Übungen zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh — Blatt 7 vom 29. November 2007

Aufgabe 1 (Irreduzibilitätskriterien; Bosch „Algebra,“ 2.8.1).

1. Zeigen Sie, dass $2 \cdot X^4 + 200 \cdot X^3 + 2000 \cdot X^2 + 20000 \cdot X^2 + 20$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.
2. Zeigen Sie, dass $X^3 + 21 \cdot X^2 + 6 \cdot X + 9$ in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel ist.
3. Zeigen Sie, dass es in $\mathbb{Z}[X]$ Primpolynome von beliebig großem Grad gibt.
4. Zeigen Sie, dass $X^2 \cdot Y + X \cdot Y^2 - X - Y + \overline{1}$ in $\mathbb{F}_2[X, Y]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 2 (Kleine Körper).

1. Gibt es einen Körper mit genau vier Elementen?
2. Gibt es einen Integritätsring mit genau sechs Elementen?

Aufgabe 3 (Universelle Eigenschaft des Bruchrings; Bosch „Algebra,“ 2.7.5). Sei A ein kommutativer Ring mit Eins und sei $S \subset A$ ein multiplikatives System.

1. Zeigen Sie, dass der Ringhomomorphismus $\tau\colon A \longrightarrow S^{-1}A$, $a \longmapsto \frac{a}{1}$ folgende *universelle Eigenschaft* besitzt: Es gilt $\tau(S) \subset (S^{-1}A)^\times$ und zu jedem Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \longrightarrow B$ mit $\varphi(S) \subset B^\times$ existiert genau ein Ringhomomorphismus $\varphi'\colon S^{-1}A \longrightarrow B$, der das Diagramm
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & S^{-1}A \arrow[d, dashed, "\varphi'"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad (*)$$
kommutativ macht (d.h. $\varphi' \circ \tau = \varphi$).
2. Zeigen Sie, dass der Bruchring $S^{-1}A$ bis auf Isomorphie der einzige Ring mit dieser universellen Eigenschaft ist. Genauer: Ist auch $\varphi\colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus mit obiger universellen Eigenschaft, so ist der Ringhomomorphismus $\varphi'\colon S^{-1}A \longrightarrow B$ aus $(*)$ ein Isomorphismus.

Hinweis. Wenn Sie möchten, können Sie sich auf den Fall beschränken, dass A ein Integritätsring und $S = A - \{0\}$ ist.

Aufgabe 4 (Primitive Polynome; leicht!). Sei R ein faktorieller Ring, $h \in R[X]$ ein primitives Polynom und sei $h = f \cdot g$ eine Zerlegung mit $f, g \in Q(R)[X]$. Zeigen Sie, dass es Polynome $f', g' \in R[X]$ mit $h = f' \cdot g'$ gibt, so dass f und f' bzw. g und g' in $Q(R)[X]$ assoziiert sind.

Aufgabe 5* (Bosch „Algebra,“ 2.8.2). Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^p - X - \overline{1}$ in $\mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel ist.
Hinweis. Dieses Polynom ist unter dem Ringautomorphismus von $\mathbb{F}_p[X]$, der durch $X \longmapsto X + \overline{1}$ gegeben ist, invariant; betrachten Sie nun die Primfaktorzerlegung in $\mathbb{F}_p[X]$.

Abgabe bis zum 6. Dezember 2007, 8:00 Uhr