Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 6 vom 22. November 2007

Aufgabe 1. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Menge von Erzeugern des von

$$\begin{aligned} X^5 - 11 \cdot X^4 + 30 \cdot X^3 - X^2 - 121 \cdot X + 210, \\ 13 \cdot X^3 - 52 \cdot X^2 + 104 \cdot X - 65, \\ X^3 - 6 \cdot X^2 + 14 \cdot X - 15 \end{aligned}$$

erzeugten Ideals im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 2. Seien p, $q \in \mathbb{N}$ die beiden kleinsten Primzahlen, die größer als die Quersumme Ihrer Matrikelnummer sind. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} x &\equiv 4 \pmod{p}, \quad \text{und} \\ x &\equiv -2 \pmod{q}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Bosch „Algebra," 2.4.3)**.** Die Menge $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] := \mathbb{Z} + i \cdot \sqrt{5} \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ nicht faktoriell ist, indem Sie die Faktorisierung

$$2 \cdot 3 = 6 = (1 + i \cdot \sqrt{5}) \cdot (1 - i \cdot \sqrt{5})$$

betrachten:

1. Zeigen Sie, dass die Elemente 2, 3, $1 + i \cdot \sqrt{5}$, $1 - i \cdot \sqrt{5}$ irreduzibel und paarweise nichtassoziiert sind.

2. Welche dieser Elemente sind prim in $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$?

Aufgabe 4 (Monoidringe; Bosch „Algebra," 2.5.4)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

1. Sei $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass die Ringe $R[\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}]$ und $R[X]/(X^m - 1)$ isomorph sind; hierbei betrachten wir $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ als Monoid bezüglich Addition.

2. Gilt die entsprechende Aussage auch für $m = 0$?

Aufgabe 5*. Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen x und y mit

$$x^2 + 1 = y^3.$$

Hinweis. Betrachten Sie Primfaktoren in den ganzen Gaußschen Zahlen.

Abgabe bis zum 29. November 2007, 8:00 Uhr