§2 Durchschnitt und Verbindungsraum

Seien X und Y nicht leere affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$.

(2.1) Satz:

a) Ist $X \subseteq Y$, so ist $T(X) \subseteq T(Y)$.

b) Ist $X \cap Y \neq \phi$ so ist $X \cap Y$ ein affiner Raum mit Richtungsvektorraum $T(X) \cap T(Y)$.

c) Sei $\mathcal{V}$ eine nicht leere Menge von affinen Unterräumen des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $Z = \bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}} V$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Beweis:

a) Wähle ein $p \in Y \subseteq X$. Wegen $Y \subseteq X$ ist dann
$T(Y) = \{\overrightarrow{py} \mid y \in Y\} \subseteq \{\overrightarrow{px} \mid x \in X\} = T(X)$.

c) Im Fall $Z = \phi$ ist nichts zu zeigen. Ist $Z \neq \phi$, so wählen wir ein $p \in Z$, also $p \in V$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Es folgt $V = p + T(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Setze

$$W := \bigcap_{V \in \mathcal{V}} T(V).$$

Da alle $T(V)$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ sind, gilt dies auch für W: Sind $v, w \in W$, so ist $v, w \in T(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Da die $T(V)$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ sind, folgt für $\lambda \in K$: $v + \lambda w \in T(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Also ist $v + \lambda w \in W$. Somit ist $p + W$ ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Behauptung: $Z = p + W$, also auch $T(Z) = W$.

Beweis: Es ist $W \subseteq T(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$, also auch $p + W \subseteq p + T(V) = V$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Es folgt

$$p + W \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V = Z.$$

Sei umgekehrt $z \in Z$, also $z \in V = p + T(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Es folgt $z - p \in T(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$, und somit

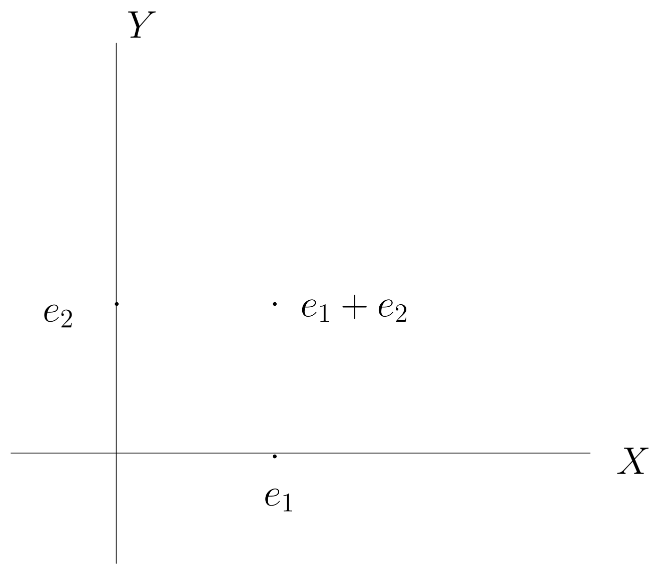
$$z - p \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}} T(V) = W, \text{ d.h. } z \in p + W.$$

Damit ist auch $Z \subseteq p + W$.

b) ergibt sich aus dem Beweis von c) (mit $\mathcal{V} = \{X, Y\}$).

Im Allgemeinen ist $X \cup Y$ kein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Beispiel: Sei X die x–Achse und Y die y–Achse des $\mathbb{R}^n$.



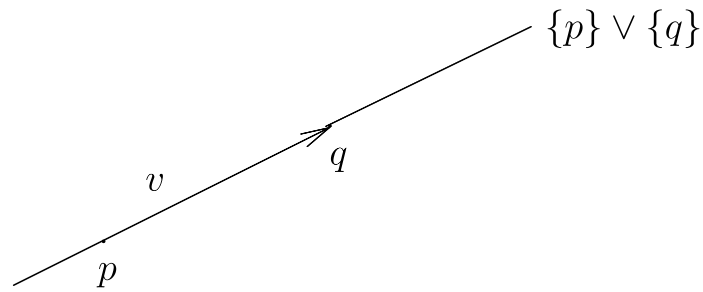
Wäre $Z = X \cup Y$ ein affiner Unterraum, so wäre, wegen $0 \in Z, Z = T(Z) \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum. Es ist aber $e_1 + e_2 \notin Z$!

