Träger in } Y\}.$$

(f) Die Funktoren  $j_*, j^*, i^!, i_*$  erhalten Injektive.

**Beweis** (a) folgt leicht aus der Identifikation zwischen  $S(X_{\text{ét}})$  und  $T(X, Y)$ .

(b) für  $(i^*, i_*)$  und  $(j^*, j_*)$  folgt durch (a), zum Beispiel von der Tatsache, dass diese adjunktive Paare bilden. Für die verbleibenden zwei Fälle in haben wir kanonische Isomorphismen

$$\text{Hom}_X((0, F_2, 0), (G_1, G_2, \phi)) \cong \text{Hom}_U(F_2, G_2)$$

und

$$\text{Hom}_X((F_2, 0, 0), (G_1, G_2, \phi)) \cong \text{Hom}_Y(F_2, \ker(G_1 \xrightarrow{\phi} i^* j_* G_2)).$$

(c) folgt sofort mit Bemerkung 11.2, und

(d) folgt mit der Beschreibung der Funktoren

In (e) ist die Volltreueheit von  $i_*$  ebenfalls klar aus der Beschreibung. Für  $j_*$  ist ein Morphismus

$$(i^* j_* F_2, F_2, id) \rightarrow (i^* j_* F'_2, F'_2, id)$$

ebenfalls allein durch  $F_2 \rightarrow F'_2$  bestimmt, wegen des kommutativen Diagramms (11.0).

Die zweite Behauptung in (d) ist damit auch klar, denn  $(F_1, F_2, \phi)$  hat genau dann Träger in  $Y$ , wenn  $F_2 = 0$  und damit auch  $\phi = 0$ .

(f) folgt, da diese Funktoren exakte Linksadjungierte haben.

**Corollar 11.6** (a) Für eine offene Immersion  $j : U \hookrightarrow X$  und eine étale Garbe  $\mathcal{F}$  auf  $U$  gilt  $j^* j_* \mathcal{F} = \mathcal{F}$ .

(b) Für eine abgeschlossene Immersion  $i : Y \hookrightarrow X$  und eine étale Garbe  $\mathcal{G}$  auf  $Y$  gilt  $i^* i_* \mathcal{G} = \mathcal{G}$ .

**Proof:** Dies folgt aus Theorem 11.4 (a) und der Beschreibung der Funktoren in Definition 11.3. Tatsächlich gilt

$$j^* j_* \mathcal{F} = j^* (i^* j_* \mathcal{F}, \mathcal{F}, id) = \mathcal{F},$$

and

$$i^* i_* \mathcal{G} = i^* (\mathcal{G}, 0, 0) = \mathcal{G}.$$

**Corollar 11.7** Für jede étale Garbe  $F$  auf  $X$  hat man exakte Sequenzen

$$(a) \quad 0 \rightarrow j_! j^* F \rightarrow F \rightarrow i_* i^* F \rightarrow 0$$

$$(b) \quad 0 \rightarrow i_* i^! F \rightarrow F \rightarrow j_* j^* F$$

**Beweis** Dies folgt aus der Beschreibung in Tripeln. (a) entspricht zum Beispiel der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow (0, j^* F, 0) \rightarrow (i^* F, j^* F, \phi) \rightarrow (i^* F, 0, 0) \rightarrow 0.$$

und (b) entspricht der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow (\ker \phi, 0, 0) \rightarrow (i^* F, j^* F, \phi) \rightarrow (i^* j_* j^* F, j^* F, \phi).$$

## 12 Čech-Kohomologie

Das Folgende verallgemeinert die nullte Čech-Kohomologie (siehe Definition 3.7) und die topologische Čech-Kohomologie (siehe Koh. Sch. § 9). Wir betrachten Prägarben mit Werten in abelschen Gruppen.

**Lemma/Definition 12.1** Sei  $\mathcal{S} = (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Situs.

(a) Für eine Prägarbe  $P$  auf  $\mathcal{X}$  und eine Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  in  $\mathcal{T}$  und  $n \geq 0$  heißt

$$C^n(\mathfrak{U}, P) := \prod_{(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}} P(U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_n})$$

die Gruppe der  $n$ -Koketten zur Überdeckung  $\mathfrak{U}$  mit Werten in  $P$ . Definiere das Differential

$$d^n : C^n(\mathfrak{U}, P) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{U}, P)$$

durch

$$(d^n s)_{i_0, \dots, i_{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu s_{i_0, \dots, \hat{i}_\nu, \dots, i_{n+1}} |_{U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_{n+1}}}$$

wobei die Restriktion bezüglich des Morphismus

$$U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_{n+1}} \rightarrow U_{i_0} \times_U \dots \times_U \hat{U}_{i_\nu} \times_U \dots \times_U U_{i_{n+1}}$$

genommen wird und  $\hat{a}$  das Weglassen von  $a$  bedeutet. Dann ist  $d^{n+1}d^n = 0$  für alle  $n$ , so dass wir einen Komplex  $C^\cdot(\mathfrak{U}, P)$  erhalten, genannt der Čech-Komplex zur Überdeckung  $\mathfrak{U}$  mit Werten in  $P$ .

(b) Die  $n$ -te Kohomologie

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, P) := H^n(C^\cdot(\mathfrak{U}, P))$$

heißt die  $n$ -te Čech-Kohomologie von  $P$  zur Überdeckung  $\mathfrak{U}$ .

**Beweis** dass  $d^{n+1}d^n = 0$ : selbst! (Standard).

**Bemerkung 12.2** Für  $n = 0$  erhalten wir offenbar die nullte Čech-Kohomologie aus Definition 3.7 (a).

**Lemma 12.3** Seien  $(V_j \rightarrow U)_{j \in J}$  und  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  Überdeckungen und

$$f = (\varepsilon, f_j) : (V_j \rightarrow U) \rightarrow (U_i \rightarrow U)$$

eine Verfeinerungsabbildung. Diese induziert Abbildungen für alle  $n$

$$\check{H}^n((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow \check{H}^n((V_j \rightarrow U), P).$$

**Beweis** Wir haben eine Abbildung  $\varepsilon : J \rightarrow I$  und Morphismen  $f_j : V_j \rightarrow U_{\varepsilon(j)}$ . Damit definieren wir

$$f^n : C^n((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow C^n((V_j \rightarrow U), P)$$

wie folgt: Ist  $s = (s_{i_0, \dots, i_n}) \in C^n((U_i \rightarrow U), P)$ , so setze

$$(f^n s)_{j_0, \dots, j_n} = \text{res}_{f_{j_0} \times \dots \times f_{j_n}}(s_{\varepsilon(j_0), \dots, \varepsilon(j_n)}),$$

mit der Restriktion bezüglich

$$f_{j_0} \times \dots \times f_{j_n} : V_{j_0} \times_U \dots \times_U V_{j_n} \rightarrow U_{\varepsilon(j_0)} \times_U \dots \times_U U_{\varepsilon(j_n)}.$$

Diese Abbildungen kommutieren mit den Differentialen  $d^n$ , liefern also einen Morphismus von Komplexen

$$f^* : C^*((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow C^*((V_j \rightarrow U), P),$$

der die gewünschte Abbildung in der Kohomologie induziert.

**Bemerkung 12.4** Auf  $\check{H}^0(-, P)$  stimmt diese Abbildung mit der früher betrachteten überein!

**Lemma 12.5** Sind

$$f, g : (V_j \rightarrow U) \rightarrow (U_i \rightarrow U)$$

zwei Verfeinerungsabbildungen, so ist

$$f^* = g^* : \check{H}^n((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow \check{H}^n((V_j \rightarrow U), P)$$

für alle  $n \geq 0$ .

**Beweis** (vergleiche Lemma 3.11) Sei  $f = (\varepsilon, f_j)$  und  $g = (\eta, g_j)$ . Definiere

$$k^n : C^n((U_i \rightarrow U), P) \rightarrow C^{n-1}(V_j \rightarrow U), P)$$

durch

$$(k^n s)_{j_0, \dots, j_{n-1}} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^r \text{res}_{f_{j_0} \times \dots \times (f_{j_r}, g_{j_r}) \times \dots \times g_{j_{n-1}}} s_{\varepsilon(j_0), \dots, \varepsilon(j_r), \eta(j_r), \dots, \eta(j_{n-1})}$$

für  $(f_{j_r}, g_{j_r}) : V_{j_r} \rightarrow U_{\varepsilon(j_r)} \times U_{\eta(j_r)}$ . Dann gilt

$$d^{n-1}k^n + k^{n+1}d^n = g^n - f^n,$$

d.h.,  $(k^n)$  liefert eine Kettenhomotopie zwischen  $(f^n)$  und  $(g^n)$ , woraus die Behauptung folgt.

**Definition 12.6** Die  $n$ -te Čech-Kohomologie von  $U$  mit Werten in  $P$  wird definiert als

$$\check{H}^n(U, P) := \check{H}^n(U, \mathcal{T}; P) = \lim_{\rightarrow} \check{H}^n(\mathfrak{U}, P)$$

wobei der Limes über alle Überdeckungen von  $U$  (in  $\mathcal{T}$ ) läuft.

**Bemerkung 12.7** Wegen 12.5 ist dies ein Limes über die induktiv geordnete Menge  $\mathcal{T}(U)_0$  aller Überdeckungen  $\mathfrak{U}$  von  $U$ , wobei  $\mathfrak{U}' \geq \mathfrak{U}$ , wenn es eine Verfeinerungsabbildung  $f : \mathfrak{U}' \rightarrow \mathfrak{U}$  gibt (siehe den Beweis von 3.11).

**Lemma 12.8** Sei

$$(12.8.1) \quad 0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von abelschen Prägarben (!) auf  $\mathcal{X}$ .

