# §2 Die Dimension eines Vektorraums

Sei $V$ ein $K$–Vektorraum und $v_1, \ldots, v_r \in V$.

**Definition:** $v \in V$ heißt **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ falls es Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ gibt, so dass

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r$$

Sei $M \subseteq V$ eine nicht leere Menge von Vektoren.

Der von **M aufgespannte Untervektorraum von V** (die **lineare Hülle** von $M$) ist die Menge aller Linearkombinationen aus $M$. Schreibe dafür $K \cdot M$.
Es ist also $K \cdot M := \{\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \mid r \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ und $v_1, \ldots, v_r \in M$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K\}$.
Für die leere Menge setzen wir $K \cdot \phi = \{0\}$.
Für $M = \{v_1, \ldots, v_r\}$ schreibe auch $Kv_1 + \ldots + Kv_r$ für $KM$.
Sind $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$ und $w = \sum\limits_{i=1}^{s} \mu_i w_i$ aus $KM$, so auch $v + w = \sum\limits_{i=0}^{r} \lambda_i v_i + \sum\limits_{i=1}^{s} \mu_i w_i$ und $\lambda v = \sum\limits_{i=1}^{r} (\lambda \lambda_i) v_i$ für $\lambda \in K$.
Ferner ist für $v \in M$ auch $0 = 0 \cdot v$ und $v = 1 \cdot v$ aus $KM$. Also ist $KM$ ein Untervektorraum von $V$ mit $M \subseteq KM$. Ist $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $M \subseteq W$, so ist auch jede Linearkombination $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \in KM$ in $W$, also $KM \subseteq W$. **Fazit:**

**(2.1) Bemerkung:** $KM$ ist der kleinste Untervektorraum von $V$, welcher $M$ umfaßt.
Offensichtlich gilt: $K(N \cup M) = KN + KM$ und $KN \subseteq KM$, falls $N \subseteq M$.

**Beispiele:**

a) Betrachte in $K^n$ die sog. **Einheitsvektoren**

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ gilt

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n, \text{ also ist}$$

$$K^n = K \cdot e_1 + \ldots + K \cdot e_n.$$

b) Betrachte über $K$ ein lineares Gleichungssystem

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \ i = 1, \ldots, m$$

von $m$ Gleichungen in $n$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$.

Mit Hilfe des Gauß–Algorithmus erhält ein sog. Fundamentalsystem von Lösungen $v_1, \ldots, v_{n-r}$, so dass jede Lösung von der Form $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-r} v_{n-r}$ ist. M.a.W.:

$$Kv_1 + \ldots + Kv_{n-r} \text{ ist der Lösungsraum von } (*)$$

**Rechenbeispiel:** $(*) \quad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$ hat die freien Variablen $x_2$ und $x_3$ mit Fundamentallösungen

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } Kv_1 + Kv_2 \text{ ist der}$$

Lösungsraum von $(*)$.

**Definition:** Ein $r$–Tupel $(v_1, \ldots, v_r)$ von Vektoren aus $V$ heißt **linear unabhängig**, falls gilt:

Aus $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$

$(v_1, \ldots, v_r)$ heißt **linear abhängig**, falls $(v_1, \ldots, v_r)$ **nicht** linear unabhängig ist, d.h., wenn es $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in K^r$ gibt mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$, aber nicht alle $\lambda_i$ sind gleich Null.

Das leere Tupel $\phi (r = 0)$ soll linear unabhängig sein.

**(2.2) Bemerkung:** Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ ein $r$–Tupel von Vektoren aus $V$.

a) Ist ein $v_i = 0$ so ist $(v_1, \ldots, v_r)$ linear abhängig.

b) Ist $r \geq 2$ und $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$, so ist $(v_1, \ldots, v_r)$ linear abhängig.

c) $(v_1)$ ist genau dann linear abhängig, falls $v_1 = 0$.

d) Ist $(v_1, \ldots, v_r)$ linear abhängig und $r \geq 2$, so gibt es ein $k \in \{1, \ldots, r\}$ so dass $v_k$ Linearkombination der übrigen $v_i$ ist.