(2.2) Bemerkung: Der Durchschnitt aller affinen Unterräume des $\mathbb{R}^n$, welche $X \cup Y$ umfassen ist (nach (2.1)c)) ein affiner Raum. Er wird **Verbindungsraum** von X und Y genannt und mit „$X \vee Y$“ bezeichnet. Nach Konstruktion ist also $X \vee Y$ der kleinste affine Unterraum von $\mathbb{R}^n$, welcher $X \cup Y$ umfaßt.

Beispiele:

a) Ist $Y \subseteq X$, so ist $X \vee Y = X$, da X offenbar der kleinste affine Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist, welcher X und Y umfaßt.

b) Seien $p \neq q$ aus $\mathbb{R}^n, n \geq 1$. Setze $v := \overrightarrow{pq} = q - p$. Dann ist $\{p\} \vee \{q\} = p + \mathbb{R}v$ eine Gerade, die sogenannte **Verbindungsgerade** zwischen p und q.



Insbesondere ist $T(p \vee q) = \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{pq}$.

Beweis: Hier ist $X = \{p\}, Y = \{q\}, X \cup Y = \{p, q\}$. Also ist $\{p\} \vee \{q\}$ der kleinste affine Unterraum, der $\{p, q\}$ umfaßt. $q = p + v \in p + \mathbb{R}v, p = p + 0 \in p + \mathbb{R} \cdot v$, somit $X \vee Y \subseteq p + \mathbb{R} \cdot v$.

Umgekehrt: $\{p, q\} \subseteq X \vee Y$ und $X \vee Y$ ist ein affiner Unterraum; also ist $v = \overrightarrow{pq} \in T(X \vee Y)$, also $p + \mathbb{R} \cdot v \subseteq p + T(X \vee Y) = X \vee Y$.

Problem: Seien $X \neq \phi$ und $Y \neq \phi$ affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Wie bestimmt man $T(X \vee Y)$ aus $T(X)$ und $T(Y)$?

(2.3) Satz:

a) Ist $X \cap Y \neq \phi$, so ist $T(X \vee Y) = T(X) + T(Y)$.

b) Im Fall $X \cap Y = \phi$ wählt man $p \in X$ und $q \in Y$. Dann ist

$$T(X \vee Y) = (T(X) + T(Y)) \oplus \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{pq}; \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{pq} = T(p \vee q) \text{ (s.o.)}$$

Beweis: Wegen $X \subseteq X \vee Y$ und $Y \subseteq X \vee Y$ gilt nach 2.1 a) $T(X) \subseteq T(X \vee Y)$ und $T(Y) \subseteq T(X \vee Y)$. Es folgt in jedem Fall

$$T(X) + T(Y) \subseteq T(X \vee Y)$$

a) Zeige, dass auch $T(X \vee Y) \subseteq T(X) + T(Y)$, falls $X \cap Y \neq \phi$. Wähle dazu $p \in X \vee Y$ und setze $Z := p + (T(X) + T(Y))$.

Z ist affin mit Richtungsraum $T(Z) = T(X) + T(Y)$, ferner

$$X = p + T(X) \subseteq Z \text{ und } Y = p + T(Y) \subseteq Z$$

Nach Definition von $X \vee Y$ ist daher $X \vee Y \subseteq Z$, also auch

$$T(X \vee Y) \subseteq T(Z) = T(X) + T(Y).$$

b) Wegen $X \cap Y = \phi$ ist $p \neq q$, ferner $p \in X \vee Y$ und $q \in X \vee Y$. Es folgt $\overrightarrow{pq} \in T(X \vee Y)$, also $Z := \{p\} \vee \{q\} = p + \mathbb{R}\overrightarrow{pq} \subseteq p + T(X \vee Y) = X \vee Y$. Es folgt $X \vee (Y \vee Z) = (X \vee Y) \vee Z = X \vee Y$, nach Beispiel a). Ferner gilt $p \in X \cap (Y \vee Z) \neq \phi$ und $q \in Y \cap Z \neq \phi$. Wende Teil a) zweimal an:

$$\begin{aligned} T(X \vee Y) &= T(X \vee (Y \vee Z)) \overset{a)}{=} T(X) + T(Y \vee Z) \overset{a)}{=} T(X) + (T(Y) + T(Z)) \\ &= T(X) + T(Y) + T(\{p\} \vee \{q\}) \end{aligned}$$

Es ist noch zu zeigen: $(T(X) + T(Y)) \cap \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{pq} = \{0\}$.

Angenommen: $\overrightarrow{pq} = u + v$ mit $u \in T(X)$ und $v \in T(Y)$, also $q - p = u + v$. Es folgt $p + u = q + (-v) \in (p + T(X)) \cap (q + T(Y)) = X \cap Y$, im Widerspruch zu $X \cap Y = \phi$.