(a) Für jede Überdeckung  $\mathfrak{U}$  in  $\mathcal{T}$  gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, P_1) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, P_2) \rightarrow \check{H}^0(\mathfrak{U}, P_3) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathfrak{U}, P_1) \rightarrow \dots$$

Diese ist funktoriell bezüglich Verfeinerungsabbildungen und bezüglich Morphismen von exakten Sequenzen (12.8.1).

(b) Für jedes  $U$  in  $\mathcal{X}$  gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \check{H}^0(U, P_1) \rightarrow \check{H}^0(U, P_2) \rightarrow \check{H}^0(U, P_3) \xrightarrow{\delta} \check{H}^1(U, P_1) \rightarrow \check{H}^1(U, P_2) \rightarrow \dots$$

Diese ist funktoriell für Restriktionsabbildungen und für Morphismen von exakten Sequenzen (12.8.1).

**Beweis** (a): Wir haben eine exakte Sequenz von Komplexen

$$(12.8.2) \quad 0 \rightarrow C^\cdot(\mathfrak{U}, P_1) \rightarrow C^\cdot(\mathfrak{U}, P_2) \rightarrow C^\cdot(\mathfrak{U}, P_3) \rightarrow 0,$$

da für  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  und jedes  $(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}$  die Sequenz

$$(12.8.2) \quad 0 \rightarrow P(U_{i_0, \dots, i_n}) \rightarrow P_2(U_{i_0, \dots, i_n}) \rightarrow P_3(U_{i_0, \dots, i_n}) \rightarrow 0$$

exakt ist, wobei  $U_{i_0, \dots, i_n} := U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_n}$ . Die Sequenz in (a) ist die lange exakte Kohomologiesequenz zu (12.8.2). Die Funktorialitäten folgen, da (12.8.2) funktoriell in  $\mathfrak{U}$  und in (12.8.1) ist.

(b) folgt aus (a) durch Übergang zum induktiven Limes über alle Überdeckungen von  $U$  (siehe Bemerkung 12.7), da die Bildung eines induktiven Limes ein exakter Funktor ist.

**Bemerkung 12.9** Für eine exakte Sequenz von  $\mathcal{T}$ -Garben

$$(12.9.1) \quad 0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow 0$$

erhält man im Allgemeinen keine lange exakte Sequenz von Čech-Kohomologiegruppen, da (12.9.1) im Allgemeinen nicht exakt als Sequenz von Prägarben ist.

**Beispiel 12.10** Sei  $A \rightarrow B$  ein treuffacher Ringhomomorphismus, der lokal von endlichem Typ (bzw. lokal von endlicher Präsentation) ist. Dann ist  $(V = \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A) = U)$  eine Überdeckung in der flachen Topologie. Der zugehörige Čech-Komplex zur Prägarbe  $\mathbb{G}_{a, X}$  ist

$$0 \rightarrow B \rightarrow B \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A B \rightarrow \dots,$$

der Komplex, der in Koh. Sch., Satz 8.12 betrachtet wurde. Also ist

$$\check{H}^n((V \rightarrow U), \mathbb{G}_a) = \begin{cases} A & , \quad n = 0, \\ 0 & , \quad n > 0. \end{cases}$$

Die Čechkohomologie kann man auch als derivierten Funktor erhalten:

**Satz 12.11** (a) Für eine Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$  ist  $\check{H}^n(\mathfrak{U}, -)$  die  $n$ -te Rechtsableitung des linksexakten Funktors

$$\begin{aligned} \check{H}^0(\mathfrak{U}, -) : Pr(\mathcal{X}) &\rightarrow \underline{Ab} \\ P &\mapsto \check{H}^0(\mathfrak{U}, P). \end{aligned}$$

(b) Für  $U \in ob(\mathcal{X})$  ist  $\check{H}^n(U, -)$  die  $n$ -te Rechtsableitung des linksexakten Funktors

$$\begin{aligned} \check{H}^0(U, -) : Pr(\mathcal{X}) &\rightarrow \underline{Ab} \\ P &\mapsto \check{H}^0(U, P). \end{aligned}$$

**Beweis** Es folgt aus 12.8, dass die Funktoren  $(\check{H}^n(\mathfrak{U}, -))_{n \geq 0}$  bzw.  $(\check{H}^n(U, -))_{n \geq 0}$  exakte  $\delta$ -Funktoren auf  $Pr(\mathcal{X})$  bilden (Koh. Sch., Definition 6.26). Es genügt daher zu zeigen, dass  $\check{H}^n(\mathfrak{U}, -)$  bzw.  $\check{H}^n(U, -)$  auslöschar für  $n > 0$  ist (siehe Koh. Sch., Lemma 6.27; die Rechtsableitung ist ein universeller  $\delta$ -Funktork und zwei universelle  $\delta$ -Funktoren sind offenbar isomorph). Da  $Pr(\mathcal{X})$  genügend viele Injektive besitzt, genügt es zu zeigen:

**Lemma 12.12** Es ist  $\check{H}^n(\mathfrak{U}, I) = 0 = \check{H}^n(U, I)$  für  $n > 0$ , falls  $I$  eine injektive Prägarbe ist.

**Beweis** (vergleiche Koh. Sch., Beweis von Lemma 8.4). Die zweite Aussage folgt aus der ersten. Wir haben also zu zeigen, dass für jede Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  in  $\mathcal{T}$  die Sequenz

$$\prod_i I(U_i) \rightarrow \prod_{i_0, i_1} I(U_{i_0 i_1}) \rightarrow \prod_{i_0, i_1, i_2} I(U_{i_0 i_1 i_2}) \rightarrow \dots$$

exakt ist, wobei  $U_{i_0, \dots, i_n} = U_{i_j} \times_U U_{i_1} \times_U \dots \times_U U_{i_n}$ . Diese Sequenz identifiziert sich mit einer Sequenz

$$(12.12.1) \quad \prod_i Hom(\mathbb{Z}_{U_i}^P, I) \rightarrow \prod_{i_0, i_1} Hom(\mathbb{Z}_{U_{i_0 i_1}}^P, I) \rightarrow \dots,$$

die von einem offensichtlichen Komplex von Prägarben

$$(12.12.2) \quad \bigoplus_i \mathbb{Z}_{U_i}^P \leftarrow \bigoplus_{i_0, i_1} \mathbb{Z}_{U_{i_0 i_1}}^P \leftarrow \bigoplus_{i_0, i_1, i_2} \mathbb{Z}_{U_{i_0 i_1 i_2}}^P \leftarrow \dots$$

durch Anwenden von  $Hom(-, I)$  kommt. Da  $I$  injektiv ist, ist der letzte Funktor exakt, also genügt es, die Exaktheit von (12.12.2) zu zeigen, also die Exaktheit von

$$(12.12.3) \quad \bigoplus_i \mathbb{Z}_{U_i}^P(V) \leftarrow \bigoplus_{i_0, i_1} \mathbb{Z}_{U_{i_0 i_1}}^P(V) \leftarrow \dots$$

für jedes  $V$  in  $\mathcal{X}$ .

Nun ist  $\mathbb{Z}_W^P(V) = \bigoplus_{Hom(V, W)} \mathbb{Z}$  für  $W$  in  $\mathcal{X}$ , und für jedes  $W = U_{i_0 i_1 \dots i_n} = U_{i_j} \times_U U_{i_1} \times_U \dots \times_U U_{i_n}$

haben wir einen kanonischen Morphismus  $U_{i_0 \dots i_n} \rightarrow U$ . Damit ist

$$Hom(V, W) = \prod_{\phi \in Hom(V, U)} Hom_\phi(V, W),$$

wobei  $\text{Hom}_\phi(V, W)$  die Menge der Morphismen  $\varphi : V \rightarrow W$  ist, für die

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ & \searrow \phi & \swarrow \\ & & U \end{array}$$

kommutativ ist. Weiter gilt nach der universellen Eigenschaft des Faserprodukts

$$\text{Hom}_\phi(V, U_{i_0} \times_U \dots \times_U U_{i_n}) = \text{Hom}_\phi(V, U_{i_0}) \times \dots \times \text{Hom}_\phi(V, U_{i_n}).$$

Setzen wir also

$$S(\phi) = \coprod_{i \in I} \text{Hom}_\phi(V, U_i),$$

so können wir den Komplex (12.12.3) wie folgt schreiben:

$$\bigoplus_{\phi \in \text{Hom}(V, U)} \left( \bigoplus_{S(\phi)} \mathbb{Z} \leftarrow \bigoplus_{S(\phi) \times S(\phi)} \mathbb{Z} \leftarrow \bigoplus_{S(\phi)^3} \mathbb{Z} \leftarrow \dots \right)$$

mit den offensichtlichen Differentialen in der Klammer

$$1_{j_0, \dots, j_p} \mapsto \sum_{\nu=0}^p (-1)^\nu 1_{j_0, \dots, \hat{j}_\nu, \dots, j_p}.$$

Der Komplex in der Klammer ist aber exakt: Eine kontrahierende Homotopie ist  $(h^p)_{p \geq 0}$  mit

$$\begin{aligned} h^p : \bigoplus_{S(\phi)^{p+1}} \mathbb{Z} &\rightarrow \bigoplus_{S(\phi)^{p+2}} \mathbb{Z} \\ 1_{i_0, \dots, i_p} &\mapsto 1_{e, i_0, \dots, i_p}, \end{aligned}$$

wobei  $e \in S(\phi)$  ein festes Element ist (Nachrechnen!).

