Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 4 vom 8. November 2007

Aufgabe 1 (Nullstellen von Polynomen)**.**

1. Sei $R \neq 0$ ein kommutativer Ring mit Eins mit folgender Eigenschaft: Für jedes $p \in R[X] - R$ existiert ein $x \in R$ mit $p(x) = 0$. Zeigen Sie, dass R ein Körper ist.

2. Geben Sie ein nichtkonstantes Polynom in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ an, das keine Nullstelle in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ besitzt.

Aufgabe 2 (Der Ring der stetigen Funktionen – Fortsetzung)**.** Die Menge $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen vom Typ $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bildet einen Ring bezüglich punktweiser Addition und Multiplikation.

1. Zeigen Sie, dass
$$I := \bigl\{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \bigm| f(0) = 0 \bigr\}$$
ein Ideal von $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist, das aber kein Hauptideal ist.

2. Zeigen Sie, dass der Faktorring $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})/I$ isomorph zu $\mathbb{R}$ ist. Was können Sie daraus über das Ideal I schließen?

Aufgabe 3 (Unterringe und Ringhomomorphismen)**.** Finden Sie den Fehler im folgenden „Beweis“ und geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass der entsprechende Schritt im Beweis nicht korrekt ist:

Behauptung. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $S \neq R$ ein Unterring. Dann gibt es keinen surjektiven Ringhomomorphismus $S \longrightarrow R$.

Beweis Sei $\varphi \colon S \longrightarrow R$ ein Ringhomomorphismus. Da S ein Unterring von R ist, ist S bezüglich Multiplikation ein Untermonoid von R und enthält damit dasselbe Einselement 1 wie R.

Also gilt für alle $s \in S$, dass $s = s \cdot 1$ in S und deshalb
$$\varphi(s) = \varphi(s \cdot 1).$$
Da φ ein Ringhomomorphismus ist, ist φ verträglich mit der Multiplikation; d.h. die Abbildung φ ist S-linear und $\varphi(1) = 1$. Somit können wir aus obiger Gleichung schließen, dass
$$\varphi(s) = \varphi(s \cdot 1) = s \cdot \varphi(1) = s \cdot 1 = s$$
für alle $s \in S$. Also ist $\operatorname{im} \varphi = S$.

Wegen $S \subset R$ und $S \neq R$ gibt es daher ein $r \in R$ mit $r \notin \operatorname{im} \varphi$. Insbesondere kann φ nicht surjektiv sein. $\square$

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Bosch „Algebra,“ 2.3.8**).** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie, dass

$$\left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \cdot X^j \in R[X] \;\middle|\; \{a_j \mid j \in \mathbb{N}\} \subset R,\ a_1 = 0, \text{ und } a_j = 0 \text{ für fast alle } j \in \mathbb{N} \right\}$$

ein Unterring von $R[X]$ ist und dass dieser isomorph zu $R[X][Y]/(X^2 - Y^3)$ ist.

Aufgabe 5* (Hauptideale und assoziierte Elemente; Bosch „Algebra,“ 2.3.7**).** Sei K ein Körper und $K[X,Y] := K[X][Y]$ der Polynomring über K in zwei Variablen. Im Restklassenring

$$R := K[X,Y]/(XY^2)$$

bezeichne $\overline{X}$ bzw. $\overline{Y}$ jeweils die Restklasse von X bzw. Y.

1. Zeigen Sie, dass die von $\overline{X}$ bzw. $\overline{X} + \overline{X} \cdot \overline{Y}$ erzeugten Hauptideale in R übereinstimmen.

2. Zeigen Sie, dass die Elemente $\overline{X}$ und $\overline{X} + \overline{X} \cdot \overline{Y}$ aber nicht assoziiert sind.

   Hinweis. Man betrachte das Ideal aller Elemente $\overline{f} \in R$ mit $\overline{f} \cdot \overline{X} = 0$ bzw. das Ideal aller Elemente $f \in K[X,Y]$ mit $f \cdot X \in (XY^2)$.

Abgabe bis zum 15. November 2007, 8:00 Uhr