Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 11 vom 10. Januar 2008

Aufgabe 1 (Normal vs. separabel)**.**

1. Sind alle algebraischen, normalen Körpererweiterungen separabel?

2. Sind alle separablen algebraischen Körpererweiterungen normal?

Aufgabe 2.

1. Sind alle Körpererweiterungen von Körpern der Charakteristik 2 vom Grad 3 separabel?

2. Gibt es algebraische Körpererweiterungen L/K mit $[L : K] = [L : K]_s$, die nicht separabel sind?

Aufgabe 3 (Primitive Elemente)**.**

1. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $\sqrt[n]{2008}$ die reelle, positive n-te Wurzel von 2008, sowie $\sqrt[2008]{n}$ die reelle, positive 2008-te Wurzel von n. Bestimmen Sie ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2008}, \sqrt[2008]{n})/\mathbb{Q}$.

2. Gibt es separable algebraische Körpererweiterungen, die kein primitives Element enthalten?

Aufgabe 4 (Bosch „Algebra," 3.6.5)**.** Sei p eine Primzahl und $L := \mathbb{F}_p(X, Y)$ der Funktionenkörper in zwei Variablen über $\mathbb{F}_p$. Desweiteren sei

$$\begin{aligned} \sigma \colon L &\longrightarrow L \\ x &\longmapsto x^p \end{aligned}$$

der Frobeniushomomorphismus und $K := \operatorname{im}(\sigma)$.

1. Zeigen Sie, dass K ein Körper ist und berechnen Sie die Grade $[L : K]$ und $[L : K]_s$.

2. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung L/K nicht einfach ist.

Aufgabe 5 (Bosch „Algebra," 3.6.6)**.** Sei L/K eine Körpererweiterung in Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie, dass ein über K algebraisches Element $\alpha \in L$ genau dann über K separabel ist, wenn $K(\alpha) = K(\alpha^p)$ ist.

Abgabe bis zum 17. Januar 2008, 8:00 Uhr