

Seminar Fourier-Analyse, Fourier-Transformation und Distributionen

Sommersemester 2020

Prof. Bernd Ammann, Julian Seipel

Termin: Dienstag 16-18

Inhalt

In dem Seminar wollen wir zunächst periodische Funktionen als Reihen darstellen, deren Reihenglieder Sinus- und Kosinus-Funktionen sind. Diese Darstellung modelliert zum Beispiel, dass man einen periodisch schwingenden Prozess, wie zum Beispiel eine Saite, andere Musik-Instrumente oder auch ein Signal in der Radiotechnik in seine Bestandteile verschiedener Frequenz zerlegt. Solche Reihen nennt man Fourierreihen.

Sind die Funktionen nicht mehr periodisch, aber im Unendlichen ausreichend schnell abfallend (bzw. nicht schnell wachsend), so kann man eine ähnliche Konstruktion durchführen, die man Fourier-Transformation nennt. Sie bildet schnell abfallend glatte Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf Funktionen des selben Typs ab. Führt man sie zweimal durch (mit einer kleinen Modifikation), so erhält man die ursprüngliche Funktion zurück. In der Wellenmechanik oder Quantenphysik kann man hierdurch vom Ortsbild zum Impulsbild und zurück transformieren. Ist $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ eine Wellenfunktion im Ortsraum, so ist die Fourier-Transformierte von ψ die zugehörige Wellenfunktion im Impulsraum. Man kann hieraus unter anderem die Heisenbergsche Unschärfe-Relation herleiten, die sich aber zum Beispiel auch in der Akustik bemerkbar macht: Die Frequenzverteilung eines kurzen Tons (sagen wir $t = 0,1$ Sekunden lang) muss eine Mindestbreite von ungefähr $1/t = 10$ Herz haben.

Funktionen wie $x \mapsto e^{ix}$ haben zwar noch eine Fourier-Transformation, diese ist aber keine Funktion im klassischen Sinn mehr, sondern eine Distribution. Die Distributionen ergeben auch eine hilfreiche Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs. In diesem verallgemeinerten Raum können zum Beispiel beliebige stetige Funktionen beliebig oft differenziert werden. Dies ist ein starkes Hilfsmittel zur Lösung partieller Differentialgleichungen in der Angewandten Mathematik und Geometrischen Analysis, das in Anwendungen wie der Physik häufig benutzt wird, dort allerdings zumeist ohne die mathematischen Grundlagen vollständig zu entwickeln.

Distributionen sind auch hilfreich, um geeignete Differentialoperatoren zu invertieren, was unter anderem zu Greenschen Funktionen führt. Deren Anwendungen wiederum reichen hinein bis in die Arakelov-Theorie, einem Teilgebiet der Arithmetischen Geometrie.

Anvisierte Teilnehmer(innen)

Das Seminar richtet sich in erster Linie an die Studierenden, die bei mir im Wintersemester die Analysis III gehört haben. Es kann gut als erster Einstieg in eine Bachelor-Arbeit genutzt werden. Das Seminar ist aber auch für ande-

re Studierende offen. Wir erlernen im Seminar Hilfsmittel, die in den meisten Forschungsgebieten der Regensburger Mathematik benutzt werden. Für Studierende des gymnasialen Lehramts ist das Seminar dann zu empfehlen, wenn besonderes Interesse an den oben genannten physikalisch-technischen Anwendungen besteht.

Die Vorträge

Im Proramm stellen wir zunächst die Themen dar, die im Vortrag behandelt werden sollten. Wichtig ist hierbei unter anderem, dass alles erwähnt wird, was für das weitere Verständnis unserer Hauptquelle, dem Buch von Strichartz [Str94], benötigt wird. Im Zweifelsfall bei der Planung der vorgetragenen Definitionen, Sätze und Beweise bitte Rücksprache mit Herrn Seipel vornehmen. Der/die Vortragende sollte sich natürlich intensiver und umfassender mit dem Thema beschäftigen, als das, was dann vorgetragen werden kann. Hierzu können manchmal ergänzende Quellen hilfreich sein, die aber nur dann direkt in den Vortrag eingehen sollen, wenn der/die Sprecher(in) denkt, dass diese für das Verständnis der Zuhörenden hilfreich sind: zum Beispiel um kleinere Lücken zwischen den Anfänger-Vorlesungen und der Hauptquelle zu überbrücken oder um weitere wichtige oder erstaunliche Aussagen hinzuzufügen.

Jeder Vortrag sollte mit der Darstellung einer Übungsaufgabe enden, die von allen Teilnehmer(inne)n als Hausaufgabe zu lösen ist und deren Lösung dann in den ersten 10 Minuten des Folgevortrags unter der Leitung des/der Aufgabenstellers/-stellerin diskutiert wird.

Vortrag Nr. 1: Fourier-Analyse periodischer Funktionen. In diesem Vortrag soll die Theorie der Fourierreihen entwickelt werden. Eine geeignete Quelle ist hier [AE99, VI.7 Fourierreihen, Seiten 69–89]. Je nachdem, welche Vorkenntnisse und welchen Hintergrund die Teilnehmenden mitbringen, wird dieser Vortrag auf zwei Vorträge aufgeteilt.