**Satz 12.13** Sei  $U \in \text{ob}(\mathcal{X})$  und  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$  eine Überdeckung in  $\mathcal{T}$  und sei  $F$  eine Garbe (bezüglich  $\mathcal{T}$ ). Es gibt eine Spektralsequenz

$$\begin{aligned} E_2^{p,q} &= \check{H}^p(\mathfrak{U}, \underline{H}^q(F)) &\Rightarrow H^{p+q}(U, F) \\ E_2^{p,q} &= \check{H}^p(U, \underline{H}^q(F)) &\Rightarrow H^{p+q}(U, F). \end{aligned}$$

Hier werden Kohomologie und Čech-Kohomologie bezüglich  $\mathcal{T}$  genommen, und  $\underline{H}^q(F)$  ist die Prägarbe

$$V \mapsto H^q(V, F).$$

**Beweis** Erste Spektralsequenz: Wir wenden Grothendiecks Satz an (Satz 6.8). Es ist offenbar

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^0(F)) = H^0(U, F),$$

da  $F$  eine Garbe ist, also  $H^0(U, -)$  die Komposition von  $\underline{H}^0(-)$  und  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, -)$ . Weiter ist für eine injektive Garbe  $I$  die Prägarbe  $\underline{H}^0(I)$  azyklisch für  $\check{H}^0(\mathfrak{U}, -)$ , d.h.,

$$R^n \check{H}^0(\mathfrak{U}, \underline{H}^0(I)) \stackrel{12.11}{=} \check{H}^n(\mathfrak{U}, \underline{H}^0(I)) = \check{H}^n(\mathfrak{U}, I) = 0 \quad \text{für } n > 0.$$

Denn die Einbettung  $i : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \rightarrow Pr(\mathcal{X})$  erhält Injektive, da  $i$  das exakte Linksadjungierte  $a$  besitzt (siehe Koh. Sch., Lemma 12.2). Daher ist  $I$  auch injektiv als Prägarbe, und die letzte Gleichung folgt aus Lemma 12.12.

Die zweite Spektralsequenz folgt analog, oder durch Übergang zum Limes über alle Überdeckungen von  $U$ .

**Corollar 12.14** Es gibt eine Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(\underline{H}^q(F)) \rightarrow \underline{H}^{p+q}(F).$$

**Beweis** Betrachte die zweite Spektralsequenz in 12.13 für alle  $U$  in  $\mathcal{X}$  und beachte, dass sie funktoriell (kontravariant) in  $U$  ist.

**Proposition 12.15** Es gilt

$$\check{H}^0(U, \underline{H}^q(F)) = 0 \quad \text{für } q > 0,$$

also auch  $\check{H}^0(\underline{H}^q(F)) = 0$  für  $q > 0$ .

**Beweis** Sei  $F \hookrightarrow I$  eine injektive Auflösung in  $Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ . Dann ist  $\underline{H}^q(F)$  die  $q$ -te Kohomologie-Prägarbe des Komplexes  $i(I)$ . Da  $a$  exakt ist, kommutiert  $a$  mit dem Nehmen von Kohomologie, also ist  $a\underline{H}^q(F) = \mathcal{H}^q(aiI) = \mathcal{H}^q(I) = 0$  für  $q > 0$  (Hier bezeichnet  $\mathcal{H}^q$  die  $q$ -te Kohomologie-Garbe). Aber  $\check{H}^0(\underline{H}^q(F))$  ist eine Unter-Prägarbe von  $a\underline{H}^q(F) = \check{H}^0 \check{H}^0(\underline{H}^q(F))$  (da  $\check{H}^0(P)$  für jede Prägarbe  $P$  separiert ist, siehe Lemma 3.10 (c) und beachte, dass nach Definition  $\check{P} = \check{H}^0(P)$ ). Also ist  $\check{H}^0(\underline{H}^q(F)) = 0$  für alle  $q > 0$ , also  $\check{H}^0(U, \underline{H}^q(F)) = 0$  für alle  $U$ .

**Corollar 12.16** Für jede Garbe  $F$  auf  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  und jedes  $U$  in  $\mathcal{X}$  gibt es kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} \check{H}^0(U, F) &\cong H^0(U, F) \\ \check{H}^1(U, F) &\cong H^1(U, F) \end{aligned}$$

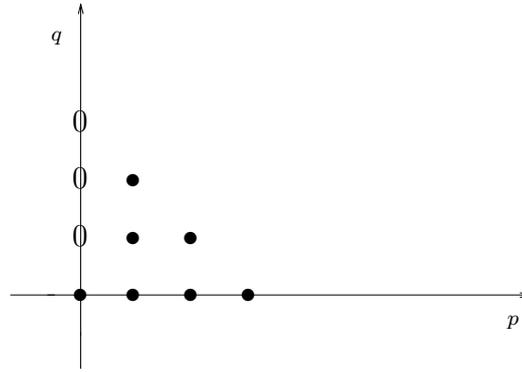
und eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \check{H}^2(U, F) \rightarrow H^2(U, F) \rightarrow \check{H}^1(U, \underline{H}^1(F)) \rightarrow \check{H}^3(U, F) \rightarrow H^3(U, F)$$

**Beweis** Die Spektralsequenz

$$\check{H}^p(U, \underline{H}^q(F)) \Rightarrow H^{p+q}(U, F)$$

hat die folgende Gestalt (auf der  $q$ -Achse sind Anfangsterme null, außer im Ursprung)



Die erste Aussage in 12.16 ist klar, da  $F$  eine Garbe ist, und aus dem Bild folgt

$$\begin{aligned} H^1(U, F) &\cong E_2^{1,0} = \check{H}^1(U, \underline{H}^0(F)) \\ &= \check{H}^1(U, F), \end{aligned}$$

da  $E_2^{0,1} = 0$  und alle Differentiale von und nach  $E_2^{1,0}$  null sind. Die Herleitung der letzten Sequenz ist analog zum Beweis der üblichen Sequenz der niedrigen Terme (Lemma 6.7).

**Corollar 12.17** (vergleiche Koh. Sch., Corollar 8.15, für endliches  $I$ ) Sei  $X$  ein Schema und  $\mathcal{F}$  ein quasi-kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Sei  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so dass

$$U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}$$

für alle  $n$  und alle  $i_0, \dots, i_n \in I$  affin ist. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} H^n(X, \mathcal{F})$$

für alle  $n \geq 0$ .

**Beweis** Wir benutzen die Spektralsequenz

$$\check{H}^p(\mathfrak{U}, \underline{H}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}).$$

Für  $q > 0$  ist  $H^q(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}, \mathcal{F}) = 0$  nach Serres Verschwindungssatz (Koh. Sch., Satz 8.6). Hieraus folgt sofort die Behauptung.

**Definition 12.18** Eine Garbe  $F$  auf einem Situs  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  heißt **welk**, wenn  $H^n(U, F) = 0$  für alle  $U \in \text{ob}(\mathcal{X})$  und alle  $n > 0$ .

**Beispiel 12.19** Jede injektive Garbe ist welk.

**Proposition 12.20** Für eine Garbe  $F$  sind äquivalent:

- (a)  $F$  ist welk.
- (b) Für jedes  $U$  in  $\mathcal{X}$  und jede Überdeckung  $\mathfrak{U}$  von  $U$  (in einer kofinalen Familie) ist  $\check{H}^n(\mathfrak{U}, F) = 0$  für  $n > 0$ .
- (c)  $\check{H}^n(U, F) = 0$  für alle  $U$  in  $\mathcal{X}$  und alle  $n > 0$ .

**Beweis** (a)  $\Rightarrow$  (b): Ist  $F$  welk, so ist  $\underline{H}^q(F) = 0$  für  $q > 0$ . Die erste Spektralsequenz aus 12.13 liefert also

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{\sim} H^n(U, F) = 0 \quad \text{für } n > 0.$$

(b)  $\Rightarrow$  (c): Folgt durch induktiven Limes über alle Überdeckungen von  $U$ .

(c)  $\Rightarrow$  (a): Nach Voraussetzung gilt  $\check{H}^n(F) = 0$  für  $n > 0$ . Nach Corollar 12.16 ist also  $\underline{H}^1(F) = 0$ . Wir führen nun Induktion über  $n$ , mit der Spektralsequenz aus 12.14

$$\check{H}^p(H^q(F)) \Rightarrow \underline{H}^{p+q}(F).$$

Nach Voraussetzung ist  $\check{H}^2(\underline{H}^0(F)) = \check{H}^2(F) = 0$ , weiter ist  $\check{H}^1(\underline{H}^1(F)) = 0$  und  $\check{H}^0(\underline{H}^2(F)) = 0$  nach 12.15. Aus der Spektralsequenz folgt nun  $\underline{H}^2(F) = 0$ . Dasselbe Argument zeigt nun induktiv

$$\check{H}^i(\underline{H}^j(F)) = 0 \quad \text{für } i + j \leq n$$

und damit  $\underline{H}^n(F) = 0$ .

**Corollar 12.21** Sei  $f : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Morphismus von Siten. Ist  $F'$  eine welke Garbe auf  $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$ , so ist  $f_*F'$  ebenfalls welk.

**Beweis** Sei  $f^0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$  der unterliegende Funktor. Ist  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$  eine Überdeckung in  $\mathcal{T}$ , so ist  $\mathfrak{U}' = (f^0U_i \rightarrow f^0U)$  eine Überdeckung in  $\mathcal{T}'$  und es ist

$$(f_*F')(V) = F(f^0V)$$

für alle  $V$  in  $\mathcal{X}$ . Daher ist

$$\check{H}^n(\mathfrak{U}, f_*F') = \check{H}^n(\mathfrak{U}', F') = 0 \quad \text{für } n > 0.$$

**Corollar 12.22** (Leray Spektralsequenz) (a) Ist  $f : (\mathcal{X}'', \mathcal{T}'') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Morphismus von Siten, so hat man für jede Garbe  $F'$  auf  $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$  und jedes  $U \in \mathcal{X}$  eine Spektralsequenz

$$H^p(U, R^q f_* F') \Rightarrow H^{p+q}(f^0U, F').$$

(b) Sind  $(\mathcal{X}'', \mathcal{T}'') \rightarrow (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$  Morphismen von Siten, so gibt es für jede Garbe  $F''$  auf  $(\mathcal{X}'', \mathcal{T}'')$  eine Spektralsequenz

$$R^p f_* R^q g_* F'' \Rightarrow R(gf)_* F''.$$

**Beweis** Dies folgt aus Satz 6.8 (Grothendieck-Spektralsequenz), da  $f_*$  welche Garben in welche Garben überführt, also azyklische für  $H^0(U, -)$ , und ebenso  $g_*$  welche Garben in welche Garben, also azyklische für  $f_*$ . Denn  $R^n f_* F'$  ist die zur Prägarbe  $U \mapsto H^n(f^0U, F')$  assoziierte Garbe, und die Prägarbe ist bereits 0, falls  $F'$  welk ist.

