Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh Blatt 11 vom 5. Januar 2009

Thema 1 (Durchschnitte offener affiner Unterschemata von affinen Schemata)**.**

1. Sei $\varphi\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata und sei $U \subset Y$ ein offenes Unterschema (d.h. U ist eine offene Teilmenge von Y zusammen mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_Y|_U$). Zeigen Sie, dass das offene Unterschema $\varphi^{-1}(U)$ von X und das Faserprodukt $X \times_Y U$ isomorph sind; hierbei fassen wir X via φ und U via der Inklusion als Schemata über Y auf.

2. Folgern Sie: Der Durchschnitt zweier offener affiner Unterschemata eines affinen Schemas ist affin.

3. Zeigen Sie die Aussage aus Teil 2, ohne Faserprodukte zu verwenden (z.B. über die Charakterisierung aus Thema 3 von Blatt 9).

Thema 2 (Faserprodukte affiner und projektiver Räume)**.**

1. *Faserprodukte affiner Räume.* Gibt es für alle Schemata S und n, $m \in \mathbb{N}$ kanonische Isomorphismen $\mathbb{A}^n_S \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{A}^m_S \cong \mathbb{A}^{n+m}_S$?

2. *Affine Räume und Basiswechsel.* Gibt es für alle Morphismen $S \longrightarrow T$ von Schemata und alle $n \in \mathbb{N}$ kanonische Isomorphismen $\mathbb{A}^n_T \times_T S \cong \mathbb{A}^n_S$?

3. *Faserprodukte projektiver Räume.* Gibt es für alle Schemata S und alle n, $m \in \mathbb{N}$ kanonische Isomorphismen $\mathbb{P}^n_S \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_S \cong \mathbb{P}^{n+m}_S$?

4. *Projektive Räume und Basiswechsel.* Gibt es für alle Morphismen $S \longrightarrow T$ von Schemata und alle $n \in \mathbb{N}$ kanonische Isomorphismen $\mathbb{P}^n_T \times_T S \cong \mathbb{P}^n_S$?

Thema 3 (Gruppenschemata)**.** Geben Sie eine kurze Einführung in Gruppenschemata (*Bosch, Lütkebohmert, Raynaud: Néron Models* (Chapter 4.1)).

1. Führen Sie den Begriff des Gruppenfunktors und des Gruppenobjekts in einer Kategorie ein; führen Sie insbesondere auch Gruppenschemata über einem Basisschema ein.

2. Skizzieren Sie, wie Gruppenobjekte nicht nur durch den zugehörigen dargestellten Funktor, sondern auch durch geeignete Morphismen (Multiplikation, Einheit und Inversenabbildung) charakterisiert werden können.

3. Wie verhalten sich Gruppenschemata unter Basiswechsel?

4. Führen Sie die folgenden Beispiele für Gruppenschemata ein und illustrieren Sie daran die obigen Begriffe: die *additive Gruppe* $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$, die *multiplikative Gruppe* $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, und zu $n \in \mathbb{N}$ die *allgemeine lineare Gruppe* GL_n.

5. Sind alle Schemata Gruppenschemata über $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$?

Besprechung am 14. Januar 2009