Statt $\{p\} \vee \{q\}$ schreiben wir auch $p \vee q$.

(2.4) Bemerkung: Seien $X \neq \phi$ und $Y \neq \phi$ affine Unterräume mit $X \cap Y \neq \phi$. Dann ist

$$X \vee Y = \bigcup_{\substack{p \in X \\ q \in Y}} p \vee q$$

Anschaulich ist $X \vee Y$ (falls $X \cup Y \neq \{$ Punkt $\}$) die Vereinigung der Verbindungsgeraden $p \vee q$ mit $p \in X, q \in Y$.

Beweis: Sei $p \in X$ und $q \in Y$. Dann ist $\{p, q\} \subseteq X \cup Y \subseteq X \vee Y$ und nach Definition von $p \vee q$ ist $p \vee q \subseteq X \vee Y$. Es folgt $Z := \bigcup_{\substack{p \in X \\ q \in Y}} p \vee q \subseteq X \vee Y$. Noch zu zeigen:

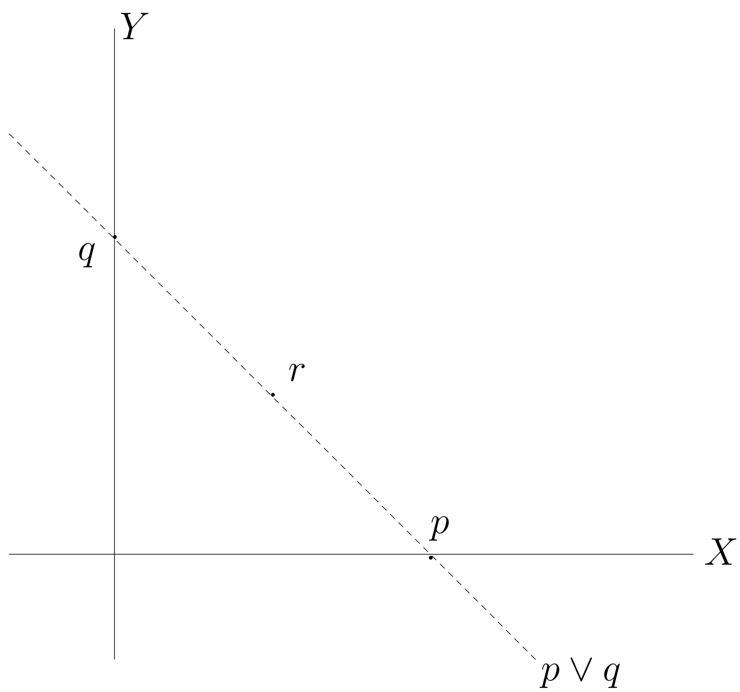
Für $q \in X \vee Y$ ist auch $q \in Z$. Wähle $p \in X \cap Y$ fest. (Nach Vor. ist $X \cap Y \neq \phi$). Es folgt
$\overrightarrow{pq} \in T(X \vee Y) \overset{2.3}{=} T(X) + T(Y)$, d.h.
$\overrightarrow{pq} = u + v$ mit $u \in T(X)$ und $v \in T(Y)$.

Setze $p' = p + 2u \in X$ und $q' = p + 2v \in Y$. Dann ist

$$\begin{aligned} q &= p + u + v = (p + 2u) + (v - u) = p' + \frac{1}{2}(q' - p') = \\ &= p' + \frac{1}{2}\overrightarrow{p'q'} \in p' \vee q' \subseteq Z, \text{ somit } q \in Z \end{aligned}$$

Beispiel:

a) Sei $X = x$–Achse $\subseteq \mathbb{R}^2, Y = y$-Achse $\subseteq \mathbb{R}^2$

