Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 13 vom 19. Januar 2009

Thema 1 (Morphismen in separierte Schemata). Separierte Schemata verhalten sich im folgenden Sinne wie Hausdorffräume:

1. Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann hausdorffsch ist, wenn die Diagonale $\{(x, x) \mid x \in X\}$ in $X \times X$ abgeschlossen ist.

2. Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann hausdorffsch ist, wenn für jeden topologischen Raum T und je zwei stetige Abbildungen $f, g\colon T \longrightarrow X$ die Menge $\{t \in T \mid f(t) = g(t)\}$ in T abgeschlossen ist.

3. Sind $f, g\colon T \longrightarrow X$ zwei S-Morphismen eines S-Schemas T in ein S-Schema X, so bezeichnen wir das T-Schema $T \times_{X \times_S X} X$ als das *Koinzidenzschema von f und g*; hierbei bilden wir das Faserprodukt über den von f und g induzierten S-Morphismus $T \longrightarrow X \times_S X$ und den Diagonalmorphismus $X \longrightarrow X \times_S X$.

   Zeigen Sie, dass $T \times_{X \times_S X} X \longrightarrow T$ eine lokal-abgeschlossene Immersion ist und, dass das S-Schema X genau dann separiert ist, wenn für jedes S-Schema T und je zwei Morphismen $f, g\colon T \longrightarrow X$ das Koinzidenzschema zu f und g ein abgeschlossenes Unterschema von T ist.

Thema 2 (Bewertungsringe und Spezialisierungen von Punkten).

1. Führen Sie Bewertungen auf Körpern und Bewertungsringe ein. Skizzieren Sie die äquivalente Charakterisierung von Bewertungsringen als maximale (bezüglich Dominiertheit) lokale Unterringe ihrer Quotientenkörper. Geben Sie Beispiele für Bewertungsringe. (*Atiyah, Macdonald: Introduction to Commutative Algebra* [S. 65f, S. 72]).

2. Sei X ein Schema, sei $x \in X$ und sei $x' \in X$ eine Spezialisierung von x mit $x \neq x'$. Zeigen Sie, dass es einen Bewertungsring R und einen separierten Morphismus $(f, f^\#)\colon \operatorname{Spec} R \longrightarrow X$ mit

   $$f(g_R) = x \quad \text{und} \quad f(a_R) = x'$$

   gibt, wobei $g_R \in \operatorname{Spec} R$ bzw. $a_R \in \operatorname{Spec} R$ den generischen bzw. den abgeschlossenen Punkt von $\operatorname{Spec} R$ bezeichnet. (*Grothendieck: EGA II (Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 8, 1961)* [§ 7.1.4])

Bitte wenden

Thema 3 (Das Bewertungskriterium für Separiertheit). Beweisen Sie das Bewertungskriterium für Separiertheit. (*Skript*$^{0.4}$ [Kapitel 6.6 ab Definition 11]; *Hartshorne: Algebraic Geometry* [S. 97ff]; *Grothendieck: EGA II (Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 8, 1961)* [§§ 7.2.1–7.2.3]; *Grothendieck, Dieudonné: EGA I (Springer, 1971)* [§I.5.5]).

1. Zeigen Sie: Ist $(f, f^{\#})\colon T \longrightarrow X$ ein quasi-kompakter Morphismus von Schemata, so ist das Bild $f(T)$ genau dann in X abgeschlossen, wenn $f(T)$ in X unter Spezialisierung abgeschlossen ist.

2. *Das Bewertungskriterium für Separiertheit.* Schließen Sie mit Hilfe von Thema 1 und Thema 2: Ist X ein S-Schema, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

   – Das S-Schema X ist separiert.

   – Der Diagonalmorphismus $X \longrightarrow X \times_S X$ ist quasi-kompakt und für alle S-Schemata T der Form $T = \operatorname{Spec} R$, wobei R ein Bewertungsring ist, stimmen je zwei S-Morphismen vom Typ $T \longrightarrow X$ überein, wenn sie im generischen Punkt übereinstimmen (d.h., wenn die Kompositionen dieser Morphismen mit dem kanonischen Morphismus $\operatorname{Spec} Q(R) \longrightarrow T$ übereinstimmen).

Besprechung am 28. Januar 2009/4. Februar 2009