Es gilt dann

$$Kv_1 + \ldots + Kv_r = Kv_1 + \ldots + Kv_{k-1} + Kv_{k+1} + \ldots + Kv_r$$

**Beweis:**

a) $0 = 0v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \ldots + 0v_r$.

b) Setze $\lambda_k = 0$ für $k \notin \{i, j\}, \lambda_i = 1, \lambda_j = -1$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 1 \cdot v_i + (-1) \cdot v_j = v_i - v_j = v_i - v_i = 0$$

c) Für $v_1 = 0$ ist $(v_1)$ nach a) linear abhängig.

Ist $(v_1)$ linear abhängig, so ex. $\lambda_1 \neq 0$ mit $\lambda_1 \cdot v_1 = 0$. Es folgt $v_1 = \lambda_1^{-1}(\lambda_1 v_1) = \lambda_1^{-1} \cdot 0 = 0$.

d) Sei $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0$ und nicht alle $\lambda_j = 0$; o.B.d.A. sei $\lambda_1 \neq 0$.

Dann ist $(-\lambda_1)v_1 = \sum\limits_{i=2}^{r} \lambda_i v_i$ und $v_1 = \sum\limits_{i=2}^{r} \frac{-\lambda_i}{\lambda_1} v_i \in Kv_2 + \ldots + Kv_r$.

Damit ist nach obiger Bemerkung $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subseteq Kv_2 + \ldots + Kv_r$ und $Kv_1 + Kv_2 + \ldots + Kv_r \subseteq Kv_2 + \ldots + Kv_r$.

Die umgekehrte Inklusion gilt allgemein.

**Beispiele:**

a) Die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ bilden ein $n$–Tupel $(e_1, \ldots, e_n)$ linear unabhängiger Vektoren: Es ist $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$. Also folgt aus

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0 \text{ schon } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0.$$

b) Im obigen Beispiel b) ist $(v_1, \ldots, v_{n-r})$ linear unabhängig:

Sei $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-r} v_{n-r} = 0$. Es ist auch $0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_{n-r} = 0$. Wegen der **Eindeutigkeit** der Darstellung in I, 4.1 folgt

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_{n-r} = 0$$

c) Eine **Polynomfunktion** $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist von der Form $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und Konstanten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (den **Koeffizienten** von $p$). Die Menge aller Polynomfunktionen bilden offenbar einen Untervektorraum der Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Betrachte die Polynomfunktion $p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = t^2, \ldots, p_n(t) = t^n, \ldots$. Dann ist $(p_0, \ldots, p_m)$ linear unabhängig für alle $m \in \mathbb{N}$.

**Beweis:** In der Analysis werden wir lernen: Eine Polynomfunktion $(*) p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ mit $a_n \neq 0$ hat höchstens $n$ Nullstellen, ist also insbesondere **nicht die Nullfunktion**.

Aus $\lambda_0 p_0 + \ldots + \lambda_m p_m = 0 =$ Nullfunktion - d.h.

$\lambda_0 + \lambda_1 t + \ldots + \lambda_m t^m = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ - folgt also:

$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_m = 0$. Für eine Polynomfunktion $p(t)$ wie oben mit $a_n \neq 0$ heißt $n$ der **Grad** von $p(t)$.

d) Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig in $\mathbb{R}^4$.

**Beweis:** Die Tripel $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ sind gerade die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 10x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Die Lösungen findet man m.H. des Gauß–Algorithmus

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 10 & 7 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 15 & 10 \\ 0 & 21 & 14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Setze die freie Variable $x_3 = 1 : x_2 = -\frac{2}{3},\ x_1 = 4x_2 + 3x_3 = \frac{1}{3}$

Somit ist $\frac{1}{3}v_1 - \frac{2}{3}v_2 + 1 \cdot v_3 = 0$ und $(v_1, v_2, v_3)$ ist linear abhängig.

**(2.3) Bemerkung:** Ein $r$–Tupel $(v_1, \ldots, v_r)$ von Vektoren in $V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn gilt: Jeder Vektor $v$ aus $Kv_1 + \ldots + Kv_r$ läßt sich nur auf eine Weise als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_r$ darstellen, d.h.: Aus $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i v_i$ folgt $\lambda_i = \mu_i$ für $i = 1, \ldots, r$.