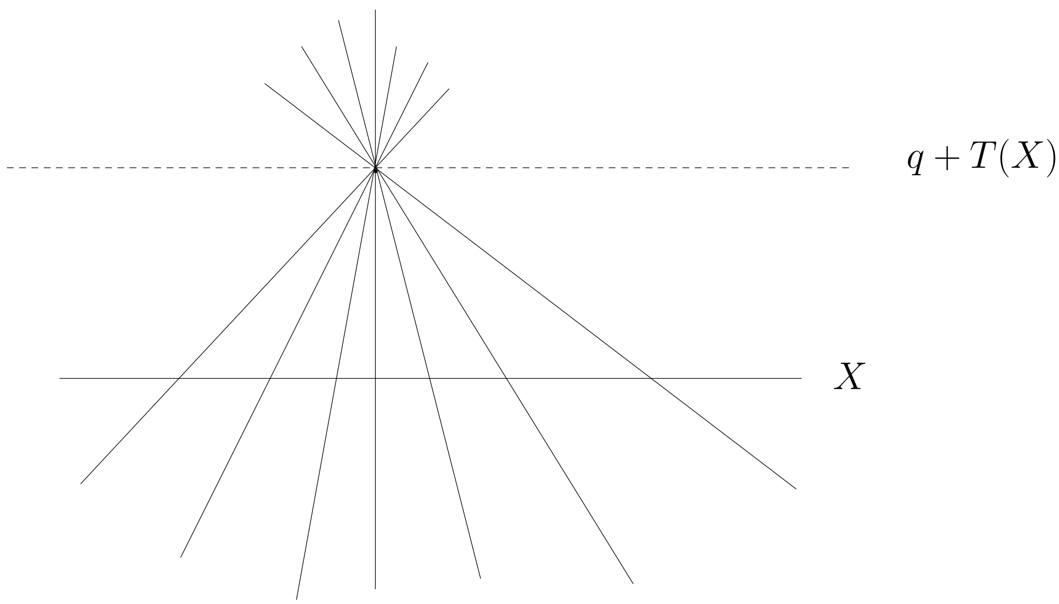


Ist $r \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann existierten $p \neq q$ mit $p \in X, q \in Y$ mit $r \in p \vee q$. Insbesondere ist

$$X \vee Y = \mathbb{R}^2 = \bigcup_{\substack{p \in X \\ q \in Q}} p \vee q$$

b) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$ Gerade und $Y = \{q\}, q \notin X$. Dann ist $X \vee Y = \mathbb{R}^2 \neq \bigcup\limits_{p \in X} p \vee q$

Hier gilt $\bigcup\limits_{p \in X} p \vee q = (\mathbb{R}^2 \backslash (q + T(X)) \cup \{q\}$.



Die gestrichelte Linie fehlt in $\bigcup\limits_{p \in X} p \vee q$ (bis auf den Punkt q).

Frage: Wie hängen die Dimensionen von $X, Y, X \cap Y$ und $X \vee Y$ zusammen.

(2.5) Dimensionsformel: Seien $X \neq \phi$ und $Y \neq \phi$ affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

a) Ist $X \cap Y \neq \phi$, so gilt

$$\dim X \vee Y = \dim X + \dim Y - \dim X \cap Y$$

b) Ist $X \cap Y = \phi$, so gilt

$$\dim X \vee Y = \dim X + \dim Y - \dim(T(X) \cap T(Y)) + 1$$

Beweis:

a) $T(X \cap Y) \stackrel{2.1}{=} T(X) \cap T(Y)$ und $T(X \vee Y) \stackrel{2.3}{=} T(X) + T(Y)$
Also ist $\dim X \vee Y = \dim(T(X) + T(Y)) =$
$= \dim T(X) + \dim T(Y) - \dim(T(X) \cap T(Y)) =$
$= \dim X + \dim Y - \dim X \cap Y$.

b) Wähle $p \in X$ und $q \in Y$, setze $Z = p \vee q$. Wegen $X \cap Y = \phi$ ist $p \neq q$, somit $\dim Z = 1$.
Ferner gilt nach 2.3 b)
$T(X \vee Y) = (T(X) + T(Y)) \oplus T(Z)$. Es folgt
$\dim X \vee Y = \dim(T(X + T(Y)) + \dim T(Z) =$
$= \dim T(X) + \dim T(Y) - \dim(T(X) \cap T(Y)) + 1$
$= \dim X + \dim Y - \dim(T(X) \cap T(Y)) + 1$

Beispiel: Windschiefe Geraden.
Zwei affine Geraden Y_1 und Y_2 im $\mathbb{R}^3$ heißen **windschief**, wenn
(i) $Y_1 \cap Y_2 = \phi$ und (ii) $T(Y_1) \neq T(Y_2)$.

Behauptung: Sind Y_1 und Y_2 windschiefe Geraden im $\mathbb{R}^3$, so ist $Y_1 \vee Y_2 = \mathbb{R}^3$.

