Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh Blatt 12 vom 12. Januar 2009

Thema 1 (Fasern von Morphismen von Schemata)**.**

1. Sei K ein Körper. Bestimmen Sie die Fasern der durch die Ringhomomorphismen

$$\begin{aligned} K[X] &\longrightarrow K[X,Y]/(X \cdot Y) \\ X &\longmapsto X, \\ K[X] &\longrightarrow K[X,Y]/(X \cdot Y) \\ X &\longmapsto X+Y, \\ K[X] &\longrightarrow K[X] \\ X &\longmapsto X^2 \end{aligned}$$

gegebenen Morphismen (affiner) Schemata und illustrieren Sie diese Morphismen durch geeignete Bilder.

2. Geben Sie ein Beispiel für ein Schema S und eine Familie $(X_s)_{s\in S}$ von Schemata mit folgender Eigenschaft: Es gibt kein S-Schema $f\colon X \longrightarrow S$, so dass für jedes $s \in S$ die Faser $f^{-1}(s)$ von f über s zu X_s isomorph ist.

Thema 2 (Immersionen sind Monomorphismen)**.** Ein *Monomorphismus* in einer Kategorie C ist ein Morphismus $i\colon X \longrightarrow Y$ in C mit der folgenden Eigenschaft: Sind f, $g\colon T \longrightarrow X$ Morphismen in C mit $i \circ f = i \circ g$, so folgt bereits $f = g$.

1. Was sind Monomorphismen in der Kategorie der Mengen bzw. in der Kategorie der Ringe?
2. Zeigen Sie, dass jeder Morphismus einer Kategorie, der ein Linksinverses in dieser Kategorie besitzt, ein Monomorphismus ist. Gilt auch die Umkehrung?
3. Geben Sie ein Beispiel eines Schemamorphismus, der kein Monomorphismus in der Kategorie der Schemata ist.
4. Zeigen Sie, dass offene bzw. abgeschlossene Immersionen von Schemata Monomorphismen in der Kategorie der Schemata sind.
5. Sind alle Monomorphismen von Schemata bereits offene oder abgeschlossene Immersionen?

Bitte wenden

Thema 3 (Reduzierte Schemata)**.** Ein Schema X heißt *reduziert*, wenn für jede offene Teilmenge $U \subset X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ keine nichttrivialen nilpotenten Elemente enthält.

1. Zeigen Sie, dass ein Schema genau dann reduziert ist, wenn alle offenen affinen Unterschemata reduziert sind.

2. Sei X ein Schema und Y eine abgeschlossene Teilmenge. Zeigen Sie, dass es ein kanonisches reduziertes Schema Y_{red} mit einer abgeschlossenen Immersion $Y_{\text{red}} \longrightarrow X$ gibt, die Y_{red} homöomorph auf Y abbildet.

3. Zeigen Sie, dass die kanonische abgeschlossene Immersion $i\colon X_{\text{red}} \longrightarrow X$ des reduzierten Schemas X_{red} eines Schemas X die folgende universelle Eigenschaft besitzt: Für jedes reduzierte Schema T und jeden Morphismus $f\colon T \longrightarrow X$ gibt es genau einen Morphismus $\overline{f}\colon T \longrightarrow X_{\text{red}}$, der $i \circ \overline{f} = f$ erfüllt.

4. Sind die Fasern von Morphismen zwischen reduzierten Schemata auch reduzierte Schemata?

Besprechung am 21. Januar 2009