## 13 Vergleich von Siten

**Proposition 13.1** (Wechsel der Kategorie) Sei  $(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$  ein Situs,  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$  eine volle Unterkategorie und  $\mathcal{T}$  die Einschränkung von  $\mathcal{T}'$  auf  $\mathcal{X}$ .

Es gelte:

(13.1.1) Für jedes Objekt  $U$  in  $\mathcal{X}$  und jede Überdeckung  $(U_i \rightarrow U)$  in  $\mathcal{T}'$  sind alle  $U_i$  bereits in  $\mathcal{X}$ .

Für den Morphismus von Siten

$$\alpha : (\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T}),$$

der durch die Einbettung  $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{X}'$  gegeben ist gilt dann:

(a) Der Funktor  $\alpha_* : Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}') \rightarrow Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ist exakt, und die Adjunktion  $F \rightarrow \alpha_* \alpha^* F$  ist für alle  $F \in Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  ein Isomorphismus.

(b) Der Funktor  $\alpha^* : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}) \rightarrow Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$  ist volltreu und linksexakt.

(c) Die kanonischen Homomorphismen

$$\begin{aligned} H^n(U, \mathcal{T}; \alpha_* F') &\rightarrow H^n(U, \mathcal{T}'; F') \\ H^n(U, \mathcal{T}; F) &\rightarrow H^n(U, \mathcal{T}'; \alpha^* F) \end{aligned}$$

sind Isomorphismen für alle  $U \in \mathcal{X}$ , alle  $F' \in Sh(\mathcal{X}', \mathcal{T}')$ , alle  $F \in Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  und alle  $n \geq 0$ .

**Beweis** (a)  $\alpha_*$  ist einfach die Einschränkung; wegen (13.1.1) ist daher die Exaktheit klar. Weiter ist für jedes  $U \in \mathcal{X}$  und  $F \in Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$

$$(\alpha^P F)(U) = F(U),$$

da die Kategorie  $I_U$ , über die der Limes für  $(\alpha^P F)(U)$  gebildet wird, das initiale Objekt  $(U, id_U)$  besitzt. Da  $F$  eingeschränkt auf  $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  eine Garbe ist, ist  $(\alpha^* F)(U) = (\alpha \alpha^P F)(U) = F(U)$ . Es folgt

$$(\alpha_* \alpha^* F)(U) = (\alpha^* F)(U) = F(U),$$

also die zweite Behauptung.

(b) Dies folgt aus dem eben Bewiesenen.

(c) Wir haben eine Spektralsequenz

$$(13.1.2) \quad E_2^{p,q} = H^p(U, R^q \alpha_* F) \Rightarrow H^{p+q}(U, F),$$

entweder durch Corollar 12.22, oder durch die Grothendieck-Leray Spektralsequenz 6.7. Diese existiert, da  $H^0(U, \alpha_* F) = H^0(U, F)$ , und da  $\alpha_*$  das linksexakte Linksadjungierte  $\alpha^*$  besitzt, so dass  $\alpha_*$  nach 7.10 Injektive in Injektive (also azyklische) überführt.

Da  $\alpha_*$  exakt ist, ist  $R^q \alpha_* F = 0$  für  $q > 0$ , und (13.1.2) liefert einen Kantenisomorphismus

$$H^n(U, \alpha_* F) \xrightarrow{\sim} H^n(U, F).$$

Die zweite Aussage folgt daraus, dass die Komposition

$$H^n(U, F) \rightarrow H^n(U, \alpha^* F) \xrightarrow{\sim} H^n(U, \alpha_* \alpha^* F) \xrightarrow{\sim} H^n(U, F)$$

die Identität ist (betrachte injektive Auflösungen).

**Beispiel 13.2** Man kann dies auf den Morphismus von Siten

$$\alpha : (Sch/X)_E \rightarrow X_E$$

anwenden, wobei  $X$  ein Schema ist,  $E$  eine zulässige Klasse von Morphismen,  $(Sch/X)_E$  die Kategorie aller  $X$ -Schemata mit den  $E$ -Überdeckungen als Topologie (der große  $E$ -Situs) und  $X_E$  die Kategorie aller  $X$ -Schemata  $U$ , für die der Strukturmorphismus  $U \rightarrow X$  in  $E$  ist, mit den  $E$ -Überdeckungen als Topologie (der kleine  $E$ -Situs). Insbesondere liefern der große étale Situs  $(Sch/X)_{\acute{e}t}$  und der kleine étale Situs  $X_{\acute{e}t}$  "dieselbe Kohomologie" (vermöge  $\alpha_*$  bzw.  $\alpha^*$ ).

**Proposition 13.3** (Wechsel der Topologie) Sei  $\mathcal{X}$  eine Kategorie und seien  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$  Topologien auf  $\mathcal{X}$  (jede Überdeckung für  $\mathcal{T}$  ist auch eine Überdeckung für  $\mathcal{T}'$ ). Sei

$$\beta : (\mathcal{X}, \mathcal{T}') \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{T})$$

der Morphismus von Siten, der durch  $id_{\mathcal{X}}$  gegeben ist. Für jede Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)$  in  $\mathcal{T}'$  gebe es eine Überdeckung  $(V_j \rightarrow U)$  in  $\mathcal{T}$ , die  $\mathfrak{U}$  verfeinert. Dann ist  $\beta_* : Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}') \rightarrow Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T})$  exakt und daher

$$H^n(\mathcal{X}_{\mathcal{T}}, \beta_* F') \xrightarrow{\sim} H^n(\mathcal{X}_{\mathcal{T}'}, F')$$

für jede Garbe  $F' \in Sh(\mathcal{X}, \mathcal{T}')$ .

**Beweis:** Der Funktor  $\beta_*$  ist die Identität. Wir haben nur zu zeigen, dass jeder Epimorphismus  $F \rightarrow F''$  für  $\mathcal{T}'$  auch ein Epimorphismus für  $\mathcal{T}$  ist. Ist  $U \in ob(\mathcal{X})$  und  $s \in F''(U)$ , so gibt es eine Überdeckung  $(U_i \rightarrow U)$  in  $\mathcal{T}'$ , so dass  $s|_{U_i}$  im Bild von  $F(U_i) \rightarrow F''(U_i)$  ist, für alle  $i$ . Ist nun  $(V_j \rightarrow U) \in \mathcal{T}$  eine Verfeinerung von  $(U_i \rightarrow U)$ , und faktorisiert  $V_j \rightarrow U$  als  $V_j \rightarrow U_i \rightarrow U$ , so erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(V_j) & \longrightarrow & F''(V_j) \\ \uparrow & & \uparrow \\ F(U_i) & \longrightarrow & F''(U_i), \end{array}$$

das zeigt, dass  $s|_{V_j}$  im Bild der oberen Abbildung liegt. Also ist  $\beta_*$  exakt. Die zweite Behauptung folgt aus der Leray-Spektralsequenz, da  $R^p \beta_* F' = 0$  für  $p > 0$  wegen der Exaktheit von  $\beta_*$ .

**Corollar 13.4** Sei  $X$  ein Schema, und seien  $E \subset E'$  zwei zulässige Klassen von Morphismen, so dass für die zugehörigen Topologien  $(E) \subset (E')$  die Verfeinerungsbedingung aus 13.3 gilt. Dann ist für den Morphismus kleiner Siten

$$\gamma : X_{E'} \rightarrow X_E$$

der Funktor  $\gamma_* : Sh(X_{E'}) \rightarrow Sh(X_E)$  exakt, also für jede Garbe  $F'$  auf  $X_{E'}$

$$H^n(U, E; \gamma_* F') \xrightarrow{\sim} H^n(U, E', F').$$

**Beweis** Sei  $E\text{-Sch}/X$  die Kategorie der  $X$ -Schemata  $U$ , deren Strukturmorphismus  $U \rightarrow X$  in  $E$  liegt. Dann faktorisiert  $\gamma$  als

$$\gamma : X_{E'} \xrightarrow{\beta} (E' - Sch/X)_E \xrightarrow{\alpha} (E - Sch/X)_E = X_E$$

und die Behauptung folgt aus 13.1 (Exaktheit von  $\alpha_*$ ) und 13.3 (Exaktheit von  $\beta_*$ ).

**Beispiel 13.5** Beispiele für Corollar 13.4 sind

- (a) (étale Morphismen von endlichem Typ)  $\subset$  (ét)
- (b) (ét)  $\subset$  (fl), falls  $X$  quasi-kompakt ist (Milne, *Étale Cohomology*, I 3.26).
- (c) (fpqc)  $\subset$  (fl), wobei (fpqc) die Klasse der flachen “quasi-kompakten” Morphismen ist. (Milne, I 2.25).