Beweis: $Y_1 \cap Y_2 = \phi$ und $\dim T(Y_1) = \dim T(Y_2) = 1, T(Y_1) \neq T(Y_2)$. Also ist $T(Y_1) \cap T(Y_2) = \{0\}$.
Nach der Dimensionsformel folgt
$\dim Y_1 \vee Y_2 = \dim Y_1 + \dim Y_2 - \dim(T(Y_1) \cap T(Y_2)) + 1 = 3$ und $Y_1 \vee Y_2 = \mathbb{R}^3$.

(2.6) Unterraum–Kriterium: Eine nicht leere Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein affiner Unterraum, wenn für alle Paare $x \neq y$ aus X die Verbindungsgerade $x \vee y$ ganz in X enthalten ist.

Beweis: Wähle $p \in X$ und setze $V := \{\overrightarrow{px} \mid x \in X\}$.

„$\Rightarrow$" Sei X affin. Da $x \vee y$ der kleinste affine Unterraum Z von $\mathbb{R}^n$ ist mit $\{x, y\} \subseteq Z$, gilt $x \vee y \subseteq X$, falls $\{x, y\} \subseteq X$

„$\Leftarrow$" Sei $x \vee y \subseteq X$ für alle $x \neq y$ aus X.

Wegen $p + V = \{p + \overrightarrow{px} \mid x \in X\} = X$ ist zu zeigen, dass V ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

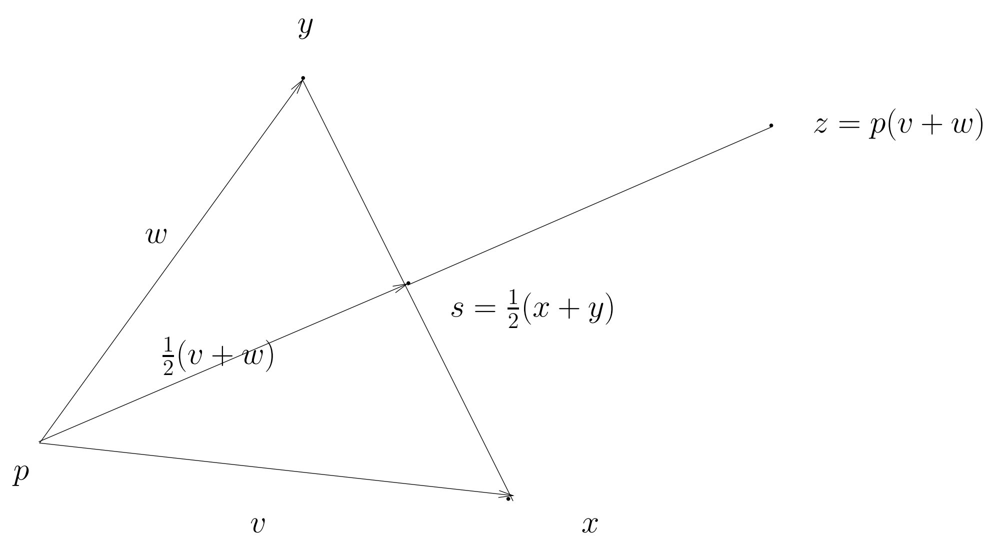
(i) Wegen $p \in X$ ist $0 = \overrightarrow{pp} \in V$.

(ii) Sei $v = \overrightarrow{px} \in V (x \in X)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Für $v = 0$ ist auch $\lambda v = 0 \in V$.
- Für $v \neq 0$ ist $x \neq p$ und $p \vee x = p + \mathbb{R} \cdot v \subseteq X$, also $y := p + \lambda v \in X$. Es folgt $\lambda v = \overrightarrow{py} \in V$, da $y \in X$.

(iii) Seien $v = \overrightarrow{px}, w = \overrightarrow{py}$ aus $V (x, y \in X)$.

- Ist (v, w) linear abhängig, etwa $w = \mu v$, so ist $v + w = (1 + \mu) v \in V$ nach (ii).
- Sei (v, w) linear unabhängig.



Wegen (v, w) linear unabhängig ist $x \neq y$.
Nach Vor. ist daher $x \vee y = x + \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{xy} \subseteq X$, also auch $s = \frac{1}{2}(x+y) = x + \frac{1}{2}\overrightarrow{xy} \in x \vee y \subseteq X$, also $s \in X$. Es folgt $\overrightarrow{ps} = \frac{1}{2}(x+y) - p = \frac{1}{2}\overrightarrow{px} + \frac{1}{2}\overrightarrow{py} = \frac{1}{2}(v+w) \in V$ wegen $s \in X$. Nach (ii) ist dann auch $v + w = 2(\frac{1}{2}(v + w)) \in V$.