Seminar zur Algebraischen Geometrie I

Prof. Dr. S. Bosch/Dr. C. Löh — Blatt 14 vom 5. Februar 2009

Aufgabe 1 (Eine Charakterisierung K-wertiger Punkte). Sei K ein Körper.

1. Sei X ein Schema. Zeigen Sie, dass es eine kanonische Bijektion
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec} K, X) \cong \bigl\{(x,\varphi) \bigm| x \in X \text{ und } \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(k(x), K)\bigr\}$$
gibt.

2. Welche Beziehung herrscht also zwischen der Menge der K-wertigen Punkte eines K-Schemas X und der Menge der Punkte von X, deren Restklassenkörper via der Strukturabbildung $X \longrightarrow \operatorname{Spec} K$ isomorph zu K ist?

3. Gibt es K-Schemata, die keine K-wertigen Punkte enthalten?

Aufgabe 2 (Zusammenhängende Schemata).

1. Sei X ein Schema. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   - Der X unterliegende topologische Raum ist zusammenhängend.
   - Im Ring $\mathcal{O}_X(X)$ gibt es keine nichttrivialen idempotenten Elemente.
   - Der topologische Raum $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ ist zusammenhängend.

2. Zeigen Sie, dass Spektren lokaler Ringe zusammenhängend sind.

3. Für welche Ringe R und welche $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{P}^n_R$ zusammenhängend?

Aufgabe 3 (Produkte projektiver Geraden). Sei K ein Körper und sei X das Faserprodukt $\mathbb{P}^1_K \times_{\operatorname{Spec} K} \mathbb{P}^1_K$ zweier projektiver Geraden.

1. Bestimmen Sie den Ring $\mathcal{O}_X(X)$ der globalen Schnitte von X.

2. Gibt es für ein $n \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Immersion $X \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$?

Aufgabe 4 (Čech-Kohomologie des Kreises).

1. Zeigen Sie das *Lebesgue-Lemma*: Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes X, so gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, eine sogenannte *Lebesgue-Zahl*, mit folgender Eigenschaft: Zu jeder Menge $V \subset X$ mit Durchmesser höchstens ε gibt es ein $i \in I$ mit $V \subset U_i$.

2. Finden Sie mit Hilfe des Lebesgue-Lemmas ein System offener Überdeckungen von $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$, das kofinal in $\mathrm{Cov}(S^1)$ ist, und so dass jede dieser Überdeckungen Vielfachheit 2 hat; die *Vielfachheit* einer Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ ist hierbei definiert als
$$\min\Biggl\{ d \in \mathbb{N} \Biggm| \text{für alle } J \subset I \text{ mit } |J| > d \text{ ist } \bigcap_{j\in J} U_j = \emptyset \Biggr\} \in \mathbb{N} \cup \infty.$$

3. Bestimmen Sie die Čech-Kohomologie $\check{H}^*(S^1;\mathbb{Z})$ von S^1 mit Werten in der konstanten Garbe $\mathbb{Z}$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.