**Beweis:** Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabhängig und $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i v_i$.
Dann ist $(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_r - \mu_r)v_r = 0$. Es folgt $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \ldots, \lambda_r - \mu_r = 0$, da $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabhängig ist.
Sei umgekehrt $(v_1, \ldots, v_r)$ linear abhängig. Dann existiert ein $r$–Tupel $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \neq (0, \ldots, 0)$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r \cdot v_r = 0 = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_r$$

und die 0 hat zwei Darstellungen als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_r$.

**Der Begriff der Basis eines Vektorraums**

**Definition:** Ein $n$–Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren aus einem Vektorraum $V \neq \{0\}$ heißt **Basis** von $V$, wenn gilt:

(1) $V = Kv_1 + \ldots + Kv_n$ („$(v_1, \ldots, v_n)$ spannt $V$ auf“.)

Man sagt dann auch, $(v_1, \ldots, v_n)$ sei ein Erzeugendensystem von $V$.

(2) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.

**Konvention:** $\phi$ ist eine Basis von $V = \{0\}$.

**In den Beispielen:**

a) $V = K^n$. Wir haben gesehen, dass $(e_1, \dots, e_n)$ linear unabhängig ist und $V = Ke_1 + \dots + Ke_n$. Also ist $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von $K^n$, die sog. kanonische Basis.

b) Jedes System von Fundamentallösungen ist eine Basis des Lösungsraums eines linearen Gleichungssystems.

c) Sie $P_m$ die Menge der Polynomfunktionen vom Grad $\leq m$. Dann ist $P_m = \mathbb{R} \cdot 1 + \mathbb{R} \cdot t + \mathbb{R}t^2 + \dots + \mathbb{R} \cdot t^m$ und $(1, t, t^2, \dots, t^m)$ ist linear unabhängig. Also ist $(1, t, t^2, \dots, t^m)$ eine Basis des $\mathbb{R}$–Vektorraums $P_m$,

**Ziel** der folgenden Ausführungen ist, zu zeigen, dass alle Basen eines Vektorraums gleich lang sind.

**(2.4) Charakterisierungen des Begriffs „Basis“:** Sei $V \neq \{0\}$ ein $K$–Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis von $V$.

b) $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein **minimales Erzeugendensystem** von $V$, d.h.:

- $V = Kv_1 + \dots + Kv_n$
- $V \neq Kv_1 + \dots + Kv_{k-1} + Kv_{k+1} + \dots + Kv_n$ für $k = 1, \dots, n$

c) $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein maximales System linear unabhängiger Vektoren aus $V$, d.h.

- $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig,
- $(v_1, \dots, v_n, w)$ ist linear abhängig für alle $w \in V$.

d) Jedes $v \in V$ läßt sich auf genau eine Weise aus den Vektoren $v_1, \dots, v_n$ linear kombinieren.

**Beweis:** a) $\Rightarrow$ b) Nach Voraussetzung erzeugt $(v_1, \dots, v_n)$ den Vektorraum $V$. Angenommen $V = Kv_1 + \dots + Kv_{k-1} + Kv_{k+1} + \dots + Kv_n$. Dann ist $v_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n$, d.h. $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{k-1} + (-1)v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n$, d.h. $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig, Widerspruch.

b) $\Rightarrow$ c) Sei $(v_1, \dots, v_n)$ ein minimales Erzeugendensystem von $V$.
Zu zeigen:

(i) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.

(ii) $(v_1, \ldots, v_n, w)$ ist linear abhängig für jedes $w \in V$

**Zu (i)** $n = 1 : v_1 \neq 0$, da sonst $V = Kv_1 = \{0\}$, also ist $(v_1)$ linear unabhängig.
$n \geq 2$: Angenommen $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear abhängig. Dann gibt es nach 2.2 ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $V = Kv_1 + \ldots + Kv_{k-1} + Kv_{k+1} + \ldots + Kv_n$, Widerspruch zur Minimalität.

