Seminar über den Ricci-Fluss, Teil II

Wintersemester 2010/11

Prof. Bernd Ammann

Zeit: Mi 8-10, M103

Am 20.10. ist die Verteilung der Vorträge.

Daten: 27.10., 3.11., 10.11., 17.11., 24.11., 1.12., 8.12., 15.12., 22.12., 12.1., 19.1., 26.1., 2.2., 9.2. (14 Sitzungen)

Vortrag 1. *Übersicht über das Bisherige.*

Vortrag 2. *Cheeger-Gromov-Kompaktheit von Lösungen des Ricci-Flusses.*
N.N., 3.11.

[1, Kap. 7], siehe auch [19, Chapter 5]. Sehr detailiert ist [13, Chapter 3 and 4]. Der Vortragende soll eine Auswahl treffen. Eine Möglichkeit wäre, das Toppingsche Buch durch [13, Chapter 3] zu ergänzen.

Vortrag 3. *Perelman's $\mathcal{W}$-Entropie-Formel.*
3.11. und 10.11.

Literatur: [1, Kap. 8], siehe auch [19, Chapter 5]

Nach diesem Vortrag sind wir an einem Punkt angelangt, wo man den Eindruck hat, gut verstanden zu haben, wie man kurz vor dem Auftreten einer Singularität den Raum durch einen Modellraum (eine sogenannte κ-Lösung) beschreiben kann. Diese müssten nun eingehend untersucht werden, um den Hamiltonschen Riccifluss mit Chirurgie zu verstehen. Anschließend gibt es noch das Problem, dass unendlich viele Chirurgien nötig werden könnten (Hamilton vermutete, dass endlich viele reichen, Perelman konnte aber nur ausschließen, dass sich die Chirurgiezeiten häufen.) Wenn man nun das Langzeit-Verhalten des Flusses anschaut, kollabieren die sphärischen Teile, wohingegen die hyperbolischen Teile linear wachsen. Flache Teile, Nilmannigfaltigkeiten, die Verbindungen zweier hyperbolischer Enden und so manch anderes wächst gar nicht oder langsamer. Nach Volumenreskalierung kollabieren sie also, und man sieht, dass es "Graphen-Mannigfaltigkeiten" sind. Diese Graphen-Mannigfaltigkeiten zerfallen in weitere Bestandteile. Allerdings ist dies einer der Punkte, die lange Probleme bereiteten. Graphen-Mannigfaltigkeiten wurden zwar von Shioya und Yamaguchi [25, 26] untersucht, aber nicht in der nötigen Allgemeinheit, in der diese Arbeit von Perelman genutzt wurde. Details stehen in der Arbeit von Morgan und Tian [19].

Es gibt also noch eine ganze Reihe technisch aufwändiger Probleme zu lösen, die für einen Beweis der Geometrisierung nötig wären, aber die aus unserer Motivation heraus (nämlich: einen Einblick in die Theorie zu gewinnen), sehr aufwändig im Vergleich zum Erkenntnisgewinn wären. Dennoch zeichnet sich ein klares Bild ab, wie der Ricci-Fluss die Geometrisierungszerlegung vornimmt.

Vortrag 4. *Geometrisierung, Teil II.*
N.N., 17.11.
Ziel ist, zu beschreiben, wie man eine 3-Mannigfaltigkeiten in die geometrischen Bausteine zerlegen kann. (Geometrisierung von 3-Mannigfaltigkeiten.)
Kneser-Zerlegung, Definition essentieller Tori und atoroidal, Kanonische Zerlegung ([4, bis Theorem 9], ausführlicher wäre [16]). Dann weiter mit [20].
Weitere Literatur: [1, 1.4 und 1.5], [21].

Nun verlassen wir den Bereich der Geometrisierung und betrachten die Sphären-Sätze.

Vortrag 5. *Übersicht über die Sphärensätze.*
N.N., 24.11.
[8] Hier soll zunächst ein Überblick gegeben werden.

