Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 10 vom 15. Dezember 2008

Thema 1 (Eine projektive Kurve). Sei $f := Y^2 \cdot Z - X^3 + Z^3 \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ und sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Inklusion $i\colon \mathbb{P}^2(K) \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$ gibt, deren Bild nur abgeschlossene Punkte von $\mathbb{P}^2_K$ enthält.
2. Zeigen Sie, dass ein (natürliches) Schema C mit folgenden Eigenschaften existiert: Es gibt einen Morphismus $(g, g^\#)\colon C \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$ von Schemata, der C homöomorph auf eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^2_K$ abbildet, und dessen Bild $g(C)$ die Nullstellen $i\bigl(\{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(K) \mid f(x, y, z) = 0\}\bigr)$ als dichte Teilmenge enthält.
3. Ist C durch diese Eigenschaften bereits eindeutig charakterisiert?

Hinweis. Konstruieren Sie das Schema C, indem Sie geeignete abgeschlossene affine Unterschemata der Standardüberdeckung von $\mathbb{P}^2_K$ (bestehend aus drei affinen Ebenen) verkleben.

Thema 2 (Relativ-affine Schemata und affine Morphismen). Ein Schema X über einem Schema S heißt *affin über* S, wenn der Strukturmorphismus $X \longrightarrow S$ ein affiner Morphismus ist; ein Morphismus $\varphi\colon X \longrightarrow S$ heißt *affin*, falls S eine offene affine Überdeckung $(S_i)_{i \in I}$ besitzt, so dass für alle $i \in I$ das offene Unterschema $\varphi^{-1}(S_i) \subset X$ affin ist.

Im folgenden untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Schemamorphismen über S und $\mathcal{O}_S$-Modulhomomorphismen von quasi-kohärenten $\mathcal{O}_S$-Modulgarben über den entsprechenden Schemata: Sei dazu S ein Schema, $\varphi\colon X \longrightarrow S$ und $\psi\colon Y \longrightarrow S$ seien Schemata über S, und seien

$$F_X := \varphi_* \mathcal{O}_X \quad \text{und} \quad F_Y := \psi_* \mathcal{O}_Y$$

die durch φ bzw. ψ induzierten $\mathcal{O}_S$-Modulgarben auf S.

1. Sind alle Schemamorphismen affin?
2. Zeigen Sie: Ist $\varphi\colon X \longrightarrow S$ affin, so ist für jede quasi-kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe F auf X das direkte Bild $\varphi_* F$ eine quasi-kohärente $\mathcal{O}_S$-Modulgarbe auf S.
3. Sei $\varphi\colon X \longrightarrow S$ affin über S. Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_S(Y, X) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}\bigl(F_X, F_Y\bigr) \\ (f, f^\#) &\longmapsto \varphi_* f^\# \end{aligned}$$
eine (kanonische) Bijektion ist.

   Insbesondere gilt: Ist zusätzlich auch $\psi\colon Y \longrightarrow S$ affin, so ist ein S-Morphismus $X \longrightarrow Y$ genau dann ein S-Isomorphismus, wenn der zugehörige $\mathcal{O}_S$-Modulhomomorphismus $F_Y \longrightarrow F_X$ ein Isomorphismus ist.
4. Sei F eine quasi-kohärente $\mathcal{O}_S$-Algebrengarbe auf S. Zeigen Sie, dass es bis auf S-Isomorphie genau ein über S affines Schema $X_F \longrightarrow S$ gibt (nämlich $\operatorname{Spec} F$), so dass die $\mathcal{O}_S$-Algebren F_{X_F} und F isomorph sind.

Hinweis. Mehr über relativ-affine Schemata finden Sie in der Arbeit „EGA II“ von A. Grothendieck (Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 8, 1961; Abschnitte 1.2 und 1.3).

Bitte wenden

Die folgenden Übungsaufgaben bieten die Gelegenheit, die bisher eingeführten Begriffe über Schemata und Modulgarben zu wiederholen.

Aufgabe 1 (Ein *alter ego* der projektiven Gerade)**.** Sei K ein Körper. Verkleben wir die Schemata $\operatorname{Spec} K[X]$ und $\operatorname{Spec} K[Y]$ auf den offenen Teilmengen $D_{K[X]}(X) = \operatorname{Spec} K[X]_X$ und $D_{K[Y]}(Y) = \operatorname{Spec} K[Y]_Y$ über den durch

$$X \longmapsto Y^{-1} \quad \text{bzw.} \quad X \longmapsto Y$$

gegebenen Isomorphismus $K[X]_X \longrightarrow K[Y]_Y$, so erhalten wir die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K$ über K bzw. das Schema $\mathbb{d}^1_K$ (die affine Gerade über K mit einem „Doppelpunkt“).

1. Sind die Schemata $\mathbb{d}^1_K$ und $\mathbb{P}^1_K$ isomorph?
2. Beschreiben Sie die Halme aller Punkte von $\mathbb{d}^1_K$ bzw. $\mathbb{P}^1_K$ und beschreiben Sie die Abschlüsse aller Punkte dieser Schemata.
3. Sind die Schemata $\mathbb{P}^1_K$ bzw. $\mathbb{d}^1_K$ affin oder quasi-affin?
4. Bestimmen Sie alle K-Automorphismen von $\mathbb{P}^1_K$ und $\mathbb{d}^1_K$.

Aufgabe 2 (Quotientenschemata)**.** Sei X ein Schema und sei G eine Gruppe von Automorphismen von X. Ein Schema X/G heißt *Quotient von X nach G*, wenn ein Morphismus $\pi\colon X \longrightarrow X/G$ mit folgender universeller Eigenschaft existiert: Der Morphismus π ist G-invariant (d.h. $\pi \circ \gamma = \pi$ für alle $\gamma \in G$) und jeder G-invariante Morphismus $\varphi\colon X \longrightarrow T$ von Schemata faktorisiert eindeutig über $\pi\colon X \longrightarrow X/G$. Zeigen Sie, dass der Quotient X/G existiert, falls X affin und G endlich ist.
Hinweis. Eine Anleitung und weiterführendes Material finden Sie im Buch „Algebraic Geometry and Arithmetic Curves“ von Q. Liu (Exercises 3.20–3.22 auf S. 58f).

Aufgabe 3 (Die Halme der assoziierten Garbe)**.** Zeigen Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaft der assoziierten Garbe einer Prägarbe, dass die Halme der assoziierten Garbe mit den Halmen der Prägarbe übereinstimmen.

Genauer: Sei F eine Prägarbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X, sei $i\colon F \longrightarrow F'$ die zu F assoziierte Garbe und sei $x \in X$.

1. Zeigen Sie mit Hilfe der universellen Eigenschaft von i, dass i einen Isomorphismus $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ab}}(F_x, \cdot\,) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ab}}(F'_x, \cdot\,)$ induziert, indem Sie geeignete Wolkenkratzergarben und die Adjunktionseigenschaften des direkten Bildes verwenden (s. Thema 3 von Blatt 6 und Thema 1 von Blatt 9).
2. Folgern Sie, dass i einen Isomorphismus $F_x \cong F'_x$ induziert.

Aufgabe 4 (Modulgarben mit freien Halmen)**.** Sei F eine lokal endlich präsentierte $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe auf einem Schema X, und sei $x \in X$ mit der Eigenschaft, dass der Halm F_x ein freier $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul ist. Zeigen Sie, dass es dann bereits eine offene Umgebung $U \subset X$ von x gibt, so dass die Einschränkung $F|_U$ eine freie $\mathcal{O}_X|_U$-Modulgarbe ist.

Besprechung am 7. Januar 2009

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!