**Satz 13.6** (quasi-kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Moduln) Sei  $X$  ein Schema und  $\mathcal{M}$  ein quasi-kohärenter  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Seien  $\mathcal{M}_{\text{ét}}$  und  $\mathcal{M}_{\text{fl}}$  die zugehörigen Garben in der étalen bzw. flachen Topologie (siehe 10.18). Dann ist

$$H^n(X_{\text{Zar}}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} H^n(X_{\text{ét}}, \mathcal{M}_{\text{ét}}) \xrightarrow{\sim} H^n(X_{\text{fl}}, \mathcal{M}_{\text{fl}})$$

für alle  $n$ .

**Beweis** Wir führen den Beweis für die flache Topologie, der Fall der étalen Topologie ist analog. Sei

$$f : X_{\text{fl}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$$

der Morphismus von Siten (siehe 13.4). Offenbar ist  $f_* \mathcal{M}_{\text{fl}} = \mathcal{M}$ , also genügt es zu zeigen, dass  $R^n f_* \mathcal{M}_{\text{fl}} = 0$  für  $n > 0$  (dann folgt die Behauptung aus der Leray-Spektralsequenz). Da  $R^n f_* \mathcal{M}_{\text{fl}}$  die zur Prägarbe  $U \mapsto H^n(U_{\text{fl}}, \mathcal{M}_{\text{fl}})$  assoziierte Zariski-Garbe ist (siehe Satz 5.16), genügt es zu zeigen, dass  $H^n(U_{\text{fl}}, \mathcal{M}_{\text{fl}}) = 0$ , falls  $U = \text{Spec}(A) \subseteq X$  affin offen ist. Weiter können wir nach Corollar 13.4 den kleinen Situs  $U_E$  betrachten, wo  $E$  die Klasse der flachen affinen Morphismen von endlicher Präsentation ist. Wir wollen zeigen, dass  $\mathcal{M}_{\text{fl}}$  wehk ist, und nach 13.20 genügt es zu zeigen, dass  $\check{H}^n(\mathfrak{U}, \mathcal{M}_{\text{fl}}) = 0$  für alle  $n > 0$  und alle Überdeckungen  $\mathfrak{U} = (U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  in  $E$  ist. Wegen 10.6 und der Quasi-Kompaktheit von  $U$  können wir annehmen, dass  $I$  endlich ist (kofinales System von  $E$ -Überdeckungen!). Dann ist  $V = \coprod_i U_i = \text{Spec}(B)$  affin und  $A \rightarrow B$  treufach, und der Čech-Komplex wird der offensichtliche Komplex

$$B \otimes_A M \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A M \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A B \otimes_A M \rightarrow \dots,$$

der exakt in den Graden  $\geq 1$  ist, siehe Kapitel 14.

**Bemerkung 13.7** (Vergleichsisomorphismus über  $\mathbb{C}$ ). Sei  $X$  eine glatte Varietät über  $\mathbb{C}$ . Dann folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass die Menge  $X(\mathbb{C})$  eine komplexe Mannigfaltigkeit ist: Es reicht, dies lokal zu zeigen. Lokal ist aber

$$X = \text{Spec}(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle), m \leq n,$$

wobei

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(P) \right)$$

Rang  $m$  hat für alle abgeschlossenen Punkte  $P$  von  $X$ . Dann ist

$$X(\mathbb{C}) \cong \{a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid f_j(a) = 0 \quad \forall j\},$$

die  $f_i$  definieren stetige Abbildungen

$$f_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C},$$

und die obige Matrix ist die übliche Jacobi-Matrix bei  $P$ . Der Satz über implizite Funktionen liefert lokale Homöomorphismen

$$X(\mathbb{C}) \supseteq V \xrightarrow{\sim} U \subseteq \mathbb{C}^{n-m},$$

und so erhält man die Karten für  $X(\mathbb{C})$  als Mannigfaltigkeit.

Nach Artin und Grothendieck gibt es für jede glatte Varietät  $X/\mathbb{C}$  Isomorphismen für alle  $m$  und  $n$

$$H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^n(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}).$$

Hierbei steht links die (topologische) Garbenkohomologie der konstanten Garbe, und rechts die étale Kohomologie.

## 14 Abstiegstheorie und die multiplikative Gruppe

**Lemma 14.1** Sei  $X$  ein Schema. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$H^1(X_{\text{Zar}}, \mathcal{O}_X^\times) \cong \text{Pic}(X),$$

wobei  $\text{Pic}(X)$  die Picardgruppe von  $X$  ist.

**Beweis** Wegen 12.16 genügt es, einen kanonischen Isomorphismus

$$(14.1.1) \quad \text{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \check{H}^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$$

anzugeben. Sei  $\mathcal{L}$  ein invertierbarer  $\mathcal{O}_X$ -Modul. Dann gibt es eine offene Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  von  $X$ , so dass es Isomorphismen

$$\varphi_i : \mathcal{O}_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}|_{U_i}$$

für alle  $i \in I$  gibt. Auf  $U_i \cap U_j$  ergeben diese Isomorphismen

$$\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1} \varphi_i : \mathcal{O}_{U_i|_{U_i \cap U_j}} \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{L}|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\varphi_j^{-1}} \mathcal{O}_{U_j|_{U_i \cap U_j}},$$

die Elementen  $s_{ij} \in \mathcal{O}_X^\times(U_i \cap U_j)$  entsprechen.

Dabei gilt

$$(14.1.2) \quad \begin{array}{c} s_{ik|_{U_{ijk}}} \cdot s_{jk|_{U_{ijk}}} \cdot s_{ij|_{U_{ijk}}} = 1 \\ \parallel \\ \varphi_i^{-1} \varphi_k \varphi_k^{-1} \varphi_j \varphi_j^{-1} \varphi_i \end{array},$$

d.h., wir haben einen Čech-1-Kozykel in

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^\times) = H^1\left(\prod_i \mathcal{O}_X^\times(U_i) \rightarrow \prod_{i,j} \mathcal{O}_X^\times(U_i \cap U_j) \rightarrow \prod_{i,j,k} \mathcal{O}_X^\times(U_i \cap U_j \cap U_k)\right)$$

Umgekehrt liefert ein solcher Kozykel Verklebungsisomorphismen

$$\varphi_{i,j} : \mathcal{O}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\cdot s_{ij}} \mathcal{O}(U_i \cap U_j),$$

der es erlaubt, die freien Moduln  $\mathcal{O}_{U_i}$  auf den  $U_i$  zu einem invertierbaren  $\mathcal{O}_X$ -Modul  $\mathcal{L}$  zusammenzukleben (die Kozykelbedingung (14.1.2) liefert gerade die Kozykelbedingung/Transitivität für die  $\varphi_{ij}$ ). Die Zuordnung ist additiv. Weiter ist  $\mathcal{L}$  genau dann trivial, wenn der 1-Kozykel  $(s_{ij})$  trivial in  $\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^\times)$  ist. Dies liefert einen Isomorphismus

$$\check{H}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen von invertierbaren } \mathcal{O}_X\text{-Moduln } \mathcal{L}, \\ \text{die auf } (U_i) \text{ trivialisiert werden} \end{array} \right\}$$

Durch den induktiven Limes über alle Überdeckungen erhalten wir (14.1.1).

**Bemerkung 14.2** Dasselbe Argument gilt genauso für alle (lokal) geringten Räume.

**Lemma 14.3** Sei  $A$  ein Ring und  $M$  ein  $A$ -Modul. Ist  $M$  flacher  $A$ -Modul, so gilt:

(1) Ist  $\sum_{i=1}^r a_i m_i = 0$  mit  $a_i \in A$  und  $m_i \in M$ , so gibt es ein  $s \in \mathbb{N}$  und Elemente  $b_{ij} \in A$  und  $y_j \in M$  ( $j = 1, \dots, s$ ) mit

$$\sum_i a_i b_{ij} = 0$$

für alle  $j$  und  $m_i = \sum_j b_{ij} y_j$  für alle  $i$ .

**Beweis** Betrachte die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccc} K & \rightarrow & A^r & \xrightarrow{f} & A \\ & & (b_1, \dots, b_r) & \mapsto & \sum_{i=1}^r b_i a_i, \end{array}$$

$K = \ker(f)$ . Dann ist

$$\begin{array}{ccccc} K \otimes_A M & \rightarrow & M^r & \xrightarrow{f_M} & M \\ & & (n_1, \dots, n_r) & \mapsto & \sum_{i=1}^r a_i n_i \end{array}$$

exakt. Nach Voraussetzung ist  $f_M(m_1, \dots, m_r) = 0$ , also gibt es ein Element

$$\sum_{j=1}^s \beta_j \otimes y_j \in K \otimes_A M$$

( $\beta_j \in K, y_j \in M$ ), welches auf  $(m_1, \dots, m_r)$  abgebildet wird.

Schreiben wir  $\beta_j = (b_{1j}, \dots, b_{rj})$  mit  $b_{ij} \in A$ , so folgt die Behauptung.

**Bemerkung 14.4** Die Umkehrung gilt auch: Gilt (1), so ist  $M$  flach.

**Lemma 14.5** Sei  $M$  ein endlich erzeugter Modul über einem lokalen Ring  $A$ . Dann sind äquivalent:

- (a)  $M$  ist flach.
- (b)  $M$  ist frei.