In den folgenden 9 Sitzungen lesen wir im Buch [5], das ich soeben erhalten habe (und das ab nächsten Dienstag Teil meines Handapparats sein wird). Die Einteilung in Vorträge machen wir später.

Homepage:

`http://www.mathematik.uni-r.de/ammann/ricci`

Literatur

[1] P. Topping; Lectures on the Ricci flow, LMS Lecture Note series 325, Cambridge

[2] Besson, Gérard; Preuve de la conjecture de Poincaré en déformant la métrique par la courbure de Ricci (d'après G. Perelman). Séminaire Bourbaki. Vol. 2004/2005. Astérisque No. 307 (2006), Exp. No. 947, ix, 309–347.

[3] Böhm, Christoph; Wilking, Burkhard; Manifolds with positive curvature operators are space forms. Ann. of Math. (2) 167 (2008), no. 3, 1079–1097.

[4] M. Boileau, Geometrization of 3-manifolds with symmetries. Link siehe Homepage.

[5] S. Brendle; Ricci Flow and the Sphere Theorem, AMS Graduate Studies Vol. 111, 2010

[6] Brendle, Simon; Schoen, Richard; Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms. J. Amer. Math. Soc. 22 (2009), no. 1, 287–307.

[7] Brendle, Simon; Schoen, Richard; Classification of manifolds with weakly 1/4-pinched curvatures, Acta Math. 200, 1–13 (2008) See also ArXiv: `0705.3963`

[8] Brendle, Simon; Schoen, Richard; Curvature, sphere theorems, and the Ricci flow; to appear at Bull. AMS, ArXiv: `1001.2278`

[9] Chow, B.; Lu P.; Ni, L.; Hamilton's Ricci flow; Graduate Studies in Mathematics, 77; American Mathematical Society, Providence, RI; Science Press, New York, 2006

[10] H.D. Cao, B. Chow, S.C. Chu, S.T. Yau (editeurs), Collected Papers on Ricci Flow, International Press, Series in Geometry and Topology, Volume 37

[11] B. Chow, J. Diff. Geom., **33**, (1991), pp. 325–334

[12] B. Chow, D. Knopf, The Ricci Flow: an introduction, AMS 2004

[13] B. Chow, S.-C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, L. Ni, The Ricci flow, techniques and applications, PartI Geometric Aspects, AMS Math. surv. and Monographs, Vol. 135.

[14] DeTurck, D. M.; Deforming metrics in the direction of their Ricci tensors; J. Differential Geom. 18 (1983), no. 1, 157–162.

[15] R. Hamilton, The Ricci flow on surfaces

[16] A. Hatcher. Notes on basic 3-manifold topology, Link siehe Homepage.

[17] B. Kleiner, J. Lott, Notes on Perelman's Paper

[18] J. Lott, www-Seite, http://math.berkeley.edu/ lott/ricciflow/perelman.html

[19] J. Morgan, G. Tian, Ricci Flow and the Poincaré Conjecture, ArXiv: `math/0607607`

[20] J. Morgan, Recent progress on the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds. Bull. Amer. Math. Soc. 42 (2005), 57-78. Link siehe Homepage

[21] J. Milnor, Towards the Poincaré Conjecture and the Classification of 3-Manifolds, Notices Amer. Math. Soc. 50 (2003), no. 10, 1226–1233.

[22] G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, ArXiv: `math.DG/0211159`

[23] G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, ArXiv: `math.DG/0303109`

[24] G.Perelman, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, ArXiv: math.DG/0307245

[25] T. Shioya, T. Yamaguchi, Collapsing three-manifolds under a lower curvature bound. J. Differential Geom. 56 (2000), no. 1, 1–66.

[26] T. Shioya, T. Yamaguchi, Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound, Math. Ann. 333 (2005), no. 1, 131–155.

Siehe auch auf der http://www.mathematik.uni-r.de/ammann/ricci.