Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 1 vom 18. Oktober 2007

Aufgabe 1 (Bosch „Algebra," 1.1.6**).** Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{g \in G} g^2 = 1.$$

Aufgabe 2 (Bosch „Algebra," 1.1.7**).** Sei G eine Gruppe, in der jedes Element $g \in G$ die Gleichung $g^2 = 1$ erfüllt.

1. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.
2. Gibt es unendliche Gruppen mit dieser Eigenschaft?

Aufgabe 3 (Bosch „Algebra," 1.1.3**).** Sei G ein Monoid. Betrachten Sie folgende Bedingungen:

(i) Das Monoid G ist eine Gruppe.

(ii) Für alle a, x, $y \in G$ mit $a \cdot x = a \cdot y$ oder $x \cdot a = y \cdot a$ folgt $x = y$.

Zeigen Sie:

1. Falls G endlich ist, gilt „(ii) $\Rightarrow$ (i)."
2. Falls G unendlich ist, gilt „(ii) $\Rightarrow$ (i)" im allgemeinen nicht.

Aufgabe 4 (Allgemeine lineare Gruppe**).** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine Gruppe bezüglich Komposition. Wieviele Elemente enthält die Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ der Vektorraumisomorphismen $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die das Quadrat mit den Ecken

$$\big\{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\big\}$$

auf sich selbst abbilden?

Aufgabe 5*. Sind die Gruppen $(\mathbb{C}, 0, +)$ und $(\mathbb{R}_{>0}, 1, \cdot\,)$ isomorph?
Hinweis. Vergleichen Sie beide Gruppen mit $(\mathbb{R}, 0, +)$.

Abgabe bis zum 25. Oktober 2007, 8:00 Uhr