Probeklausur zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh Februar 2008

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐ Studiengang:

ZIV-Kennung: Übungsleiter:

– Diese Klausur besteht aus 8 Seiten (die ersten beiden Seiten sind identische Deckblätter). Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.

– Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

– Sie haben drei Stunden (= 180 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte halten Sie bei der Abgabe Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis bereit. Falls Sie die Klausur vorzeitig abgeben, verlassen Sie danach bitte das Gebäude.

– Die Klausur besteht aus 6 Multiple-Choice-Aufgaben und 4 weiteren Aufgaben.

  Für jede korrekte Multiple-Choice-Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Multiple-Choice-Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Sie erhalten jedoch im Multiple-Choice-Teil insgesamt mindestens 0 Punkte.

– Es können im Total 50 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 40% der Punkte.

– Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone oder Ähnliches gestattet; Schmierpapier wird zur Verfügung gestellt. Alle Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte maximal	3	2	3	2	4	4	6	6	8	12	50
erreichte Punkte											

Note: Unterschrift:

Probeklausur zur Algebra I

Prof. Dr. S. Bosch/C. Löh | Februar 2008

Name:	Vorname:
Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐	Studiengang:
ZIV-Kennung:	Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten (die ersten beiden Seiten sind identische Deckblätter). Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Sie haben drei Stunden (= 180 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte halten Sie bei der Abgabe Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis bereit. Falls Sie die Klausur vorzeitig abgeben, verlassen Sie danach bitte das Gebäude.
- Die Klausur besteht aus 6 Multiple-Choice-Aufgaben und 4 weiteren Aufgaben.

  Für jede korrekte Multiple-Choice-Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Multiple-Choice-Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Sie erhalten jedoch im Multiple-Choice-Teil insgesamt mindestens 0 Punkte.
- Es können im Total 50 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 40% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone oder Ähnliches gestattet; Schmierpapier wird zur Verfügung gestellt. Alle Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Summe
Punkte maximal	3	2	3	2	4	4	6	6	8	12	50
erreichte Punkte											

Note: | Unterschrift:

Aufgabe 1 ($3 \cdot 1 = \mathbf{3}$ Punkte). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen auf alle Gruppen G zutreffen.

- Ist H ein Normalteiler von G, so gibt es eine Gruppe G' und einen Homomorphismus $\varphi\colon G \longrightarrow G'$ mit $\ker(\varphi) = H$. ☐ *wahr* ☐ *falsch*
- Sei $\varphi\colon G \longrightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt ☐ *wahr* ☐ *falsch*

$$\ker(\varphi) = \left\{g \in G \mid \varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\right\}.$$

- Ist H ein Normalteiler von G, so gilt für alle $h \in H$ und alle $g \in G$, dass ☐ *wahr* ☐ *falsch*

$$g \cdot h \cdot g^{-1} = h.$$

Aufgabe 2 ($2 \cdot 1 = \mathbf{2}$ Punkte). Sei G eine Gruppe und sei $g \in G$ ein Element der Ordnung 8. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen auf alle solchen Gruppen G zutreffen.

- Es gibt ein Element $h \in G$ mit $h \cdot h = g$. ☐ *wahr* ☐ *falsch*
- Die Gruppe G enthält eine Untergruppe der Ordnung 4. ☐ *wahr* ☐ *falsch*

Aufgabe 3 ($3 \cdot 1 =$ 3 Punkte). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Jedes Ideal in $\mathbb{F}_5(X)[Y]$ wird von einem Element erzeugt. ☐ *wahr* ☐ *falsch*
- Restklassenringe von Integritätsringen sind Integritätsringe. ☐ *wahr* ☐ *falsch*
- Ist R ein Integritätsring und sind p und q zwei verschiedene Primelemente in R, so ist auch $p+q$ prim. ☐ *wahr* ☐ *falsch*

Aufgabe 4 ($2 \cdot 1 =$ 2 Punkte). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Seien ☐ *wahr* ☐ *falsch*

$$f := X^4 + 3 \cdot X^3 + 9 \cdot X - 9 \in \mathbb{Q}[X],$$
$$g := X^3 - 4 \cdot X^2 + 3 \cdot X - 12 \in \mathbb{Q}[X].$$

  Dann ist $(f, g) \subset \mathbb{Q}[X]$ ein maximales Ideal.

- Der Ring $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + X - 2)$ ist ein Produkt zweier nichttrivialer Ringe. ☐ *wahr* ☐ *falsch*

Aufgabe 5 ($4 \cdot 1 =$ 4 Punkte). Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Es gibt einen Körperhomomorphisms $\mathbb{F}_{125} \longrightarrow \mathbb{F}_{1024}$. ☐ *wahr* ☐ *falsch*
- Zu jeder endlichen abelschen Gruppe G gibt es einen endlichen Körper K, so dass G zu einer Untergruppe der Einheitengruppe von K isomorph ist. ☐ *wahr* ☐ *falsch*
- Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Dann ist jedes Element aus L entweder separabel oder rein inseparabel über K. ☐ *wahr* ☐ *falsch*
- Ist L/K eine algebraische Körpererweiterung und $\alpha \in L$, so ist $[K(\alpha^2) : K] \leq [K(\alpha) : K]$. ☐ *wahr* ☐ *falsch*

Aufgabe 6 ($4 \cdot 1 =$ 4 Punkte). Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ ist normal. ☐ *wahr* ☐ *falsch*
- Sei R ein Ring mit $\mathbb{Q} \subset R \subset \mathbb{Q}(\alpha)$. Dann ist R ein Körper. ☐ *wahr* ☐ *falsch*
- Das Minimalpolynom von $\alpha^2 + 2 \cdot \alpha$ über $\mathbb{Q}$ hat Grad 3. ☐ *wahr* ☐ *falsch*
- Es gibt einen Zwischenkörper K von $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$, der $[K : \mathbb{Q}] = 2$ erfüllt. ☐ *wahr* ☐ *falsch*

Aufgabe 7 ($4+2=$ **6 Punkte).**

1. Zerlegen Sie das Polynom $X^3-2\cdot X^2+X-2$ über $\mathbb{Q}$ bzw. über $\mathbb{F}_5$ in irreduzible Faktoren.
2. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^5-10\cdot X^4+6\cdot X^2-8\cdot X+50$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgabe 8 (6 Punkte). Sei K ein Körper der Charakteristik $p>0$. Zeigen Sie, dass K genau dann vollkommen ist, wenn der Frobeniushomomorphismus

$$\begin{aligned}\sigma\colon K &\longrightarrow K\\ x &\longmapsto x^p\end{aligned}$$

surjektiv ist.

Aufgabe 9 ($2 + 2 + 4 =$ **8 Punkte).**

1. Definieren Sie den Begriff *algebraischer Abschluss eines Körpers.*
2. Geben Sie eine andere – äquivalente – Charakterisierung eines algebraischen Abschlusses (ohne Beweis).
3. Zeigen Sie, dass endliche Körper nicht algebraisch abgeschlossen sind.

Aufgabe 10 ($4+4+4=$ 12 Punkte). Sei $\alpha := \sqrt{2+\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$; hierbei bezeichnet $\sqrt{}$ jeweils die positive reelle Quadratwurzel.

1. Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ galoissch ist.
   Hinweis. Betrachten Sie $\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$.
2. Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ isomorph ist.
3. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$.