Seminar Differentialgeometrie

Wintersemester 2001/02
Dr. Bernd Ammann

Ort und Zeit

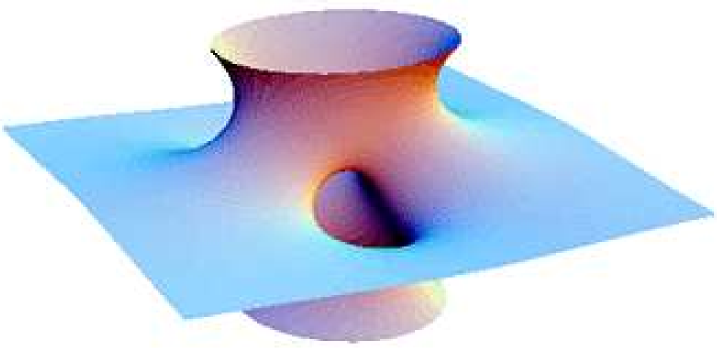
Dienstags 12.15 - 13.45 Uhr, Geom 430

Vorbesprechung

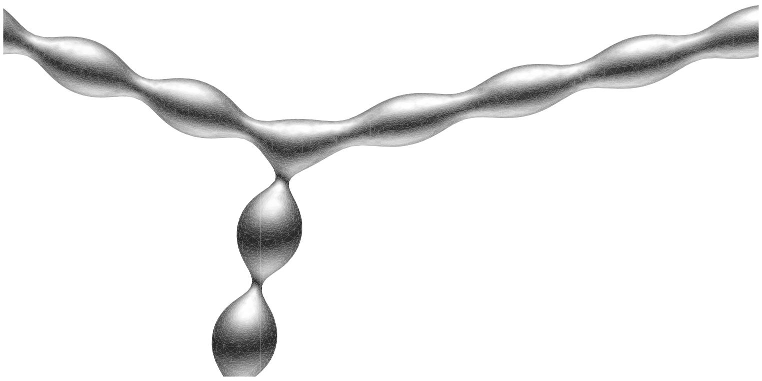
Mittwoch, 11. Juli 2001, 12 Uhr s.t.

Einführung in das Thema

Wir wollen die Theorie der Kurven in und Flächen in $\mathbf{R}^n$ $(n = 2, 3)$ studieren. Im ersten Teil des Seminars behandeln wir Kurven. Wir führen Größen ein, die das Krümmungsverhalten der Kurven beschreiben. Diese Größen charakterisieren, was ein Passagier einer Achterbahn entlang dieser Kurve an Beschleunigungskräften erfahren würde. Wir fragen uns dann zum Beispiel: Was können wir über die „Krümmung" einer injektiven geschlossenen Kurve $S^1 \to \mathbf{R}^3$ aussagen? Was wissen wir über die Krümmung, wenn diese Kurve verknotet ist?



Im zweiten Teil des Seminars betrachten wir Flächen in $\mathbf{R}^3$. Wir definieren die „mittlere Krümmung" und die „Gaußsche Krümmung". Beispiele von Flächen von konstanter mittlerer Krümmung sind Seifenblasen. Die folgende Fläche ist ein kürzlich gefundenes Beispiel einer Fläche konstanter mittlerer krümmung, die natürlich auf Grund ihrer unendlichen Ausdehnung nicht als Seifenblase realisiert werden kann.



Die Gaußsche Krümmung hingegen charaktersiert die sogenannte „innere“ Geometrie der Fläche. Betrachten wir ein Dreieck auf einer Fläche, d.h. wir wählen drei verschiedene Punkte und verbinden diese durch kürzeste Kurven zwischen diesen. Jeder weiß, dass die Winkelsumme eines Dreiecks in der Ebene 180 Grad beträgt. Für viele gekrümmte Flächen ist dieser Sachverhalt hingegen falsch: die Gaußsche Krümmung mißt, wie stark die Winkelsumme eines Dreiecks von 180 Grad abweicht. Die Eigenschaften der inneren Geometrie werden eingehend in der Vorlesung Differentialgeometrie I behandelt, in einer allgemeineren Darstellung, die auch zum Beispiel in höheren Dimensionen anwendbar ist.

An wen richtet sich das Seminar?

Das Seminar führt zu einem verbesserten Verständnis von Kurven und Flächen und kann deswegen für alle geometrisch interessierten Studierenden ab dem 3. Semester empfohlen werden, insbesondere auch für Lehramtskandidat(inn)en. Das Seminar ist aber auch eine wichtige Hilfe zu einem tieferen Verständnis höherer Vorlesungen im Bereich der Differentialgeometrie, zum Beispiel ist es eine Grundlage für der Vorlesung von Prof. Bär über Differentialgeometrie, die parallel zu dem Seminar gehört werden kann.

Vortragsprogramm

Vortrag 1: Kurven (allgemein), Ebene Kurven I
Definition, klassische Beispiele, Parametrisierungen, Längenapproximation durch Polygone, geschlossene Kurven, Beispiele. [1] Abschnitt 2.1 bis Satz 2.2.2 (inkl. Beweis).

Vortrag 2: Ebene Kurven II
Krümmung, Frenet-Gleichungen und Umlaufsatz (inklusive Beweis). [1] Abschnitt 2.2, Seiten 39–52.

Vortrag 3: Ebene Kurven III
Konvexe Kurven, Vierscheitelsatz, isoperimetrische Ungleichung. [1] Abschnitt 2.2, Seiten 52–65. Als Grundlage zu Fourier-Reihen dient zum Beispiel Forster, Analysis I, §23.

Vortrag 4: Raumkurven I
Hauptsatz der Raumkurventheorie, Fenchelsche Ungleichung. [1] Abschnitt 2.3 bis einschl. Satz 2.3.2.

Vortrag 5: Raumkurven II
Satz von Fary-Milnor. [1] Satz 2.3.3.

Vortrag 6: Reguläre Flächen
Definition, lokale Parametrisierungen, Beispiele, [1] Abschnitt 3.1

Vortrag 7: Tangentialraum und Erste Fundamentalform
[1] Abschnitte 3.2 und 3.3

Vortrag 8: Normalenfelder und Zweite Fundamentalform
[1] Abschnitte 3.4 und 3.5

Vortrag 9: Krümmung
[1] Abschnitt 3.6

Vortrag 10: Flächeninhalt und Integration
[1] Abschnitt 3.7

Vortrag 11: Minimalflächen und Drehflächen
[1] Abschnitte 3.8.2 und 3.8.3

Vortrag 12: Satz von Gauss-Bonnet I
Geodätische Krümmung entlang von Kurven, lokale Version von Gauss-Bonnet, [3] Abschnitt 6.3, [1]

Vortrag 13: Satz von Gauss-Bonnet II
[1] Triangulierungen von Flächen und globale Version des Satzes von Gauss-Bonnet, evtl. Abschnitte 5.1 und 5.2 (ohne alle Details), Abschnitt 5.3

Homepage:
http://web.math.uni-hamburg.de/home/ammann/dgsem

Literatur

[1] Christian Bär, *Elementare Differentialgeometrie*, de Gruyter 2001, ISBN 3-11-015519-2.

[2] Manfredo do Carmo, *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*, Vieweg, Aufbaukurs Mathematik 55.

[3] Wilhelm Klingenberg, *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*, Spinger Verlag, auch ein englischsprachiges Exemplar ist vorhanden.

Bernd Ammann, `ammann@math.uni-hamburg.de`.