**Zu (ii)** Wegen $V = Kv_1 + \ldots + Kv_n$ ist $w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ für jedes $w \in V$. Somit ist $0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + (-1)w$ und $(v_1, \ldots, v_n, w)$ linear abhängig.

c) $\Rightarrow$ a) Sei $w \in V$ beliebig. Nach Voraussetzung ist $(v_1, \ldots, v_n, w)$ linear abhängig; also gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_n, \mu$ in $K$ mit $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n + \mu w = 0$ und $(\mu_1, \ldots, \mu_n, \mu) \neq (0, \ldots, 0)$

Es ist $\mu \neq 0$, da sonst bereits $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig wäre. Es folgt $w = \left(-\frac{\mu_1}{\mu}\right) v_1 + \ldots + \left(-\frac{\mu_n}{\mu}\right) v_n$ und somit $V = Kv_1 + \ldots Kv_n$.

a) und d) sind nach (2.3) äquivalent.

**(2.5) Austauschsatz von Steinitz:** Sei $V \neq \{0\}$ ein $K$–Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$. Weiter sei $(w_1, \ldots, w_r)$ ein System linear unabhängiger Vektoren aus $V$. Dann gilt:

a) $r \leq n$.

b) Es gibt Vektoren $u_1, \ldots, u_r \in \{v_1, \ldots, v_n\}$, so dass aus $(v_1, \ldots, v_n)$ wieder eine Basis entsteht, wenn man darin $u_1, \ldots, u_r$ durch $w_1, \ldots, w_r$ ersetzt („austauscht“).

**Beweis:** erfolgt durch Induktion nach $r$. Der Fall $r = 1$ ist Inhalt des folgenden Lemmas.

**(2.6) Austauschlemma:** Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$ und $w \neq 0$ aus $V$. Dann gibt es ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so dass auch $(v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$ ist. Genauer gilt:
Ist $w = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ und $\lambda_k \neq 0$, so ist $(v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$.

**Beweis:** Sei $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ und $\lambda_k \neq 0$. Dann ist

$$v_k = \frac{1}{\lambda_k} w + (-\frac{\lambda_1}{\lambda_k})v_1 + \ldots + (\frac{-\lambda_{k-1}}{\lambda_k})v_{k-1} + (\frac{-\lambda_{k+1}}{\lambda_k})v_{k+1} + \ldots + (\frac{-\lambda_n}{\lambda_k})v_n$$

Also ist $v_k \in W = K\{w, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. Nach 2.1 ist dann $V = Kv_1 + \ldots + Kv_n \subseteq W \subseteq V$, also $V = W$ und $(w, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ ist ein Erzeugendensystem von $V$.

**Noch z.z.:** $(w, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig.

Dazu sei $\lambda w + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \mu_i v_i = 0$. Setze $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ ein und erhalte

$(\lambda\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda\lambda_{k-1} + \mu_{k-1})v_{k-1} + \lambda\lambda_k v_k + (\lambda\lambda_{k+1} + \mu_{k+1})v_k + \ldots$
$\ldots + (\lambda\lambda_n + \mu_n)v_n = 0$. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig ist folgt

$$\begin{aligned} \lambda\lambda_i + \mu_i &= 0 \text{ für alle } i \neq k \\ \lambda\lambda_k &= 0 \end{aligned}$$

Wegen $\lambda_k \neq 0$ folgt $\lambda = 0$, also auch $\mu_i = 0$ für alle $i \neq k$.

**Fortsetzung des Beweises von 2.5:** Sei nun $r \geq 2$ und sei 1.5 schon bewiesen für $r - 1$.
Nach Induktionsvoraussetzung ist wegen „$(w_1, \ldots, w_{r-1})$ linear unabhängig“ $r - 1 \leq n$ und nach geeigneter Umnummerierung der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ kann man annehmen, dass $(w_1, \ldots, w_{r-1}, v_r, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$ ist.

Schreibe $w_r$ als Linearkombination dieser Basis:

$$w_r = \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i w_i + \sum_{j=r}^{n} \lambda_j v_j$$

Da $(w_1, \ldots, w_r)$ linear unabhängig ist, folgt:

(i) $(w_1, \ldots, w_{r-1})$ ist (nach 2.4c)) keine Basis von $V$.
Insbesondere ist $r - 1 \neq n$, also $r \leq n$

(ii) $\lambda_j \neq 0$ für wenigstens ein $j \geq r$ (sonst wäre $\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i w_i + (-1)w_r = 0$ und $(w_1, \ldots, w_r)$ linear abhängig.)