**Beweis** Es ist nur (a)  $\Rightarrow$  (b) zu zeigen. Sei  $\mathfrak{m}$  das maximale Ideal von  $A$  und seien  $m_1, \dots, m_n \in M$  derart, dass die Bilder  $\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_n$  in  $M/\mathfrak{m}M$  eine Basis dieses  $A/\mathfrak{m}$ -Vektorraums bilden. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} A^n & \twoheadrightarrow & M \\ \text{Basiselement } e_i & \mapsto & m_i \end{array}$$

nach dem Nakayama-Lemma surjektiv. Es genügt zu zeigen, dass  $m_1, \dots, m_n \in M$  linear unabhängig über  $A$  sind, wenn  $\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_n$  linear unabhängig in  $M/\mathfrak{m}M$  sind. Wir führen Induktion über  $n$ . Sei  $n = 1$  und  $am_1 = 0$  für  $a \in A$ . Nach Lemma 14.3 gibt es  $b_1, \dots, b_s \in A$  und  $y_1, \dots, y_s \in M$  mit  $ab_j = 0$  für alle  $j$  und  $m_1 = \sum_j b_j \cdot y_j$ . Da  $\overline{m}_1 \neq 0$  gibt es ein  $j$  mit  $b_j \notin \mathfrak{m}$ , d.h.,  $b_j \in A^\times$  Einheit. Aus  $ab_j = 0$  folgt dann  $a = 0$ .

Sei nun  $n > 1$  und  $\sum_{i=1}^n a_i m_i = 0$ . Nach Lemma 14.3 existieren  $y_1, \dots, y_s \in M$  und  $b_{ij} \in A$  ( $i = 1, \dots, s$ ) mit

$$m_i = \sum_{j=1}^s b_{ij} y_j \quad , \quad \sum_{i=1}^n a_i b_{ij} = 0 .$$

Wegen  $\overline{m_n} \neq 0$  gibt es ein  $j$  mit  $b_{nj} \neq \mathfrak{m}$ , d.h.,  $b_{nj}$  Einheit. Dann ist

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i a_i \quad , \quad \text{mit } c_i = -b_{ij}/b_{in} ,$$

und damit

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i m_i = a_1(m_1 + c_1 m_n) + \dots + a_{n-1}(m_{n-1} + c_{n-1} m_n)$$

Da die betrachteten  $\overline{m_1 + c_1 m_n}, \dots, \overline{m_{n-1} + c_{n-1} m_n}$  linear unabhängig über  $A/\mathfrak{m}$  sind, folgt nach Induktionsvoraussetzung  $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$  und damit auch  $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i a_i = 0$ .

Wir kommen nun zur Abstiegsstheorie für treuflache Ringhomomorphismen.

**Satz 14.6** (Abstiegsstheorie I) Sei  $A \rightarrow B$  ein treuflacher Ringhomomorphismus. Für jeden  $A$ -Modul  $M$  ist dann die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{\gamma} & B \otimes_A M & \xrightarrow{\alpha_1} & B \otimes_A B \otimes_A M \\ & & & & & \xrightarrow{\alpha_2} & \\ & & m & \mapsto & 1 \otimes m, b \otimes m & \mapsto & 1 \otimes b \otimes m \\ & & & & & \mapsto & b \otimes 1 \otimes m \end{array}$$

exakt. Dies soll bedeuten, dass  $M$  der Differenzkern von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ist, d.h., dass

$$M = \ker(\alpha_1 - \alpha_2) .$$

**Beweis:** Nach Lemma 10.4 ist die Sequenz

$$(14.6.1) \quad 0 \rightarrow M \xrightarrow{\gamma} B \otimes_A M \xrightarrow{\alpha_1 - \alpha_2} B \otimes B \otimes M$$

genau dann exakt, wenn die mit  $B$  tensorierte Sequenz

$$0 \rightarrow B \otimes M \xrightarrow{1 \otimes \gamma} B \otimes B \otimes M \xrightarrow{1 \otimes (\alpha_1 - \alpha_2)} B \otimes B \otimes B \otimes M$$

exakt ist. Sei

$$\begin{array}{ccc} \mu : B \otimes B & \rightarrow & B \\ b_1 \otimes b_2 & \mapsto & b_1 b_2 \end{array}$$

die Multiplikationsabbildung. Dann gibt

$$\begin{array}{ccc} \mu \otimes 1 : B \otimes B \otimes M & \rightarrow & B \otimes M \\ b_1 \otimes b_2 \otimes m & \rightarrow & b_1 b_2 \otimes m \end{array}$$

ein Linksinverses von  $1 \otimes \gamma$  ( $\mu \otimes 1 \circ 1 \otimes \gamma = id$ ), also ist  $1 \otimes \gamma$  injektiv.

Sei nun  $z = \sum_i x_i \otimes y_i \otimes m_i$  im Kern von  $1 \otimes (\alpha_1 - \alpha_2)$ , also

$$\sum_i x_i \otimes 1 \otimes y_i \otimes m_i = \sum_i x_i \otimes y_i \otimes 1 \otimes m_i.$$

Durch Anwendung von  $\mu$  auf die ersten beiden Stellen erhalten wir

$$\sum_i x_i \otimes y_i \otimes m_i = \sum_i x_i y_i \otimes 1 \otimes m_i,$$

und  $\sum_i x_i y_i \otimes 1 \otimes m_i$  ist das Bild von  $\sum_i x_i y_i \otimes u_i$  unter  $1 \otimes \gamma$ .

**Satz 14.7** (Abstiegstheorie II) Sei  $A \rightarrow B$  ein treuflacher Ringhomomorphismus.

(a) Sei  $M$  ein  $A$ -Modul. Für den  $B$ -Modul

$$M' = B \otimes_A M$$

hat man einen kanonischen Isomorphismus von  $B \otimes B$ -Moduln (alle Tensorprodukte sind über  $A$ )

$$(14.7.1) \quad \begin{aligned} \phi : \quad M' \otimes B &\xrightarrow{\sim} B \otimes M' \\ (b \otimes m) \otimes b' &\mapsto b \otimes (b' \otimes m). \end{aligned}$$

Man kann dann  $M$  aus  $M'$  zurückerhalten:

$$(14.7.2) \quad M = \{m' \in M' \mid \phi(m' \otimes 1) = 1 \otimes m'\},$$

denn dies bedeutet gerade die oben gezeigte Exaktheit der Sequenz (14.6.1)

$$0 \rightarrow M \rightarrow B \otimes M \xrightarrow{\alpha_1 - \alpha_2} B \otimes B \otimes M$$

wobei

$$(14.7.3) \quad \begin{aligned} \alpha_1(b \otimes m) &= 1 \otimes b \otimes m \\ \alpha_2(b \otimes m) &= b \otimes 1 \otimes m, \end{aligned}$$

denn es gilt für  $m' = b \otimes m \in B \otimes M = M'$

$$\begin{aligned} \phi(m' \otimes 1) - 1 \otimes m' &= (b \otimes 1) \otimes m - 1 \otimes b \otimes m \\ &= \alpha_2(b \otimes m) - \alpha_1(b \otimes m). \end{aligned}$$

(b) Für die induzierten Morphismen ( $\phi_i$  hält den Eintrag an  $i$ -ter Stelle fest und ist  $\phi$  auf dem Rest)

$$\begin{aligned} \phi_1 : \quad B \otimes M' \otimes B &\rightarrow B \otimes B \otimes M' \\ b \otimes (b_2 \otimes m) \otimes b_3 &\mapsto b \otimes b_2 \otimes (b_3 \otimes m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 : \quad M' \otimes B \otimes B &\rightarrow B \otimes B \otimes M' \\ (b \otimes m) \otimes b_2 \otimes b_3 &\mapsto b \otimes (b_2 \otimes m) \otimes b_3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \phi_3 : \quad M' \otimes B \otimes B &\rightarrow B \otimes M \otimes B \\ (b \otimes m) \otimes b_2 \otimes b_3 &\mapsto b \otimes (b_2 \otimes m) \otimes b_3 \end{aligned}$$

gilt offenbar die sogenannte Kozykelbedingung

$$(14.7.4) \quad \phi_2 = \phi_1 \phi_3 .$$

(c) Sei umgekehrt  $M'$  ein  $B$ -Modul und

$$(14.7.5) \quad \phi : M' \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes M'$$

ein Isomorphismus von  $B \otimes B$ -Moduln, und seien

$$\phi_1 : B \otimes M' \otimes B \rightarrow B \otimes B \otimes M'$$

$$\phi_2 : M' \otimes B \otimes B \rightarrow B \otimes B \otimes M'$$

$$\phi_3 : M' \otimes B \otimes B \rightarrow B \otimes M' \otimes B$$

die induzierten Isomorphismen, wobei  $\phi_i$  das  $B$  an der  $i$ -ten Stelle fest lässt und auf den übrigen Stellen durch  $\phi$  definiert ist. (Für  $\phi_2$  haben wir explizit die Zuordnung

$$m' \otimes b_2 \otimes b_3 \mapsto \sum_i b_i \otimes b_2 \otimes m'_i ,$$

falls  $\phi(m' \otimes b_3) = \sum_i b_i \otimes m'_i$ .)

Gilt dann die Kozykelbedingung

$$(14.7.6) \quad \phi_2 = \phi_1 \phi_3 ,$$

so gibt es einen kanonischen  $A$ -Modul  $M$  mit  $B \otimes_A M \cong M'$ , nämlich den  $A$ -Modul

$$M = \{m' \in M' \mid \phi(m' \otimes 1) = 1 \otimes m'\} ,$$

für den die kanonische Abbildung

$$(14.7.7) \quad \begin{array}{ccc} \gamma : B \otimes_A M & \xrightarrow{\sim} & M' \\ b \otimes m & \mapsto & bm \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Sei nämlich

$$\tau : M' \rightarrow B \otimes M$$

durch  $\tau(m') = 1 \otimes m' - \phi(m' \otimes 1)$  definiert. Dann haben wir per Definition eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow M \rightarrow M' \xrightarrow{\tau} B \otimes M' .$$

Tensorieren wir mit  $B$  von rechts, so erhalten wir die obere Zeile im folgenden Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M \otimes B & \longrightarrow & M' \otimes B & \longrightarrow & B \otimes M' \otimes B \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow \phi & & \downarrow 1 \otimes \phi \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & B \otimes M' & \longrightarrow & B \otimes B \otimes M' , \end{array}$$

wobei die untere Sequenz die exakte Sequenz aus 14.6 ist, angewandt auf den  $A$ -Modul  $M'$ . Die Abbildung  $\gamma$  ist definiert durch  $\gamma(m \otimes b) = bm$  (und entspricht daher der Abbildung (14.7.7)). Wir wollen zeigen, dass  $\gamma$  ein Isomorphismus ist. Da die Zeilen exakt sind (die obere Zeile wegen der Flachheit von  $B$  über  $A$ ) und die beiden rechten vertikalen Abbildungen Isomorphismen, folgt die Behauptung, wenn wir zeigen, dass das Diagramm kommutativ ist.

