# Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 3 vom 1. November 2007

---

**Aufgabe 1** (Der Ring der stetigen Funktionen). Die Menge $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen vom Typ $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bildet einen Ring bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation.

1. Bestimmen Sie die Einheiten von $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Gibt es eine Einheit $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f(0) = \pi$ und $f(\sqrt{2}) = -1$?
2. Ist $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein Integritätsring?

**Aufgabe 2** (Division mit Rest; Bosch „Algebra," 2.1.3). Man führe das in der Vorlesung beschriebene Verfahren zur Division mit Rest (Bosch „Algebra," Satz 2.1.4) in folgenden Fällen explizit durch:

1. Man dividiere $3X^5 + 2X^4 - X^3 + 3X^2 - 4X + 7$ im Ring $\mathbb{Z}[X]$ mit Rest durch $X^2 - 2X + 1$.
2. Das Produkt $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist bezüglich komponentenweiser Addition und Multiplikation ein Ring. Man dividiere
$$(-8, -3) \cdot X^4 + (3, 5) \cdot X^3 + (24, -11) \cdot X^2 + (-9, 10) \cdot X + (2, -14)$$
im Ring $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})[X]$ mit Rest durch $(1, -1) \cdot X^2 + (0, 2) \cdot X + (-3, -2)$.

**Aufgabe 3** (Nilpotente Elemente; Bosch „Algebra," 2.2.6). Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins. Ein Element $x \in R$ heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ gibt.

1. Zeigen Sie, dass die Menge der nilpotenten Elemente von $R$ ein Ideal in $R$ ist.
2. Sei $a \in R$ nilpotent und $u \in R$ eine Einheit. Zeigen Sie, dass $u + a$ eine Einheit von $R$ ist.

**Aufgabe 4** ($g$-adische Entwicklung; Bosch „Algebra," 2.1.4). Sei $K$ ein Körper und $g \in K[X]$ ein Polynom einer Variablen vom Grad $d > 0$. Man beweise die Existenz der sogenannten *$g$-adischen Entwicklung:* Zu jedem $f \in K[X]$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome $a_0, a_1, \ldots \in K[X]$ vom Grad kleiner $d$ mit $a_j = 0$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$ und
$$f = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot g^j.$$

**Aufgabe 5*.** Gibt es Ringe $R \neq 0$, die isomorph zum zugehörigen Polynomring $R[X]$ in einer Variablen sind?

Eine Abbildung $\varphi\colon R \longrightarrow S$ von Ringen heißt *Ringhomomorphismus*, falls sie mit den Ringstrukturen von $R$ und $S$ verträglich ist, d.h. falls $\varphi(1) = 1$ sowie
$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{und} \quad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$
für alle $x, y \in R$ gilt. Ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \longrightarrow S$ heißt *Ringisomorphismus,* wenn es einen Ringhomomorphismus $\psi\colon S \longrightarrow R$ mit $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_S$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_R$ gibt.

---

Abgabe bis zum 8. November 2007, 8:00 Uhr