O.B.d.A. sei $\lambda_r \neq 0$

Mit dem Lemma folgt: $(w_1, \ldots, w_{r-1}, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von $V$.

**(2.7) Korollar:** Alle Basen von $V$ haben die gleiche Länge.

**Beweis:** Sind $(u_1, \ldots, u_r)$ und $(v_1, \ldots, v_s)$ Basen von $V$, so gilt nach 2.5:

$r \leq s$ da $(u_1, \ldots, u_r)$ linear unabhängig und $(v_1, \ldots, v_s)$ Basis von $V$.
$s \leq r$ da $(v_1, \ldots, v_s)$ linear unabhängig und $(u_1, \ldots, u_r)$ Basis von $V$.

**Definition:** Hat $V$ eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ so heißt die Länge $n$ dieser (und jeder anderen!) Basis die **Dimension** von $V$.
Schreibweise: $\dim_K V = n$ (oder $\dim V = n$, falls klar ist welcher Körper gemeint ist.)
Hat $V$ keine Basis bestehend endlich vielen Elementen, so setzt man $\dim V = \infty$. Unter einem **endlichen Vektorraum** versteht man einen Vektorraum mit endlicher Dimension.

**(2.8) Basisergänzungssatz:** In einem endlichen Vektorraum kann man jedes System linear unabhängiger Vektoren zu einer Basis ergänzen.

**Beweis:** Sei $(w_1, \ldots, w_r)$ linear unabhängig und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$. Dann ist nach 2.5 $r \leq n$ und bei geeigneter Anordnung der $v_i$ ist $(w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von $V$.

**(2.9) Basisauswahlsatz:** Ist $V = K \cdot M$ und $M$ endlich, so kann man **in M** eine Basis von $V$ wählen.

**Beweis:** Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein **innerhalb der Menge M** maximales System linear unabhängiger Vektoren, d.h.: $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq M, (v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig und für alle $w \in M$ ist $(v_1, \ldots, v_n, w)$ linear abhängig.

**Beh.:** $(v_1, \ldots, v_n)$ erzeugt $V$ (und ist somit eine Basis von $V$)

**Beweis:** Zeige dass $M \subseteq Kv_1 + \ldots + Kv_n$. Nach 2.1 ist dann

$$V = KM \subseteq Kv_1 + \ldots + Kv_n \subseteq KM.$$

Sei also $w \in M$ beliebig. Dann ist nach Vor. $(v_1, \ldots, v_n, w)$ linear abhängig, d.h.

$$\lambda w + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \text{ mit } (\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

Wegen $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig folgt $\lambda \neq 0$ und daher

$$w = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) + \ldots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) \in Kv_1 + \ldots + Kv_n.$$

**(2.10) Korollar:** Sei $\dim V = n < \infty$ Dann gilt:

a) $n$ ist die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren in $V$ (2.8)

b) Jedes System von $n$ linear unabhängiger Vektoren ist eine Basis von $V$. (2.8)

c) $n$ ist die minimale Erzeugendenanzahl von $V$. (2.9)

d) Jedes Erzeugendensystem der Länge $n$ ist eine Basis von $V$. (2.9)

**(2.11) Satz:** Sei $\dim V = n < \infty$ und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:

a) $W$ ist endlich und $\dim W \leq \dim V$.

b) Ist $\dim W = \dim V$, so ist bereits $W = V$.

**Beweis:**

a) Nach (2.10) a) hat jedes System linear unabhängier Vektoren aus $W$ höchstens die Länge $n$. Also gibt es ein System $(w_1, \ldots, w_m)$ linear unabhängiger Vektoren aus $W$ (mit $m \leq n$), welches **innerhalb W** nicht mehr verlängert werden kann, d.h.:

Für alle $w \in W$ ist $(w_1, \ldots, w_m, w)$ linear abhängig.

Nach 2.4 ist dann $(w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von $W$ und $\dim W = m \leq n$.

b) Sei $\dim W = \dim V = n$ und $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von $W$.