Das linke Quadrat kommutiert, da für  $m \in M$  und  $b \in B$  nach Definition von  $M$  gilt

$$\phi(m \otimes b) = (1 \otimes b)\phi(m \otimes 1) = (1 \otimes b)(1 \otimes m) = 1 \otimes bm.$$

Für das rechte Quadrat gilt für den "unteren Weg": Sei für  $m \in M'$

$$\phi(m' \otimes 1) = \sum_i b_i \otimes m'_i$$

mit  $b_i \in B$  und  $m'_i \in M'$ . Dann ist

$$\phi(m' \otimes b) = (1 \otimes b)\phi(m' \otimes 1) = \sum_i b_i \otimes bm'_i,$$

und daher das Bild hiervon in  $B \otimes B \otimes M'$  gleich

$$\sum_i 1 \otimes b_i \otimes bm'_i - \sum_i b_i \otimes 1 \otimes bm'_i.$$

Auf dem "oberen Weg" wird zunächst  $m' \otimes b$  auf

$$\begin{aligned} 1 \otimes m' \otimes b &= \phi(m \otimes 1) \otimes b \\ &= 1 \otimes m' \otimes b - \sum_i b_i \otimes m'_i \otimes b \end{aligned}$$

abgebildet und dies durch  $1 \otimes \phi$  auf

$$\begin{aligned} 1 \otimes \phi(m' \otimes b) &= \sum_i b_i \otimes \phi(m'_i \otimes b) \\ &= \sum_i 1 \otimes b_i \otimes bm'_i - \sum_i b_i \otimes \phi(m'_i \otimes b). \end{aligned}$$

Wir haben also zu zeigen, dass

$$\sum_i b_i \otimes 1 \otimes bm'_i = \sum_i b_i \otimes \phi(m'_i \otimes b).$$

Dies bedeutet aber gerade, dass

$$\begin{array}{ccc} \phi_2(m \otimes 1 \otimes b) & = & \phi_1(\phi_3(m \otimes 1 \otimes b)) \\ \parallel & & \parallel \\ \sum_i b_i \otimes 1 \otimes bm'_i & & \phi_1(\sum_i b_i \otimes 1 \otimes m'_i) \\ & & \parallel \\ & & \sum_i b_i \otimes \phi(1 \otimes m'_i), \end{array}$$

was wegen der Voraussetzung  $\phi_2 = \phi_1\phi_3$  gilt.

**Satz 14.8** Für jedes Schema  $X$  sind die kanonischen Morphismen

$$H^1(X_{\text{Zar}}, \mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{\text{ét}}, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} H^1(X_{\text{fl}}, \mathbb{G}_m)$$

Isomorphismen.

**Beweis** für die flache Topologie (der étale Fall ist analog). Wir benutzen die Leray-Spektralsequenz für

$$\alpha : X_{\text{fl}} \rightarrow X_{\text{Zar}}.$$

Nach der Sequenz der niedrigen Terme

$$0 \rightarrow H^1(X_{\text{Zar}}, \alpha_* \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(X_{\text{fl}}, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^0(X_{\text{Zar}}, R^1 \alpha_* \mathbb{G}_m)$$

wobei  $\alpha_* \mathbb{G}_m = \mathcal{O}_X^\times$ , genügt es zu zeigen, dass  $R^1 \alpha_* \mathbb{G}_m = 0$ . Dies bedeutet, dass für alle  $x \in X$  der Halm  $(R^1 \alpha_* \mathbb{G}_m)_x = 0$ . Dieser Halm ist aber

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in U}} H^1(U_{\text{fl}}, \mathbb{G}_m) \cong \lim_{\substack{\rightarrow \\ x \in U}} \check{H}^1(U_{\text{fl}}, \mathbb{G}_m),$$

wobei  $U$  alle offenen Umgebungen von  $x$  durchläuft.

Da induktive Limiten vertauschen, genügt es zu zeigen, dass für jede flache Überdeckung  $(U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  mit  $U \subseteq X$  offen der Limes

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ V \subseteq U \text{ offen}}} \check{H}^1((U_i \times_U V \rightarrow V, \mathbb{G}_m)) = 0$$

ist. Wir können annehmen, dass  $U = \text{Spec}(A)$  affin ist und dann, dass  $I$  endlich ist und jedes  $U_i$  affin bzw., dass wir einen treuflachen Morphismus

$$\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$$

haben. Weiter können wir zum Limes übergehen und annehmen, dass  $A = \mathcal{O}_{X,x}$  ein lokaler Ring ist. Wir betrachten also eine Klasse in

$$(14.8.1) \quad H^1(B^\times \rightarrow (B \otimes_A B)^\times \rightarrow (B \otimes_A B \otimes_A B)^\times),$$

repräsentiert durch einen 1-Kozykel  $\alpha \in (B \otimes_A B)^\times$ . Dieser liefert einen Isomorphismus

$$(14.8.2) \quad \phi : B \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B \otimes_A B,$$

der wegen der Kozykelbedingung die Eigenschaft (14.7.6) erfüllt. Daher gibt es einen  $A$ -Modul  $M$  mit  $B \otimes_A M \cong B$ . Da der  $B$ -Modul  $B$  endlich erzeugt und flach ist, gilt dies auch für  $M$ . Da  $A$  lokal ist, ist  $M$  also ein freier  $A$ -Modul vom Rang 1, d.h.,  $M \cong A$ .

Es folgt aus der Abstiegstheorie, dass der Isomorphismus  $\phi$  in (14.8.2) derjenige ist, der nach (14.7.1) aus  $M$  konstruiert wird. Wegen  $M \cong A$  folgt nun, dass der zugehörige 1-Kozykel trivial ist, d.h., von  $B^\times$  kommt. q.e.d.

## 15 Schemata der Dimension 1

**Proposition 15.1** Sei  $X$  ein reguläres integres noethersches Schema und sei  $j : \text{Spec } K \hookrightarrow X$  die Inklusion des generischen Punktes. Dann gibt es eine exakte Sequenz von étalen Garben

$$(15.1.1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{G}_{m/X} \rightarrow j_*(\mathbb{G}_{m/k}) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^1} (i_x)_* \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

wobei  $X^1$  die Menge der Punkte von Kodimension 1 von  $X$  ist und  $i_x : \text{Spec}(k(x)) \hookrightarrow X$  der kanonische Morphismus.

Wir benötigen:

**Lemma 15.2** Sei  $f : U \rightarrow X$  étale.

(a) Für  $y \in U$  und  $x = f(y)$  ist  $\dim \mathcal{O}_{U,y} = \dim \mathcal{O}_{X,x}$ .

(b)  $U$  ist genau dann regulär, wenn  $X$  dies ist.

**Beweis** (a): Ohne Einschränkung ist  $X = \text{Spec } A$ ,  $A$  lokal und  $U = \text{Spec } B$  affin. Seien  $\mathfrak{m} \subseteq A$  (maximal) und  $\mathfrak{n} \subseteq B$  die Primideale, die  $x$  und  $y$  entsprechen. Dann ist  $\text{Spec } B_{\mathfrak{n}} \rightarrow \text{Spec } A$  treuflach (10.5), also surjektiv, also  $\dim B_{\mathfrak{n}} \geq \dim A$ . Umgekehrt ist nach Zariskis Hauptsatz 9.3 ohne Einschränkung  $B/A$  endlich. Dann induziert  $\varphi : A \rightarrow B$  eine ganze Ringerweiterung  $A/\ker \varphi \hookrightarrow B$ , und nach Cohen-Seidenberg ist  $\dim A \geq \dim(A/\ker \varphi) = \dim B \geq \dim B_{\mathfrak{n}}$ .

(b) Seien  $\mathfrak{m} \subset A$  und  $\mathfrak{n} \subset B$  wie oben. Dann ist nach (a)  $\dim A = \dim B_{\mathfrak{n}}$ . Andererseits ist  $\mathfrak{m}B_{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}B_{\mathfrak{n}}$ , also

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \otimes_{k(\mathfrak{m})} k(\mathfrak{n}) \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \otimes_{A(\mathfrak{m})} B_{\mathfrak{n}}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{n}} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \otimes_A B_{\mathfrak{n}} \cong \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2,$$

d.h.,  $\dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim_{k(\mathfrak{n})} \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ .

**Beweis von Proposition 15.1:** Für  $U \rightarrow X$  étale haben wir Morphismen

$$\mathbb{G}_m(U) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{G}_m(U \times_X \text{Spec } K) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{x \in X^1} \mathbb{Z}(U \times_X \text{Spec}(K)),$$

wobei  $\alpha$  die Restriktion und  $\beta$  wie folgt definiert ist: Es ist  $U \times_X \text{Spec } K = \coprod_{\eta \in U^0} \text{Spec } k(\eta)$

nach 15.2 (a) und

$$U \times_X \text{Spec } k(x) = \coprod_{\substack{y \in U^1 \\ f(y)=x}} \text{Spec}(k(y))$$

Die Komponente  $\beta_y : \mathbb{G}_m(k(\eta)) = k(\eta)^\times \rightarrow \mathbb{Z}$  von  $\beta$  an der Stelle  $y$  ist dann 0 wenn  $y \notin \overline{\{\eta\}}$  ( $\Leftrightarrow \eta \notin \text{Spec } \mathcal{O}_{U,y}$ ) und die diskrete Bewertung zu  $y$  auf  $k(\eta)^\times$ , wenn  $\eta$  der generische Punkt von  $\text{Spec } \mathcal{O}_{U,y}$  ist, also  $k(y) = \text{Quot}(\mathcal{O}_{U,y})$ . Es folgt sofort  $\beta\alpha = 0$ .