Vortrag Nr. 2: Faltung und Fourier-Transformation von klassischen Funktionen. In diesem Vortrag soll die Faltung und die Fourier-Transformation von Funktionen im bisherigen Sinn (=: im klassischen Sinn), die meisten von uns schon auf Übungsblatt 15 der Analysis III kennengelernt haben, wiederholt und vertieft werden. Eine gute Quelle hierfür ist [Els05, V.§3], das direkt auf dem Maßtheorie-Teil der Analysis III aufbaut und inhaltlich und sprachlich den Übergang zum Buch von Strichartz [Str94] erleichtern soll.

Eine ergänzende Quelle ist hier [AE01, X.7 Die Faltung]. Begriffe wie BC^k und BUC^k werden in [AE98, V.2, Seite 391 ff.] definiert.

Vortrag Nr. 3: Überblicks-Vortrag: Distributionen. Vortragender: Julian Seipel oder Bernd Ammann. Der Vortrag orientiert sich an [Str94, Chap. 1].

Vortrag Nr. 4: Distributionen, Teil 1. In diesem Vortrag sollte eine Hälfte des Kapitels [Str94, Chap. 2] inklusive mindestens einer Übungsaufgabe besprochen werden. Die genaue Aufteilung des Kapitels sollte mit dem/der nachfolgenden Vortragenden besprochen werden.

Vortrag Nr. 5: Distributionen, Teil 2. In diesem Vortrag sollte eine Hälfte des Kapitels [Str94, Chap. 2] inklusive mindestens einer Übungsaufgabe besprochen werden. Die genaue Aufteilung des Kapitels sollte mit dem/der vorangehenden Vortragenden besprochen werden.

Vortrag Nr. 6: Fouriertransformation, Teil 1. In diesem Vortrag sollte eine Hälfte des Kapitels [Str94, Chap. 3] inklusive mindestens einer Übungsaufgabe besprochen werden. Die genaue Aufteilung des Kapitels sollte mit dem/der nachfolgenden Vortragenden besprochen werden.

Eine ergänzende Quelle ist [AE01, X.9 Die Fouriertransformation].

Vortrag Nr. 7: Fouriertransformation, Teil 2. In diesem Vortrag sollte eine Hälfte des Kapitels [Str94, Chap. 3] inklusive mindestens einer Übungsaufgabe besprochen werden. Die genaue Aufteilung des Kapitels sollte mit dem/der vorangehenden Vortragenden besprochen werden.

Vortrag Nr. 8: Fouriertransformation von temperierten Distributionen, Teil 1. In diesem Vortrag sollte eine Hälfte des Kapitels [Str94, Chap. 4] inklusive mindestens einer Übungsaufgabe besprochen werden. Die genaue Aufteilung des Kapitels sollte mit dem/der nachfolgenden Vortragenden besprochen werden.

Vortrag Nr. 9: Fouriertransformation von temperierten Distributionen, Teil 2. In diesem Vortrag sollte eine Hälfte des Kapitels [Str94, Chap. 4] inklusive mindestens einer Übungsaufgabe besprochen werden. Die genaue Aufteilung des Kapitels sollte mit dem/der vorangehenden Vortragenden besprochen werden.

Vortrag Nr. 10: Lösen von partiellen Differentialgleichungen, Teil 1. In diesem Vortrag sollte eine Hälfte des Kapitels [Str94, Chap. 5] inklusive mindestens einer Übungsaufgabe besprochen werden. Die genaue Aufteilung des Kapitels sollte mit dem/der nachfolgenden Vortragenden besprochen werden.

Vortrag Nr. 11: Lösen von partiellen Differentialgleichungen, Teil 2. In diesem Vortrag sollte eine Hälfte des Kapitels [Str94, Chap. 5] inklusive mindestens einer Übungsaufgabe besprochen werden. Die genaue Aufteilung des Kapitels sollte mit dem/der vorangehenden Vortragenden besprochen werden.

Vortrag Nr. 12: Weitere Anwendungen und Strukturaussagen. Dieser Vortrag wird mit dem/der Vortragenden direkt besprochen. Je nachdem, welche Vorkenntnisse und welchen Hintergrund die Teilnehmenden mitbringen, werden hier zwei Vorträge eingeplant, die in verschiedene Richtungen gehen.

Web-Links

Web-Seite des Seminars

Liste der vergebenen Vorträge

Literatur

- [AE98] AMANN, Herbert ; ESCHER, Joachim: Analysis. I. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998 (Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics])
- [AE99] AMANN, Herbert ; ESCHER, Joachim: Analysis. II. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999 (Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics])
- [AE01] AMANN, Herbert ; ESCHER, Joachim: Analysis. III. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001 (Grundstudium Mathematik. [Basic Study of Mathematics])
- [Els05] ELSTRODT, J.: Maß- und Integrationstheorie. 5. Springer-Verlag, Berlin, 2005 (Springer-Lehrbuch). – Grundwissen Mathematik
- [Str94] STRICHARTZ, Robert S.: A guide to distribution theory and Fourier transforms. CRC Press, Boca Raton, FL, 1994 (Studies in Advanced Mathematics)