Dann ist $(w_1, \ldots, w_n)$ linear unabhängig und nach 2.10 b) eine Basis von $V$. Insbesondere ist $V = W$.

**Beispiele:** $\dim K^n = n$, da $(e_1, \ldots, e_n)$ Basis von $K^n$.
Für den $\mathbb{R}^3$ gilt insbesondere (siehe 2.10)

(1) 4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig.

(2) Je 3 linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ erzeugen den ganzen Raum.

(3) 2 Vektoren erzeugen noch nicht den ganzen Raum.

**(2.12) Die Dimensionsformel für Untervektorräume:**
Seien $V$ und $W$ Untervektorräume eines endlichen Vektorraums. Dann gilt:

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

**Beweis:** Als Untervektorräume eines endlichen Vektorraums sind $V, W, V+W$ und $V \cap W$ endlich. Wegen $V \cap W \subseteq V$ und $V \cap W \subseteq W$ gilt nach 2.11

$$r = \dim V \cap W \leq s = \dim V, r \leq t = \dim W$$

Sei $(u_1, \ldots, u_r)$ eine Basis von $U = V \cap W$. Nach dem Basisergänzungssatz gibt es wegen $U \subseteq V$ bzw. $U \subseteq W$ Vektoren $v_{r+1}, \ldots, v_s \in V$, so dass $(u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_s)$ Basis von $V$ und $w_{r+1}, \ldots, w_t \in W$, so dass $(u_1, \ldots, u_r, w_{r+1}, \ldots, w_t)$ Basis von $W$ ist.
Offenbar ist dann $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_s, w_{r+1}, \ldots, w_t)$ ein Erzeugendensystem von $V+W$; seine Länge ist $r + (s-r) + (t-r) = s + t - r = \dim V + \dim W - \dim V \cap W$.
Es ist noch zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist, und somit eine Basis von $V+W$. Sei also

$$(*) \quad \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \beta_s v_s + \gamma_{r+1} w_{r+1} + \ldots + \gamma_t w_t = 0$$

Dann ist $-\underbrace{\sum_{k=r+1}^{t} \gamma_k w_k}_{\in W} = \underbrace{\sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j}_{\in V \cap W \subseteq V} + \underbrace{\sum_{i=r+1}^{s} \beta_i v_i}_{\in V}$
aus $V \cap W$. Da $(u_1, \ldots, u_r)$ eine Basis von $V \cap W$ ist, gibt es $\delta_1, \ldots, \delta_r \in K$, so dass

$$-\sum_{k=r+1}^{t} \gamma_k w_k = \sum_{j=1}^{r} \delta_j u_j, \text{ d.h. } \sum_{j=1}^{r} \delta_j u_j + \sum_{k=r+1}^{t} \gamma_k w_k = 0$$

Da $(u_1, \ldots, u_r, w_{r+1}, \ldots, w_t)$ linear unabhängig ist, folgt $\delta_1 = \ldots = \delta_r = 0$ und $\gamma_{r+1} = \ldots = \gamma_t = 0$. Setze in $(*)$ ein, erhalte

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r + \beta_{r+1} v_{r+1} + \ldots + \beta_x v_s = 0$$

Da $(u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_s)$ ebenfalls linear unabhängig ist, folgt

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \beta_{r+1} = \ldots = \beta_s = 0$$

Damit ist die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$ nachgewiesen.

Wir wollen noch angeben, wie man die Dimension des Lösungsraums eines linearen Gleichungssystems bestimmt. Sei dazu $A$ eine $m \times n$ –Matrix. Durch elementare Zeilenumformungen vom Typ I und II geht $A$ über in eine Matrix $B$ in Zeilenstufenform mit $r$ von 0 verschiedenen Zeilen (siehe I §4).
$n - r$ ist dann die Anzahl der freien Variablen und diese gleich der Anzahl der Fundamentallösungen, diese bilden eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen Gleichungssystems. **Fazit:**

**(2.13) Korollar:** Für den Lösungsraum Lös (A) des zu $A$ gehörigen linearen Gleichungssystems gilt

$$\dim \text{ Lös } (A) = n - r$$

Insbesondere ist $r = n - \dim$ Lös $A$, und daher unabhängig von der Wahl der Umformungen.