Durch die Bildung der assoziierten Garbe zu  $\bigoplus_{x \in X^1} (i_x)_* \mathbb{Z}$  erhalten wir die gewünschte Sequenz. Für die Exaktheit genügt es, die Exaktheit nachzuweisen, wenn  $U$  durch einen lokalen Ring  $\mathcal{O}_{U,y}$  für  $y \in U^1$  ersetzt wird.

Dann ist die Sequenz aber

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{U,y}^\times \rightarrow (\text{Quot}(\mathcal{O}_{U,y}))^\times \xrightarrow{v_y} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

und ist exakt.

Wir betrachten nun die lange exakte Kohomologiesequenz zu

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow j_* \mathbb{G}_m \rightarrow \bigoplus_{x \in X^1} (i_x)_* \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Wir benötigen:

**Lemma 15.3** Sei  $X$  ein quasi-kompaktes, quasi-separiertes Schema. Dann gilt für jedes induktive System  $(F_i)_{i \in I}$  von abelschen étalen Garben auf  $X$ :

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} H_{\text{ét}}^n(X, F_i) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^n(X, \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} F_i).$$

Insbesondere vertauscht étale Kohomologie mit direkten Summen.

**Beweis:** Siehe Tamme II, Introduction to étale Cohomology, 1.5.3.

$S(X_{\text{ét}})$  ist äquivalent zu  $S(X_{\text{ét, f.p.}})$  für den noetherschen Situs der étalen  $X$ -Schemata von endlicher Präsentation. Es gilt also bei uns

$$H_{\text{ét}}^n(X, \bigoplus_{x \in X^1} (i_x)_* \mathbb{Z}) = \bigoplus_{x \in X^1} H_{\text{ét}}^n(X, (i_x)_* \mathbb{Z})$$

**Lemma 15.4** Sei  $(X_i)_{i \in I}$  ein projektives System von quasi-kompakten und quasi-separierten Schemata, mit affinen Übergangsmorphismen. Sei  $i_0 \in J$  und  $F$  eine étale Garbe auf  $X_{i_0}$ . Dann ist die natürliche Abbildung

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ i \in I}} H_{\text{ét}}^n(X_i, F|_{X_i}) \xrightarrow{\sim} H_{\text{ét}}^n(\lim_{\substack{\longleftarrow \\ i}} X_i, F|_{\lim_{\substack{\longleftarrow \\ i}} X})$$

ein Isomorphismus, wobei  $F|_{X_i}$  bzw.  $F|_{X=\lim_{\substack{\longleftarrow \\ i}} X_i}$  das Pullback von  $F$  bezeichnet.

**Beweis:** Siehe Milne, Étale Cohomology, Lemma 1.16.

**Corollar 15.5** Sei  $f : Y \rightarrow X$  ein quasi-kompaktes, quasi-separierter Morphismus von Schemata,  $F$  eine étale Garbe auf  $Y$  und  $\bar{x}$  ein geometrischer Punkt von  $X$ . Dann ist

$$(R^n f_* F)_{\bar{x}} \cong H_{\text{ét}}^n(Y \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \bar{x}}^h), F|_{\dots}).$$

**Beweis** Sei  $P$  die Prägarbe  $U \rightsquigarrow H_{\text{ét}}^n(Y \times_X U, F)$  auf  $X$ . Dann ist  $R^n f_* F = aP$ , also

$$\begin{aligned} (R^n f_* F)_{\bar{x}} = P_{\bar{x}} &= \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \text{ étale Umgebung von } \bar{x} \text{ in } X}} H_{\text{ét}}^n(Y \times_X U, F|_{Y \times_X U}) \\ &\stackrel{15.4}{=} H_{\text{ét}}^n(Y \times_X \text{Spec} \mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{sh}, F|_{\dots}). \end{aligned}$$

Die obige Behauptung folgt nun daraus, dass  $\mathcal{O}_{X, \bar{x}}^{sh} \otimes_{\mathcal{O}_{X, \bar{x}}} K = K_{\bar{x}}$  ist.

Nun ist

$$H_{\text{ét}}^i(\text{Spec}K_{\bar{x}}, \mathbb{G}_m) = H^i(K_{\bar{x}}, (K_{\bar{x}}^{\text{sep}})^{\times})$$

Wir benötigen einige Tatsachen aus der Galoiskohomologie

**Lemma 15.6** (Hilbert 90)  $H^1(K, (K^{\text{sep}})^{\times}) = 0$  für jeden Körper  $K$ .

**Lemma 15.7** Für jeden Körper  $L$  ist  $H^2(L, (K^{\text{sep}})^{\times}) = Br(L)$ , die Brauergruppe von  $L$ .

Nach Corollar 15.5 gilt für jeden geometrischen Punkt  $\bar{x}$  von  $X$

$$(R^1 j_* \mathbb{G}_{m,K})_{\bar{x}} = H^1(K_{\bar{x}}, K_{\bar{x}}^{\times}) = 0,$$

wobei  $K_{\bar{x}} = \text{Quot}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$  ist, denn es gilt  $\text{Spec}(K) \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}) = \text{Spec}(K_{\bar{x}})$ . Also ist

$$R^1 j_* \mathbb{G}_{m,K} = 0.$$

Aus der Leray-Spektralsequenz für  $j_*$  folgt somit

$$H^1(X, j_* \mathbb{G}_{m,K}) = H^1(K, (K^{\text{sep}})^{\times}) = 0$$

und eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^2(X, j_* \mathbb{G}_{m,K}) \rightarrow Br(K) \rightarrow H^0(X, R^2 j_* \mathbb{G}_{m,K}) \rightarrow H^3(X, j_* \mathbb{G}_{m,K}).$$

Aus der Sequenz (15.1.1) folgt eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X^{\times}) \rightarrow K^{\times} \rightarrow \bigoplus_{x \in X^1} \mathbb{Z} \rightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow 0,$$

also die bekannte Isomorphie (für reguläres  $X$ )

$$(H^1(X) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X)).$$

Sei nun  $\dim X = 1$  und  $k(x)$  perfekt für alle  $x \in X^1$ .

**Lemma 15.8**  $R^i j_* \mathbb{G}_{m,K} = 0$  für  $i \geq 1$ .

**Beweis** Für alle geometrischen Punkte  $\bar{x}$  von  $X$  ist  $K_{\bar{x}} = \text{Quot}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ , und  $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$  ist ein diskreter Bewertungsring mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper, oder ein separabel abgeschlossener Körper. Im ersten Fall hat  $K_{\bar{x}}$  die kohomologische Dimension 1, im zweiten die kohomologische Dimension 0. Es ist also

$$(R^i j_* \mathbb{G}_{m,K})_{\bar{x}} = H^i(K_{\bar{x}}, (K_{\bar{x}}^{\text{sep}})^{\times}) = 0$$

für  $i \geq 1$ .

In diesem Fall haben wir Isomorphismen

$$H^i(X, j_* \mathbb{G}_{m,K}) \cong H^i(K, (K^{\text{sep}})^{\times})$$

für alle  $i$ .

Die Sequenz (15.1.1) liefert eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow Br(K) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^1} H^2(k(x), \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow \dots$$

denn  $(i_x)_*$  ist exakt, und mit der Leray-Spektralsequenz für  $(i_x)_*$  folgt

$$H^i(X, (i_x)_*\mathbb{Z}) \cong H^i(\text{Spec}(k(x)), \mathbb{Z})$$

für alle  $i$ .

Sei schließlich  $X$  eine glatte projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$ , und wie vorher  $K = K(X)$  der Funktionenkörper von  $X$ .

**Satz 15.9** (Satz von Tsen)  $K$  hat die kohomologische Dimension 1.

Genauer zeigte Tsen, dass  $K$  ein sogenannter  $C_1$ -Körper ist, und hieraus folgt  $cd(K) \leq 1$ .

Hieraus folgt, dass  $cd(k(x)) = 0$  für  $x \in X^1$ ,  $H^i(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\sim} H^i(X, j_*, \mathbb{G}_{m,K}) = 0$  für  $i \geq 2$ .

Sei  $n$  invertierbar in  $k$ . Aus der Kummer-Sequenz

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \rightarrow 0$$

folgt dann durch Übergang zur Kohomologie

**Lemma 15.10** (i)  $H^0(X, \mu_n) = \mu_n$  (da  $H^0(X, \mathbb{G}_m) = k^\times$ )

(ii)  $H^1(X, \mu_n) = Pic(X)[n] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$

(iii)  $H^2(X, \mu_n) \cong Pic(X)/n Pic(X) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , wobei  $g$  das Geschlecht von  $X$  ist, also  $g = \dim_k H^0(X, \Omega_{X/k}^1)$ .

**Beweis** Die ersten Isomorphismen sind klar aus der langen exakten Kohomologiesequenz. Die weiteren Isomorphismen in (ii) und (iii) folgen daraus, dass für  $Pic^0(X) = \ker(Pic(X) \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z})$  gilt

$$Pic^0(X) \cong Jac(X)(k),$$

wobei  $Jac(X)$  die Jacobische Varietät von  $X$  ist. Dies ist eine abelsche Varietät.

**Corollar 15.11**  $H^i(X, \mathbb{Z}/n)$  endlich.